

УДК 532.5

ДИНАМІКА ТОЧКОВИХ ВИХОРИВ НА СФЕРІ

В. В. МЕЛЕШКО*, П. НЬЮТОН**, В. В. ОСТРОВСЬКИЙ*

* Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

** Університет південної Каліфорнії, Лос Анжелес

Отримано 04.03.2009

Представлено рівняння руху точкових вихорів на сфері. Знайдено положення фіксованої та відносної рівноваги трьох точкових вихорів. Проведена геометрична класифікація можливих рухів трьох точкових вихорів на сфері. Динаміка точкових вихорів на сфері продемонстрована на графіках руху вихорів на фазовій площині. Проведено аналіз самоподібного зіткнення вихорів.

Представлено уравнения движения точечных вихрей на сфере. Найдены положения фиксированного и относительного равновесия трех точечных вихрей. Проведена геометрическая классификация возможных движений трех точечных вихрей на сфере. Динамика точечных вихрей на сфере продемонстрирована на графиках движения вихрей на фазовой плоскости. Проведен анализ самоподобного столкновения вихрей.

Equations of motion of point vortices on a sphere are derived in the article. Fixed and relative equilibrium configurations for three point vortices are found. Geometric classification of possible motion of three point vortices on a sphere is given. To describe dynamics of three point vortices on a sphere plots of vortex motion on a phase plane are given. The article contains analysis of self-similar collapse of three point vortices on a sphere.

ВСТУП

Вихрова динаміка як широкий розділ гідродинаміки бере свій початок з класичної статті Гельмгольца [1], опублікованої в 1858 році. В цій роботі Гельмгольц не тільки означив вихровий рух кінематично (до нього це зробив Стокс у 1845 році), але й довів до досконалості динамічну теорію руху вихорів в ідеальній нестисливій рідині у вигляді трьох законів збереження приблизно в тій же формі, в якій вони представлені у всіх підручниках з гідродинаміки¹. Основний зміст динамічної теорії міститься в своєрідному законі збереження вихрового руху: в ідеальній нев'язкій рідині вихори не можуть зникнути, тобто інтенсивність вихору постійна в часі. До збереження вихору у часі додається і збереження у просторі: інтенсивність вихору постійна вздовж кожної вихрової трубки; ці трубки або замкнуті, або виходять на границю рідини. До цього часу накоплена величезна література (достатньо повний огляд ранніх публікацій приведено у [2]), яка включає як класичні підручники з гідромеханіки, так і спеціальні монографії по вихровій динаміці [3–10].

Особливий інтерес представляє динаміка точкових вихорів на площині, тобто взаємодія паралельних вихрових ниток. Гамільтонові рівняння руху

таких точкових вихорів були виведені вперше в книзі [11]. На перший погляд, вони представляють собою чисто кінематичні умови руху точки, в якій знаходиться вихор у наведеному полі швидкостей, від решти вихорів. Проте, як зазначено у [12, §21], ці рівняння виражають динамічні закони руху, які випливають з рівнянь руху Ейлера для ідеальної нестисливої рідини.

До недавнього часу значно менше уваги було приділено руху точкових вихорів на сфері. Першим, хто вивчав рух вихорів на сфері, був І. С. Громека [13]. Він, використовуючи картографічну проекцію, побудував загальні рівняння руху вихорів на циліндрі та на сфері. І. Громека також розглянув більш загальну задачу про рух вихорів у замкненій нерухомій області на сфері. Але його рівняння містять невідому "функцію Гріна, для об'єму, який займає рідина". На жаль, ця робота пройшла майже непоміченою у [14].

На відміну від І. Громеки, Е. Цермело у [15] вивів повні рівняння руху. Хоч ці рівняння і були отримані на початку ХХ сторіччя, питання динаміки вихрових структур на сфері не отримало достатньої уваги в той час. Ці ж рівняння, після 70 років забуття, повторно були виведені Богомолвим [16]. Автор вивів основні рівняння руху та показав, що система є Гамільтоновою, і знайшов інваріанти руху. Богомолвим також вивів рівняння руху точкових вихорів на рухомій сфері. Досить лаконічний вивід рівнянь руху точкових вихорів представлений у роботі [17]. У ній автори також вивели рівняння руху однорідних областей зави-

¹Як відмітив Зомерфельд [12, с. 163] "соответствующие теоремы были найдены в посмертных статьях Дирихле, умершего в 1859 г., и опубликованы в его собрании сочинений, изданном Дедакиндом". Авторам не удалось четко идентифицировать указанную відповідність.

хреності. В роботі [18] було узагальнено метод виводу рівнянь руху на поверхні постійної кривини.

У даній статті ми зосередимось на динаміці точкових вихрових структур на сфері. Хоч ця задача має уже майже вікову історію, вона і досі містить багато відкритих питань. Ми вивчимо рух трьох точкових вихорів на поверхні сфери.

1. РУХ ТОЧКОВИХ ВИХОРИВ НА ПОВЕРХНІ СФЕРИ

Вихрове поле $\vec{\omega}$ зазвичай визначається як ротор поля швидкостей \vec{u} , тобто

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}. \quad (1)$$

У випадку, коли поле швидкостей описує рух нестисливої однорідної ідеальної рідини, з принципу збереження маси маємо:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0.$$

У випадку, коли рідина рухається по поверхні сфери одиничного радіуса, можна ввести функцію току ψ , яка визначає поле швидкостей

$$\vec{u} = (\nabla\psi) \times \vec{e}_r, \quad (2)$$

де \vec{e}_r – одиничний вектор нормалі, направлений вздовж радіуса сфери.

Після підстановки співвідношення (2) в означення (1) отримуємо скалярне рівняння

$$\Delta\psi = -\omega,$$

де $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_r$. У сферичних координатах дане рівняння матиме вигляд

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} = -\omega. \quad (3)$$

Переписавши у сферичних координатах представлення (3), отримуємо поле швидкостей

$$\vec{u} = \left(0, \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\phi}, -\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right). \quad (4)$$

Оператор у лівій частині рівняння (3) носить назву оператора Бельтрамі–Лапласа. Для того, щоб теорема Кельвіна для циркуляції виконувалась, тобто

$$\int_S \omega dS = 0,$$

де S – поверхня сфери, визначимо функцію Гріна G для оператора Бельтрамі–Лапласа наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\sin\theta \frac{\partial G}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 G}{\partial\phi^2} = \\ = \delta(\theta, \phi, \theta', \phi') - \frac{1}{4\pi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Останній доданок відповідає постійному полю завихреності, інтегральна циркуляція якого рівна -1, тобто рівна і протилежна за знаком до інтенсивності особливості в точці (θ', ϕ') . Дана особливість носить назву точкового вихору на сфері.

Рівнянню (10) задовольняє функція

$$G(\theta, \phi, \theta', \phi') = -\frac{1}{2\pi} \ln \sin\left(\frac{1}{2}\gamma(\theta, \phi, \theta', \phi')\right),$$

де $\gamma(\theta, \phi, \theta', \phi')$ – центральний кут між точками з координатами (θ, ϕ) та (θ', ϕ') . Використавши тригонометричну формулу для синусу половинного кута, отримуємо

$$G = -\frac{1}{4\pi} \ln(1 - \cos\gamma).$$

Ця формула зручніша, оскільки $\cos\gamma$ можна виразити як:

$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi - \phi').$$

Користуючись вищевказаною функцією Гріна, можемо знайти функцію току ψ як розв'язок рівняння (8):

$$\psi(\theta, \phi) = \int_S \omega(\theta', \phi') \ln(1 - \cos\gamma) \sin\theta' d\theta' d\phi'. \quad (6)$$

Щоб отримати рівняння руху N точкових вихорів на нерухомій сфері, виберемо ω рівною

$$\omega(\theta, \phi) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \delta(\theta, \phi, \theta_i, \phi_i), \quad (7)$$

де Γ_i – інтенсивність i -го вихору. Після підстановки завихреності (15) у розв'язок (13), користуючись співвідношенням (9), отримуємо:

$$\begin{aligned} u_\theta &= \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \frac{\sin\theta_j \sin(\phi - \phi_j)}{1 - \cos\gamma_j}, \\ u_\phi &= -\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \frac{\kappa_j}{1 - \cos\gamma_j}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \gamma(\theta, \phi, \theta_j, \phi_j); \\ \kappa_j &= \cos \theta \cos \theta_j \cos(\phi - \phi_j) - \sin \theta \sin \theta_j. \end{aligned}$$

Згідно з теоремою Гельмгольца, вихори будуть рухатись як частинки рідини, тобто рівняння руху N точкових вихорів мають вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1, i \neq j}^N \Gamma_j \frac{\sin \theta_j \sin(\phi_i - \phi_j)}{1 - \cos \gamma_{ij}}, \\ \sin \theta_i \dot{\phi}_i &= \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1, i \neq j}^N \Gamma_j \frac{\kappa_{ij}}{1 - \cos \gamma_{ij}}, \end{aligned} \quad (8)$$

де $\gamma_{ij} = \gamma(\theta_i, \phi_i, \theta_j, \phi_j)$ та $\kappa_{ij} = \cos \theta_i \cos \theta_j \cos(\phi_i - \phi_j) - \sin \theta_i \sin \theta_j$.

Приведені рівняння можна записати у наступній векторній формі [4]:

$$\dot{\vec{x}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{\vec{x}_j \times \vec{x}_i}{(\vec{x}_i - \vec{x}_j)^2}, \quad (9)$$

де \vec{x}_i – вектор, який з'єднує центр сфери з точкою, в якій знаходиться точковий вихор, тобто $\|\vec{x}_i\| = 1$.

Для того, щоб отримати рівняння руху точкових вихорів на сфері, що обертається, до ω , визначеного у співвідношенні (16), потрібно додати $\omega_r = 2\Omega \cos \theta$. Тоді рівняння руху у векторній формі приймуть вигляд

$$\dot{\vec{x}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{\vec{x}_j \times \vec{x}_i}{(\vec{x}_i - \vec{x}_j)^2} + \Omega \vec{e}_z \times \vec{x}_i,$$

де $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$.

Зауважимо, що рівняння (16) можна представити у вигляді рівнянь Гамільтона з наступним гамільтоніаном і канонічними змінними:

$$H = \frac{1}{4\pi} \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j \ln l_{ij},$$

$$P = \sqrt{|\Gamma_i|} \cos \theta_i, \quad Q = \sqrt{|\Gamma_i|} \phi_i,$$

$$\dot{P}_i = \frac{\partial H}{\partial Q_i}, \quad \dot{Q}_i = -\frac{\partial H}{\partial P_i},$$

де $l_{ij}^2 = (\vec{x}_i - \vec{x}_j)^2 = 2(1 - \cos \gamma_{ij})$.

Дужка Пуасона для даної Гамільтонової системи має вигляд:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{\Gamma_k} \left(\frac{\partial f}{\partial \cos \theta_k} \frac{\partial g}{\partial \phi_k} - \frac{\partial f}{\partial \phi_k} \frac{\partial g}{\partial \cos \theta_k} \right), \\ \{\phi_i, \cos \theta_j\} &= \frac{\delta_{ij}}{\Gamma_i}, \end{aligned}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Окрім Гамільтоніана дана система допускає ще три інтеграли руху:

$$M_1 = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \sin \theta_i \cos \phi_i = \text{const},$$

$$M_2 = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \sin \theta_i \sin \phi_i = \text{const},$$

$$M_3 = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \cos \theta_i = \text{const},$$

які разом утворюють вектор $\vec{M} = (M_1, M_2, M_3)$, котрий називається моментом завихреності [4]. Також корисно ввести до розгляду вектор центру завихреності

$$\vec{c} = \frac{\vec{M}}{\Gamma},$$

де $\Gamma = \sum_{i=1}^N \Gamma_i$.

Зазначимо, що H, M_1, M_2, M_3 в загальному випадку дають нам тільки три незалежних інволютивних інтегралів:

$$\{H, M_3\} = 0, \quad \{H, M_1^2 + M_2^2\} = 0,$$

$$\{M_3, M_1^2 + M_2^2\} = 0.$$

У випадку, коли $\vec{M} = \vec{0}$, із співвідношень

$$\{M_2, M_1\} = M_3, \quad \{M_1, M_3\} = M_2,$$

$$\{M_3, M_2\} = M_1$$

отримаємо чотири незалежних, інволютивних інтегралів. Зазначені факти приводять до теореми, яка була доведена у [4]:

Теорема. Задача про рух 3-х вихорів на сфері повністю інтегровна для вихорів довільної інтенсивності. Якщо центр завихреності дорівнює нулю, то задача про рух 4-х вихорів на сфері також інтегровна.

Аналогічний результат у 1998 році незалежно отримано у [5, 19, 20]. Проте, як відмітив О. В. Борисов, вперше цю теорему доведено в дисертаційній роботі Е. Цермело, яка опублікована на початку ХХ сторіччя [15, 21].

Альтернативний вивід рівнянь руху наведено у [5, 15, 16, 22]. Рівняння руху у стереографічній проекції, а також граничний перехід до плоского випадку зображено у [4, 23].

2. ДИНАМІКА РУХУ ТРЬОХ ТОЧКОВИХ ВИХОРИВ

Досліджено динаміку руху точкових вихорів в інтегровній задачі про рух трьох точкових вихорів на сфері. Приведено геометричну класифікацію можливих рухів. Проведено аналогію з плоским випадком, який детально досліджено у [3, 24, 25]. Досліджено умови самоподібного зіткнення трьох вихорів за скінчений час.

2.1. Геометрична класифікація

Рівняння відносного руху трьох точкових вихорів згідно з [4] мають вигляд

$$\begin{aligned}\frac{d(l_{12}^2)}{dt} &= \frac{\Gamma_3 V}{\pi} \left[\frac{1}{l_{23}^2} - \frac{1}{l_{31}^2} \right], \\ \frac{d(l_{23}^2)}{dt} &= \frac{\Gamma_1 V}{\pi} \left[\frac{1}{l_{31}^2} - \frac{1}{l_{12}^2} \right], \\ \frac{d(l_{31}^2)}{dt} &= \frac{\Gamma_2 V}{\pi} \left[\frac{1}{l_{12}^2} - \frac{1}{l_{23}^2} \right],\end{aligned}\quad (10)$$

де V – об'єм паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$, тобто $V = \vec{x}_1 \cdot (\vec{x}_2 \times \vec{x}_3)$.

Зауважимо, що V може бути додатнім або від'ємним у залежності від того, праву чи ліву трійку утворюють вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$. Якщо $V = 0$, то це означає, що три вихори лежать на великому колі сфери.

Іншими важливими величинами, які є корисними в описі руху трьох вихорів, є: $A(t)$ – площа плоского трикутника, побудованого на трьох вихорах, та \vec{n} – вектор нормалі до площини трикутника, побудованого на вихорах, який виходить з центру сфери. У подальшому будуть використані формули:

$$\begin{aligned}\vec{n} &= (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \times (\vec{x}_2 - \vec{x}_3) = \\ &= \vec{x}_1 \times \vec{x}_2 + \vec{x}_2 \times \vec{x}_3 + \vec{x}_3 \times \vec{x}_1, \\ A(t) &= \pm \frac{1}{4} (2l_{12}^2 l_{23}^2 + 2l_{23}^2 l_{31}^2 + 2l_{31}^2 l_{12}^2 - \\ &- l_{12}^4 - l_{23}^4 - l_{31}^4)^{1/2}, \\ V(t) &= \pm \frac{1}{2} (16A^2 - l_{12}^2 l_{23}^2 l_{31}^2).\end{aligned}\quad (11)$$

Об'єм V можна записати у термінах A, R та \bar{a} :

$$V = \pm 2A \sqrt{R^2 - \bar{a}^2} = \pm 2AR \sqrt{1 - \frac{\bar{a}^2}{R^2}},$$

В. В. Мелешко, П. Ньютон, В. В. Островський

де R – радіус сфери; \bar{a} – радіус кола, описаного навколо трикутника, побудованого на вихорах. У ліміті, коли $R \rightarrow \infty$, отримуємо, що $V = \pm 2AR$. Підставивши це значення у рівняння (10), отримуємо рівняння відносного руху точкових вихорів, які були досліджені у [3, 24, 25].

Відзначимо, що об'єм V можна визначити за допомогою альтернативних формул

$$V = \vec{c} \cdot \vec{n} = \vec{x}_i \cdot \vec{n}.$$

Звідси можемо отримати обмеження

$$(\vec{c} - \vec{x}_i) \cdot \vec{n} = 0,$$

які означають, що вектор $(\vec{c} - \vec{x}_i)$ повинен лежати у площині трикутника, побудованого на вихорах. Ці обмеження будуть використані пізніше для класифікації руху трьох точкових вихорів.

Неважно переконатись, що інваріантами системи (10) є

$$C_1 = \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j l_{ij}^2, \quad C_2' = \frac{1}{4\pi} \sum_{i < j} \Gamma_j \Gamma_i \ln(l_{ij}^2). \quad (12)$$

Остання величина може бути переписана у наступній більш зручній еквівалентній формі

$$\begin{aligned}C_2 &= \exp \left(\frac{4\pi C_2'}{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3} \right) = \\ &= (l_{12}^2)^{1/\Gamma_3} (l_{23}^2)^{1/\Gamma_1} (l_{31}^2)^{1/\Gamma_2}.\end{aligned}$$

Формули та позначення, які будуть використані пізніше:

$$\begin{aligned}\|\vec{c}\|^2 &= 1 - C_1/\Gamma^2, \quad \|\vec{n}\| = 2A, \quad \vec{c}\dot{\vec{n}} = \dot{V}, \\ h &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\Gamma_i}, \quad g = (\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3)^{1/3}, \\ \dot{A} &= \frac{V}{16\pi A} \sum \frac{l_{ij}^2 - l_{jk}^2}{l_{ki}^2} (\Gamma_i + \Gamma_k), \\ \dot{V} &= \frac{1}{8\pi} \left[2 \sum \frac{l_{ij}^2 - l_{jk}^2}{l_{ki}^2} (\Gamma_i + \Gamma_k) - \right. \\ &\left. - \sum l_{ij}^2 (\Gamma_i - \Gamma_j) \right], \\ \dot{\vec{n}} &= \frac{1}{4\pi} \sum \left[\frac{\Gamma_i + \Gamma_j}{l_{ij}^2} - \frac{\Gamma_i + \Gamma_k}{l_{ki}^2} \right] l_{jk}^2 \vec{x}_i.\end{aligned}\quad (13)$$

В останніх трьох формулах підсумовування іде про трьом індексам i, j, k від 1 до 3, причому $i \neq j \neq k$.

Відмітимо, що рівняння руху (17) містять наступні симетрії:

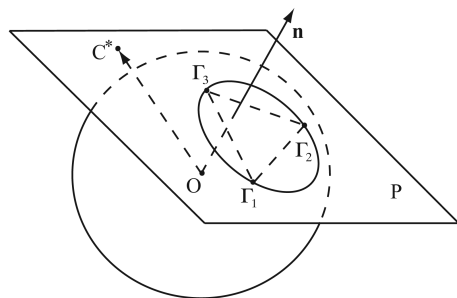


Рис. 1. Надрадіальні положення

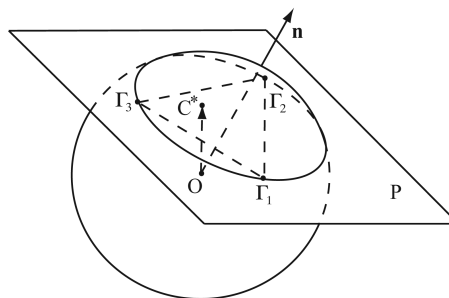


Рис. 2. Підрадіальні положення

- Якщо $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n; \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ задовольняють рівнянням руху, то $-\Gamma_1, -\Gamma_2, \dots, -\Gamma_n; -\vec{x}_1, -\vec{x}_2, \dots, -\vec{x}_n$ також задовольняють рівнянням руху.
- Якщо $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n; \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n; t$ задовольняють рівнянням руху, то $-\Gamma_1, -\Gamma_2, \dots, -\Gamma_n; \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n; -t$ також задовольняють рівнянням руху.
- Якщо $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n; \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n; t$ задовольняють рівнянням руху, то $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n; -\vec{x}_1, -\vec{x}_2, \dots, -\vec{x}_n; -t$ також задовольняють рівнянням руху.
- Рівняння руху не зміняться при циклічній та антициклічній перестановці індексів.

Використовуючи вказані симетрії для дослідження руху трьох вихорів, достатньо розглянути тільки два випадки: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 > 0$ та $\Gamma_1, \Gamma_2 > 0, \Gamma_3 < 0$.

Нагадаємо, що \vec{c} – інваріант руху, а вектор $(\vec{c} - \vec{x}_i)$ повинен завжди лежати у площині, побудованій на трьох вихорах. Ці два факти дозволяють провести наступну геометричну класифікацію рухів на сфері, базуючись на порівнянні $\|\vec{c}\|$ та $R = 1$:

1. *Надрадіальні положення* $\|\vec{c}\| > R$. У даному випадку кінець вектора \vec{c} лежить за межами сфери і перетинає площину P , в якій знаходяться вихори, в точці C^* , як показано на рис. 1. Оскільки \vec{c} – інваріант руху, тому точка C^* є фіксованою. Площина, у якій знаходяться вихори, у процесі руху може обертатись як завгодно навколо цієї точки, але вона повинна перетинати сферу, що і продемонстровано на рис. 1. З приведених міркувань ми можемо зробити наступні висновки.
 - Тільки у випадку, коли \vec{c} лежить у площині P , вихори рухаються по великому колу. Тобто \vec{c} та \vec{n} – перпендикулярні.

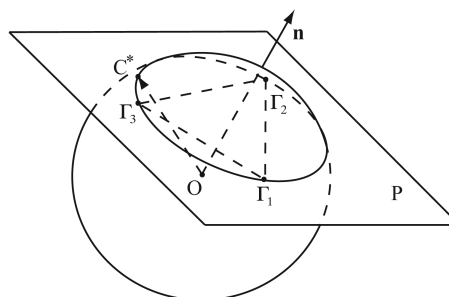


Рис. 3. Радіальні положення

- Можливий колапс в точці дотику площини, яка проходить через C^* до поверхні сфери.
- Оскільки $C_1 < 0$, ці положення можливі тільки коли $\Gamma_1, \Gamma_2 > 0, \Gamma_3 < 0$.

2. *Підрадіальні положення* $\|\vec{c}\| < R$. У даному випадку точка C^* лежить всередині сфери. Цей випадок продемонстровано на рис. 2. Висновки, які можемо зробити про дану сім'ю рухів:

- Тільки у випадку, коли \vec{c} та \vec{n} колінеарні, вихори будуть рухатись по одній паралелі. У даному випадку радіус \bar{a} буде мінімальним.
- Тільки у випадку, коли \vec{c} лежить у площині P , вихори рухаються по великому колу. Тобто \vec{c} та \vec{n} – перпендикулярні.
- Неможливий колапс вихорів.

3. *Радіальні положення* $\|\vec{c}\| = R$. У даному випадку точка C^* лежить на сфері. Цей випадок продемонстровано на рис. 3. Висновки, які можемо зробити про дану сім'ю рухів:

- Тільки у випадку, коли \vec{c} лежить у площині P , вихори рухаються по великому колу. Тобто \vec{c} та \vec{n} – перпендикулярні.

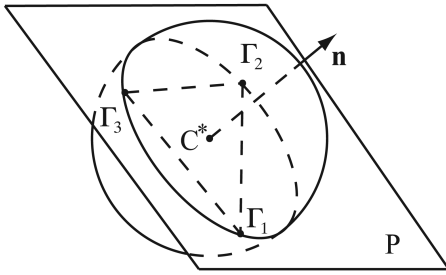


Рис. 4. Вироджені положення

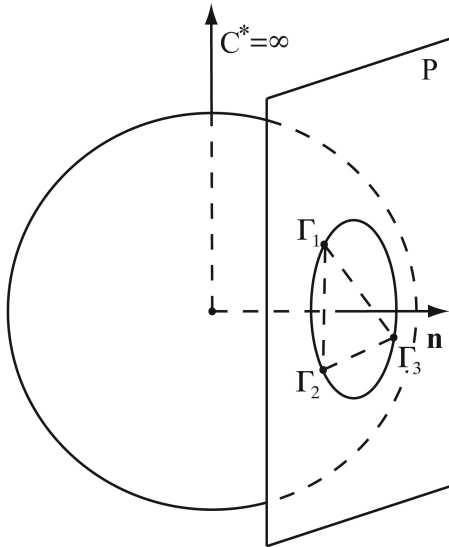


Рис. 5. Граничні надрадіальні положення

- Колапс вихорів можливий в точці C^* .

4. *Вироджені положення* $||\vec{c}|| = 0$. Даний випадок є найбільш симетричним і він зображений на рис. 4. Площина P , у якій знаходяться вихори, повинна проходити через центр сфери. Висновки, які можемо зробити про дану сім'ю рухів:

- Вихори рухаються тільки по великих колах сфери.
- Неможливий колапс вихорів.
- $C_1 = \Gamma^2$ у даному випадку.

5. *Граничні надрадіальні положення* $||\vec{c}|| = \infty$. Останній випадок є граничним переходом при $||\vec{c}|| \rightarrow \infty$. Точка C^* знаходиться на нескінченності. Щоб отримати даний випадок, ми повинні покласти $\Gamma = 0$. Площина P перетинає сферу, як зображено на рис. 5. Висновки, які можемо зробити про дану сім'ю рухів:

- Тільки у випадку, коли \vec{M} лежить у площині P , вихори будуть рухатись по великому колу.
- Неможливий колапс вихорів.

2.2. Положення рівноваги

Розпочнемо розгляд положень рівноваги з розгляду їхніх фіксованих положень, тобто тих, у яких вихори знаходяться у фіксованих точках

2.2.1. Фіксовані положення рівноваги

Опис усіх можливих фіксованих положень рівноваги міститься у твердженнях:

1. Для того, щоб система із трьох вихорів на сфері була фіксованим положенням рівноваги, необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{i=1}^3 \Gamma_i (\Gamma_j + \Gamma_k) \vec{x}_i = 0, \forall j \neq k \neq i.$$

Звідки випливає, що всі положення фіксованої рівноваги лежать на великих колах.

2. $\vec{c} = 0$, тоді і тільки тоді, коли $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$ і відповідні фіксовані положення рівноваги є рівносторонніми трикутниками.
3. Якщо інтенсивності вихорів не рівні між собою, тоді положення фіксованої рівноваги не вироджені ($\vec{c} \neq 0$) і задовольняють умовам

$$\Gamma_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = \Gamma_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = \Gamma_3 \operatorname{tg} \alpha_3,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – кути трикутника з вершинами у точках, в яких знаходяться вихори з інтенсивностями $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ відповідно.

Щоб довести необхідність у першому твердженні, покладемо рівною нулю праву частину рівнянь (17):

$$\sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{\vec{x}_j \times \vec{x}_i}{(\vec{x}_i - \vec{x}_j)^2} = 0.$$

Домножимо векторно зліва на $\Gamma_i \vec{x}_i$:

$$\Gamma_i \vec{x}_i \times \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{\vec{x}_j \times \vec{x}_i}{(\vec{x}_i - \vec{x}_j)^2} = 0.$$

Далі, користуючись

$$\vec{x}_i \times (\vec{x}_j \times \vec{x}_i) = \vec{x}_j - (\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j) \vec{x}_i,$$

підсумовуючи по i , отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{i < j}^3 \Gamma_i \Gamma_j (\vec{x}_i + \vec{x}_j) &= 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \vec{x}_i (\Gamma - \Gamma_i) &= 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{M}\Gamma &= \sum_{i=1}^3 \Gamma_i^2 \vec{x}_i, \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^3 \Gamma_i (\Gamma_j + \Gamma_k) \vec{x}_i &= 0, \forall j \neq k \neq i. \end{aligned}$$

Допустимо, що співвідношення (1) справедливе, тобто

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\Gamma_2 + \Gamma_3)\vec{x}_1 + \Gamma_2(\Gamma_3 + \Gamma_1)\vec{x}_2 + \\ + \Gamma_3(\Gamma_1 + \Gamma_2)\vec{x}_3 = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

домноживши скалярно на $\vec{x}_i, i = 1, 2, 3$, отримаємо

$$\begin{aligned} \Gamma_2(\Gamma_3 + \Gamma_1)l_{12}^2 + \Gamma_3(\Gamma_1 + \Gamma_2)l_{31}^2 &= \\ = \Gamma_1(\Gamma_2 + \Gamma_3)l_{12}^2 + \Gamma_3(\Gamma_1 + \Gamma_2)l_{23}^2 &= \\ = \Gamma_1(\Gamma_2 + \Gamma_3)l_{31}^2 + \Gamma_2(\Gamma_1 + \Gamma_3)l_{23}^2 &= \\ = 2[\Gamma_1(\Gamma_2 + \Gamma_3) + \Gamma_2(\Gamma_1 + \Gamma_3) + \Gamma_3(\Gamma_1 + \Gamma_2)]. \end{aligned}$$

Звідки матимемо

$$\begin{aligned} (\Gamma_1 + \Gamma_2)l_{31}^2 &= (\Gamma_1 + \Gamma_3)l_{12}^2, \\ (\Gamma_2 + \Gamma_3)l_{12}^2 &= (\Gamma_1 + \Gamma_2)l_{23}^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Тепер, користуючись даними співвідношеннями, з рівнянь руху (17) отримаємо $\ddot{\vec{x}}_i = 0$.

Оскільки з виразу (1) витікає, що вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ — лінійно залежні, тобто вони лежать в одній площині, яка проходить через центр сфери, тому вихори знаходяться на великому колі.

Доведемо друге твердження. Допустимо, що $\vec{c} = 0$. Тоді для фіксованих положень рівноваги з рівності (1) виходить, що $\vec{M}\Gamma = \sum \Gamma_i^2 \vec{x}_i = 0$ і також $\vec{M} = \sum \Gamma_i \vec{x}_i = 0$. Домноживши друге співвідношення на Γ_1 та віднявши від першого, отримаємо

$$\Gamma_2(\Gamma_2 - \Gamma_1)\vec{x}_2 = \Gamma_3(\Gamma_1 - \Gamma_3)\vec{x}_3.$$

Звідки витікає, що або $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$, або вектори \vec{x}_2 та \vec{x}_3 колінеарні. Подібні перетворення приводять до аналогічного результату щодо векторів \vec{x}_1 та \vec{x}_3 , тобто або всі інтенсивності рівні, або \vec{x}_1 та

\vec{x}_3 колінеарні. Але \vec{x}_3 не може бути колінеарним з \vec{x}_1 та \vec{x}_2 одночасно. Тому $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$.

Якщо ж допустити, що $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$, то з співвідношення (14) отримаємо $\vec{c} = 0$.

Оскільки $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$ та $\vec{c} = 0$, то $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 = 0$. Ця умова якраз і говорить про те, що вихори знаходяться у вершинах правильного трикутника.

Щоб довести останнє третє твердження, з рівностей (15) маємо

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \Gamma_1 \frac{l_{12}^2 + l_{23}^2 - l_{31}^2}{l_{12}^2 + l_{31}^2 - l_{23}^2}, \\ \Gamma_3 &= \Gamma_1 \frac{l_{23}^2 + l_{31}^2 - l_{12}^2}{l_{12}^2 + l_{31}^2 - l_{23}^2}. \end{aligned}$$

Користуючись теоремою косинусів для трикутника, побудованого на вихорах, з попереднього співвідношення отримаємо

$$\begin{aligned} \Gamma_2 l_{31} \cos \alpha_1 &= \Gamma_1 l_{23} \cos \alpha_2, \\ \Gamma_3 l_{12} \cos \alpha_1 &= \Gamma_1 l_{23} \cos \alpha_3. \end{aligned}$$

Далі, користуючись теоремою синусів, матимемо результат третього твердження.

Кілька зауважень щодо фіксованих положень рівноваги:

- Необхідна умова твердження 1 може бути узгальнена для випадку N точкових вихорів.
- У випадку площини тільки колінеарні положення рівноваги можуть бути фіксованими положеннями рівноваги. У випадку сфери фіксовані положення рівноваги є системами з вихорами, розташованими на великому колі.
- У випадку площини, тільки коли $\Gamma_1, \Gamma_2 > 0, \Gamma_3 < 0$, існують фіксовані положення рівноваги. На сфері ж положення фіксованої рівноваги можуть існувати для обох випадків: $\Gamma_1, \Gamma_2 > 0, \Gamma_3 < 0$ та $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 > 0$.

2.2.2. Положення відносної рівноваги

Для знаходження положень відносної рівноваги скористаємось спостереженням $\vec{c} \cdot \vec{x}_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma} = \text{const}$. Тобто кожен вихор рухається по поверхні конуса, центральна вісь якого паралельна вектору \vec{c} . Оскільки кожна сторона трикутника, побудованого на вихорах, має фіксовану величину, бачимо, що кожне положення відносної рівноваги описується однією частотою $\dot{\phi} = \omega$ (частота обертання навколо вектора \vec{c}).

Опис можливих положень відносної рівноваги міститься у твердженнях:

- Усі вироджені положення відносної рівноваги лежать на великому колі і задовольняють співвідношенням

$$\frac{\Gamma_1}{\sin(2\alpha_1)} = \frac{\Gamma_2}{\sin(2\alpha_2)} = \frac{\Gamma_3}{\sin(2\alpha_3)}.$$

Вихори обертаються навколо фіксованого вектора:

$$\vec{x} = - \left(\frac{\Gamma_1 \vec{x}_1(0)}{2\pi l_{23}^2} + \frac{\Gamma_2 \vec{x}_2(0)}{2\pi l_{31}^2} + \frac{\Gamma_3 \vec{x}_3(0)}{2\pi l_{12}^2} \right) \quad (16)$$

з частотою

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{\Gamma_1}{l_{23}^2} + \frac{\Gamma_2}{l_{31}^2} + \frac{\Gamma_3}{l_{12}^2} \right) - \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 l_{12}^2 + \Gamma_2 \Gamma_3 l_{23}^2 + \Gamma_1 \Gamma_3 l_{13}^2}{l_{12}^2 l_{23}^2 l_{31}^2} \right]. \quad (17)$$

- Невироджені положення відносної рівноваги ($\vec{c} \neq 0$) обертаються навколо вектора \vec{c} з частотою

$$\omega = \frac{\|\vec{M}\| A}{2\pi l_{12}^2 l_{31}^2 B}, \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} A &= l_{12}^2 l_{31}^2 [\Gamma_2^2 (4 - l_{12}^2) + \\ &\quad + \Gamma_2 \Gamma_3 (4 - l_{12}^2 - l_{31}^2) + \Gamma_3^2 (4 - l_{31}^2)] + \\ &\quad + 2\Gamma_2 \Gamma_3 [l_{12}^2 (l_{12}^2 - l_{23}^2) + l_{31}^2 (l_{31}^2 - l_{23}^2)], \\ B &= (\Gamma_2 l_{12}^2 + \Gamma_3 l_{31}^2) [\Gamma_2 (4 - l_{12}^2) + \\ &\quad + \Gamma_3 (4 - l_{31}^2)] - 4\Gamma_2 \Gamma_3 l_{23}^2. \end{aligned}$$

Всі такі положення рівноваги можна поділити на дві категорії:

- Вихори лежать у вершинах правильного трикутника, але не лежать на великому колі. Частота обертання (18) може бути записана у формі

$$\omega = \frac{1}{2\pi s^2} [\Gamma^2 - 3h\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 s^2]^{1/2}. \quad (19)$$

Вектор нормалі до площини трикутника \vec{n} у загальному випадку ні паралельний до \vec{c} , ні перпендикулярний до \vec{c} . У випадку, коли $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$, вектор нормалі паралельний до \vec{c} , і це положення є підрадіальним. Якщо ж $\Gamma = 0$, то вектор нормалі перпендикулярний до \vec{M} і положення є надрадіальним.

- Вихори лежать на великому колі, але утворюють трикутник довільної форми. Сторони трикутника і інтенсивності вихорів повинні задовольняти співвідношенням

$$V(0) = 2(l_{12}^2 l_{23}^2 + l_{23}^2 l_{31}^2 + l_{31}^2 l_{12}^2) - (l_{12}^4 + l_{23}^4 + l_{31}^4) - l_{12}^2 l_{23}^2 l_{31}^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(0) &= \frac{1}{8\pi} \left[2 \sum_{i,j,k} \frac{l_{ij}^2 - l_{jk}^2}{l_{ki}^2} (\Gamma_i + \Gamma_k) - \sum_{i,j} l_{ij}^2 (\Gamma_i - \Gamma_j) \right] = 0. \end{aligned}$$

Вектор нормалі до площини трикутника перпендикулярний до \vec{c} .

Щоб довести перше твердження, використаємо

$$\vec{c} = 0, \quad \Rightarrow \quad \Gamma_1 \vec{x}_1 + \Gamma_2 \vec{x}_2 + \Gamma_3 \vec{x}_3 = 0.$$

Домноживши скалярно цю рівність на $\vec{x}_i, i = 1, 2, 3$, отримаємо

$$\begin{aligned} \Gamma_2 l_{12}^2 + \Gamma_3 l_{31}^2 &= \Gamma_3 l_{23}^2 + \Gamma_1 l_{12}^2 = \\ &= \Gamma_1 l_{31}^2 + \Gamma_2 l_{23}^2 = 2\Gamma. \end{aligned} \quad (20)$$

З одержаних співвідношень ми можемо записати Γ_2 та Γ_3 в термінах Γ_1 та l_{ij} :

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \Gamma_1 \frac{l_{31}^2 (l_{13}^2 + l_{23}^2 - l_{31}^2)}{l_{23}^2 (l_{31}^2 + l_{12}^2 - l_{23}^2)}, \\ \Gamma_3 &= \Gamma_1 \frac{l_{12}^2 (l_{23}^2 + l_{31}^2 - l_{12}^2)}{l_{23}^2 (l_{31}^2 + l_{12}^2 - l_{23}^2)}. \end{aligned}$$

Застосовуючи теореми синусів та косинусів, останні співвідношення можна представити у вигляді

$$\frac{\Gamma_1}{\sin(2\alpha_1)} = \frac{\Gamma_2}{\sin(2\alpha_2)} = \frac{\Gamma_3}{\sin(2\alpha_3)}.$$

Щоб отримати вирази для \vec{x} та ω , скористаємось одним із рівнянь руху

$$\dot{\vec{x}}_1 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\Gamma_2 \vec{x}_2 \times \vec{x}_1}{l_{12}^2} + \frac{\Gamma_3 \vec{x}_3 \times \vec{x}_1}{l_{31}^2} \right].$$

Користуючись рівностями (20) і тим фактом, що вихори знаходяться у положенні відносної рівноваги, отримаємо

$$\dot{\vec{x}}_1 = \frac{\Gamma_2 \vec{x}_2 \times \vec{x}_1}{2\pi} \left(\frac{1}{l_{12}^2} - \frac{1}{l_{31}^2} \right) = k_1 (\vec{x}_2 \times \vec{x}_1). \quad (21)$$

Аналогічним чином можна одержати

$$\dot{\vec{x}}_2 = k_2(\vec{x}_1 \times \vec{x}_2). \quad (22)$$

Домноживши тепер рівняння (21) на k_2 , а рівняння (22) на k_1 і склавши ці добутки, отримаємо

$$k_2\vec{x}_1 + k_1\vec{x}_2 \equiv \vec{x} = \text{const.}$$

Тоді $\dot{\vec{x}}_1 = \vec{x} \times \vec{x}_1$, звідки витікають співвідношення (16), (17).

Для доведення другого твердження використаємо той факт, що кожен вихор рухається на фіксованій широті і обертається навколо вектора \vec{c} з постійною кутовою швидкістю. Звичайно, якщо вихор розташований на осі обертання, він знаходиться у фіксованій точці, і кутова швидкість для нього невизначена. Оскільки у положенні відносно рівноваги кутова швидкість обертання однакова для всіх вихорів, співвідношення (18) можна отримати з рівняння руху у сферичних координатах (16) та з співвідношень

$$\cos(\theta_i) = \frac{\Gamma}{\|\vec{M}\|} - \frac{C_1 - \Gamma_j \Gamma_k l_{jk}^2}{2\|\vec{M}\|\Gamma_i}, \quad (23)$$

$$\cos(\phi_i - \phi_j) = \frac{1 - \cos(\theta_i) \cos(\theta_j) - l_{ij}^2/2}{\sin(\theta_i) \sin(\theta_j)}.$$

Поділ на категорії слідує з рівнянь руху (10) і відповідає випадкам, коли $V \neq 0$ та $V = 0$. Положення відносно рівноваги будуть фіксованими точками у цих рівняннях.

Якщо $V \neq 0$, тоді з рівностей (10) слідує, що $l_{12} = l_{23} = l_{31} = s$ і з співвідношення (18) легко отримувється вираз для кутової швидкості (19). Оскільки $\vec{n} \cdot \vec{c} = V \neq 0$, у загальному випадку бачимо, що \vec{n} та \vec{c} не перпендикулярні і можуть мати довільний кут між собою. У випадку, коли $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$, із формули (13) для \vec{n} ми бачимо, що $\dot{\vec{n}} = 0$. Тобто $\vec{n} = \text{const}$. Оскільки $\vec{c} = \text{const}$ та $\vec{x}_i \cdot \vec{c} = \text{const}$, то для виконання цих умов \vec{x}_i повинен описувати конус навколо обох векторів \vec{n} та \vec{c} . Це можливо тільки, коли вони паралельні. Якщо ж $\Gamma = 0$, то $\vec{n} \cdot \vec{M} = \Gamma V = 0$, звідки виходить, що \vec{n} та \vec{M} – перпендикулярні. Частота обертання в цьому випадку буде рівною

$$\omega = \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3)^{1/2}}{2\sqrt{2}\pi s}.$$

Випадок $V = 0$ описує всі положення відносно рівноваги, розташовані на великому колі. Незавжди переконались, що $V \equiv 0$, якщо $V(0) = 0$ та $\dot{V}(0) = 0$. Для цього достатньо продиференціювати $V(t)$ у формулі (11) та використати метод індукції.

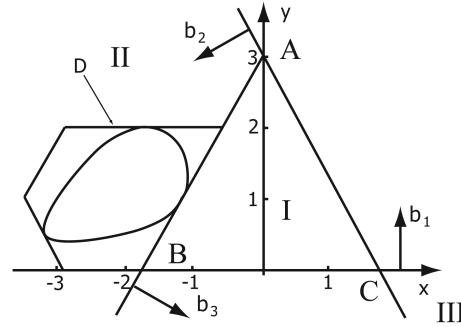


Рис. 6. Трилінійні координати на фазовій площині

2.3. Динаміка вихорів на фазовій площині

Фазовий простір динамічної системи (10) є тривмірним. Але його розмірність може бути понижена, якщо використати перший інваріант C_1 . По аналогії з плоским випадком [25] введемо нові змінні

$$\begin{aligned} b_1 &= 3l_{23}^2 \frac{\Gamma_2 \Gamma_3}{C_1}, \\ b_2 &= 3l_{31}^2 \frac{\Gamma_3 \Gamma_1}{C_1}, \\ b_3 &= 3l_{12}^2 \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{C_1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Тоді з визначення C_1 маємо

$$b_1 + b_2 + b_3 = 3. \quad (25)$$

Припустимо спочатку, що $C_1 \neq 0$. Випадок $C_1 = 0$ детально досліджений у наступному розділі. Для аналізу динаміки руху вихорів у фазовій площині скористаємось трилінійними координатами b_1, b_2, b_3 , які зображені на рис. 6. Висота трикутника дорівнює 3, тому співвідношення (25) тождно виконуються для довільної точки фазової площини. Зв'язок між трилінійними координатами b_1, b_2, b_3 та декартовими координатами x, y задається співвідношеннями

$$\begin{aligned} b_1 &= y, \\ b_2 &= \frac{1}{2}(3 - y - \sqrt{3}x), \\ b_3 &= \frac{1}{2}(3 - y + \sqrt{3}x). \end{aligned}$$

Інваріант C_2 в термінах b_1, b_2, b_3 можна записати у вигляді

$$f(b_1, b_2, b_3) = |b_1|^{1/\Gamma_1} |b_2|^{1/\Gamma_2} |b_3|^{1/\Gamma_3}. \quad (26)$$

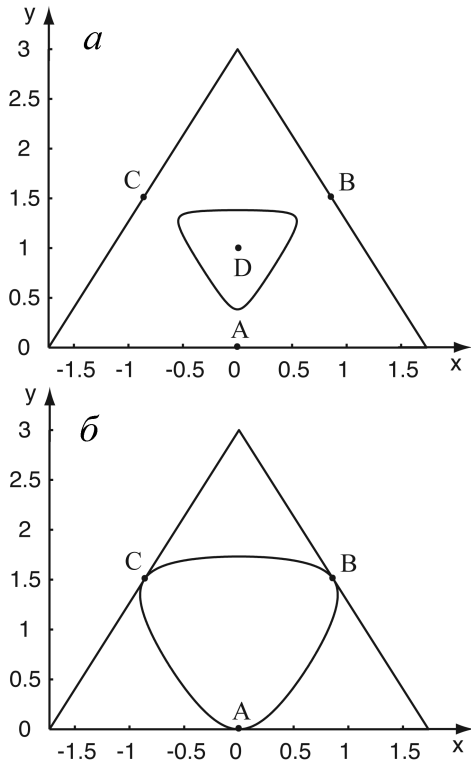


Рис. 7. Фізична область на фазовій площині.
 $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$:

a – фізична область для двох випадків: $C_1 = 9$ – фізична область вироджена до чотирьох ізольованих точок A, B, C та D; $C_1 = 8.5$ – фізична область – внутрішність кривої, плюс ізольовані точки A, B, C; *б* – $C_1 = 6$ – фізична область обмежена однією кривою

Лінії $f(b_1, b_2, b_3) = k$, де $k = \text{const}$, називаються фазовими лініями. Ці рівняння співпадають з рівняннями для фазових ліній, які були отримані для плоского випадку у [24]. В декартових координатах інваріант (26) прийме вигляд

$$H(x, y) = \frac{1}{\Gamma_1} \ln |y| + \frac{1}{\Gamma_2} \ln \frac{|3 - y - \sqrt{3}x|}{2} + \frac{1}{\Gamma_3} \ln \frac{|3 - y + \sqrt{3}x|}{2} = \text{const}.$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатись, що в декартових координатах

$$y = b_1, \quad x = (b_3 - b_2)/\sqrt{3},$$

рівняння руху можна записати у формі Гамільтона

$$\dot{x} = \frac{6\sqrt{3}g^6 V(x, y)}{\pi RC_1^2} \frac{\partial H}{\partial y},$$

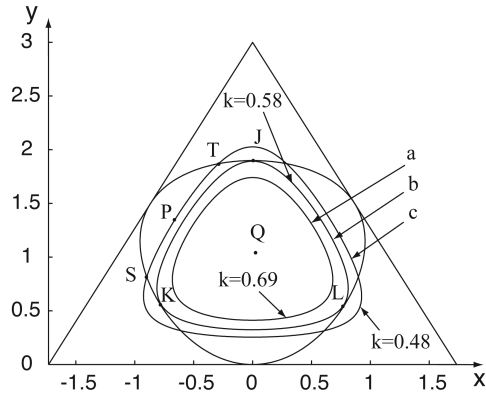


Рис. 8. Фазовий портрет для $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1, C_1 = 3$

$$\dot{y} = -\frac{6\sqrt{3}g^6 V(x, y)}{\pi RC_1^2} \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (27)$$

Оскільки сфера є компактом, можливі рухи, зображені на фазовій площині, також будуть обмеженими. Дійсно, максимальне значення l_{ij} на одичній сфері рівне 2, тому b_i приймають значення в інтервалі $(0, 12\Gamma_j\Gamma_k/C_1)$. Це означає, що область припустимих значень на фазовій площині являє собою внутрішню область багатокутника D , який може мати від 3 до 6 сторін, у залежності від значень $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ та C_1 . Як приклад такої області, на рис. 6 зображено п'ятикутну область, яка відповідає $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \frac{1}{2}, \Gamma_3 = -1$ та $C_1 = -3$. Навіть всередині області D фізично допустимі значення, обмежені нерівністю $V^2 \geq 0$. Границя такої області задається рівністю $V = 0$ і в термінах змінних b_1, b_2, b_3 може бути записана

$$3V_p - b_1 b_2 b_3 C_1 = 0, \quad (28)$$

де $V_p = [2(\Gamma_1\Gamma_2 b_1 b_2 + \Gamma_2\Gamma_3 b_2 b_3 + \Gamma_3\Gamma_1 b_3 b_1) - (\Gamma_1 b_1)^2 - (\Gamma_2 b_2)^2 - (\Gamma_3 b_3)^2]$.

У плоскому випадку [24] рівняння (28) приймає простішу форму $V_p = 0$. Тобто границя фізичної області у плоскому випадку виражена лише в термінах інтенсивностей. На відміну від зазначеного плоского випадку, якщо вихори рухаються на поверхні сфери, границя фізичної області залежить від C_1 . На рис. 7 зображено границі фізичних областей для трьох різних значень C_1 при $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$. Як можна бачити, для деяких значень C_1 фізична область звужується до ізольованих точок, що неможливо у плоскому випадку.

Оскільки V може приймати як позитивні, так і негативні значення під час руху вихорів, фазова площина може бути представлена як двостороння з позитивними значеннями спереду і негатив-

ними ззаду. Обидві сторони об'єднані вздовж границі фізичної області. Тоді система під час руху по фазовій площині при досягненні границі фізичної області переходить на протилежну сторону.

Із співвідношень (27) можна отримати вирази для \dot{V} :

$$\dot{V} = \frac{3\sqrt{3}g^6}{\pi RC_1^2} \left(\frac{\partial V^2}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial V^2}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \right). \quad (29)$$

З останнього співвідношення видно, що $\dot{V} = 0$ в точках, де криві $V^2 = \text{const}$ та $H = \text{const}$ дотикаються. Використовуючи наведені вище спостереження, можемо сформулювати твердження, в яких співставимо точки на фазовій площині зі знайденими раніше положеннями рівноваги:

1. Фіксовані положення рівноваги відповідають точкам P на фазовій площині з координатами

$$b_1 = \frac{3\Gamma_2\Gamma_3(\Gamma_2 + \Gamma_3)}{\sum_{i < j} \Gamma_i\Gamma_j(\Gamma_i + \Gamma_j)},$$

$$b_2 = \frac{3\Gamma_3\Gamma_1(\Gamma_3 + \Gamma_1)}{\sum_{i < j} \Gamma_i\Gamma_j(\Gamma_i + \Gamma_j)},$$

$$b_3 = \frac{3\Gamma_1\Gamma_2(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{\sum_{i < j} \Gamma_i\Gamma_j(\Gamma_i + \Gamma_j)},$$

з

$$C_1 = \frac{12\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3h \left[\sum_{i < j} \Gamma_i\Gamma_j(\Gamma_i + \Gamma_j) \right]}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_2 + \Gamma_3)(\Gamma_3 + \Gamma_1)}.$$

2. Вироджені положення відносної рівноваги знаходяться в точках U з координатами

$$b_1 = \frac{3(\Gamma_2 + \Gamma_3 - \Gamma_1)}{\Gamma},$$

$$b_2 = \frac{3(\Gamma_3 + \Gamma_1 - \Gamma_2)}{\Gamma},$$

$$b_3 = \frac{3(\Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3)}{\Gamma},$$

з $C_1 = \Gamma^2$.

3. Невироджені положення відносної рівноваги описуються двома точками Q та S :

- Q – точки, які відповідають правильним трикутним конфігураціям, з трилінійними координатами

$$Q = \left(\frac{1}{\Gamma_1 h}, \frac{1}{\Gamma_2 h}, \frac{1}{\Gamma_3 h} \right).$$

- S – точки, в яких границя фізичної області дотикається до кривих $H = \text{const}$.

Трилінійні координати точок P знайдено після підстановки виразів (24) у рівності (15). Як було показано вище, для фіксованих положень рівноваги $V = 0$. Підставивши у V значення b_1, b_2, b_3 , з формул (30), можна отримати співвідношення для C_1 . У випадку, коли $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$, точка P є виродженим положенням рівноваги.

Трилінійні координати точки U отримано за допомогою підстановки виразів (24) у рівності (20). C_1 знайдено з $\vec{c} = 0$. З рівності сторін у рівносторонньому трикутнику можна знайти координати точки Q .

Зазначимо, що точка Q є максимумом для функції $f(b_1, b_2, b_3)$ у випадках $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 > 0$ та $\Gamma_1, \Gamma_2 > 0, \Gamma_3 < 0, h < 0$. Для $\Gamma_1, \Gamma_2 > 0, \Gamma_3 < 0, h > 0$ Q є сідловою точкою і криві $f(b_1, b_2, b_3) = k$ незамкнені.

Оскільки для невивірджених положень відносної рівноваги, які лежать на великому колі, $V = 0$ та $\dot{V} = 0$, результат другої частини твердження 3 витікає із співвідношення (29).

Проаналізуємо тепер відносний рух вихорів на сфері. Розглянемо спочатку випадок $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 > 0$. Із визначення (12) отримаємо $C_1 > 0$. Тому $|\vec{c}| < R$, тобто рух є підрадіальним. З означень (24) бачимо, що $b_i > 0$, тобто область на фазовій площині, що відповідає даному рухові, знаходиться всередині трикутника. Точка Q є глобальним максимумом функції $f(b_1, b_2, b_3)$, тому всі фазові криві замкнені навколо Q . Детальне зображення даного руху при $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$ та $C_1 = 3$ наведено на рис. 8. Три фазові криві a, b та c зображають різні режими руху трьох вихорів на сфері. Крива a лежить повністю всередині фізичної області, тому $V \neq 0$ для довільного моменту часу. Це означає, що вихори ніколи не лежать на великому колі і не змінюють взаємну орієнтацію. Крива b дотикається до границі фізичної області в точках J, K та L . Як було вказано вище, ці точки представляють собою положення відносної рівноваги. Всі початкові положення, які знаходяться на кривій b , прямують до цих положень рівноваги. Крива c перетинає границю фізичної області. Розглянемо рух точки P вздовж кривої c . Через деякий час точка досягне границі фізичної області і перетне її або в точці S , або в точці T . Щоб дізнатись, через яку із них пройде система, потрібно знати знак V в початковий момент часу. Після перетину границі фізичної області точка P буде надалі рухатись вздовж кривої c у тому ж напрямку, доки знову не перетне границю фізичної області.

Подальший розвиток системи приведе точку P у початкове положення. Як ми бачимо, система буде мати періодичну природу розвитку.

Описаний рух будемо спостерігати для довільних $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 > 0$, але для різних значень інтенсивності будемо мати менш симетричні криві.

При $\Gamma_1, \Gamma_2 > 0, \Gamma_3 < 0$ потрібно розрізнати два випадки: $C_1 = 0$ та $C_1 \neq 0$. Перший випадок буде розглянуто у слідуючому розділі. У другому система буде рухатись в межах областей II та III (рис. 6). Якщо $h < 0$, Q є точкою максимуму для функції f . В області III цей максимум буде глобальним і характер руху системи буде аналогічним тому, що описано вище. В області II фазові криві повинні проходити через точки A та B , а оскільки $V = 0$ ніколи через них не проходить, бачимо що фазові криві повинні або перетинатись, або дотикатись до границі області. Ці випадки аналогічні рухам вздовж кривих b та c , які описані вище. Якщо $h > 0$, тоді Q є сідловою точкою і фазові криві є незамкненими. Характер цих рухів буде аналогічним тим, які спостерігаються на площині з урахуванням того, що границя допустимих значень є обмеженою областю.

2.4. Зіткнення вихорів на сфері

Дослідимо можливість самоподібного зіткнення вихорів на сфері. Як і у плоскому випадку [24, 26, 27], самоподібне зіткнення – це коли $l_{ij} \rightarrow 0$ за скінчений час і відношення відстаней між вихорами не змінюється. Оскільки в момент зіткнення $l_{ij} = 0$, перший інваріант C_1 повинен бути рівним нулю ($C_1 = 0$). Це означає, що знаки інтенсивностей вихорів не можуть бути однаковими, тобто маємо $\Gamma_1, \Gamma_2 > 0, \Gamma_3 < 0$.

Допустимо, що відношення відстаней між вихорами залишаються константами, тобто

$$l_{12}^2 = \lambda_1 l_{31}^2, \quad l_{23}^2 = \lambda_2 l_{31}^2, \quad (30)$$

де

$$\lambda_1 = \left(\frac{l_{12}(0)}{l_{31}(0)} \right)^2, \quad \lambda_2 = \left(\frac{l_{23}(0)}{l_{31}(0)} \right)^2.$$

Підставивши вирази (30) у другий інваріант C_2 , отримаємо

$$(l_{31}^2(t))^h = \text{const.}$$

Звідки слідує, що

$$h = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\Gamma_i} = 0.$$

Для визначення моменту зіткнення скористаємось рівняннями руху (10), які після підстановки вира-

зів (30) приймуть вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(l_{31}^2) &= \frac{\Gamma_1}{\pi} \left(\frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 \lambda_2} \right) \frac{V}{l_{31}^2} = \\ &= \frac{\Gamma_2}{\pi} \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) \frac{V}{l_{31}^2} = \\ &= \frac{\Gamma_3}{\pi} \left(\frac{1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) \frac{V}{l_{31}^2}. \end{aligned}$$

Як бачимо, для того щоб відбулось зіткнення, повинні виконуватись співвідношення

$$\Gamma_1(\lambda_1 - 1) = \Gamma_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \Gamma_3(1 - \lambda_2).$$

Знайдемо тепер, який вигляд має $l_{31}(t)$. Використавши формулу для V , можна отримати рівняння

$$\frac{d}{dt}(l_{31}^2) = \pm \omega (1 - \rho l_{31}^2)^{1/2}, \quad (31)$$

де

$$\rho = \lambda_1 \lambda_2 / \gamma,$$

$$\omega = \frac{\Gamma_2}{2\pi} \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) \sqrt{\gamma},$$

$$\gamma = 2(\lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 1.$$

Знак \pm відповідає додатнім та від'ємним початковим значенням об'єму V . Розв'язком рівняння (31) є функція

$$l_{31}^2(t) = l_{31}^2(0) \pm \alpha \omega t - \frac{\rho \omega^2}{4} t^2,$$

де $\alpha = \sqrt{1 - \rho l_{31}^2(0)}$.

Оскільки коефіцієнт

$$\frac{\rho \omega^2}{4} = \frac{\Gamma_2^2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2}{16\pi^2 (\lambda_1 \lambda_2)} > 0,$$

тому функція $l_{31}^2(t)$ має два нулі: один додатній, другий від'ємний. Позначимо додатній час зіткнення τ^\pm (де \pm відповідає додатньому та від'ємному значенню $V(0)$ відповідно). Неважко переконатись, що від'ємний час зіткнення – це $-\tau^\pm$. Після простих алгебраїчних перетворень отримаємо формули для l_{ij} :

$$l_{ij}(t) = l_{ij}(0) \left(1 + \frac{t}{\tau^\pm} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{t}{\tau^\pm} \right)^{1/2},$$

де

$$\tau^\pm = \frac{4\pi\sqrt{\gamma}}{\Gamma_2|\lambda_1 - \lambda_2|} (1 \pm \alpha) > 0.$$

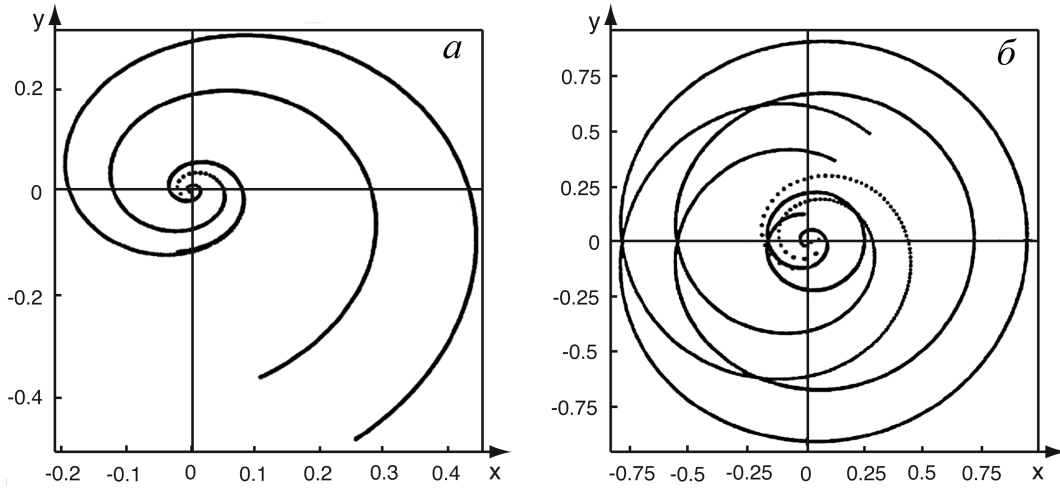


Рис. 9. Зіткнення вихорів: $a - V(0) > 0$; $b - V(0) < 0$

Якщо вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ формують праву трійку векторів, то зіткнення вихорів відбудеться через час τ^+ . У випадку лівої трійки зіткнення відбудеться через час τ^- . Тобто, щоб із конфігурації вихорів, яка зіткнеться у момент часу τ^+ , отримати конфігурацію, яка зіткнеться у момент часу τ^- , достатньо у першій зробити антициклічну перестановку вихорів.

Для більш детального порівняння з плоским випадком, розглянемо асимптотичний розклад в околі τ^\pm :

$$l_{ij}(t) \sim A \left(1 - \frac{t}{\tau^\pm}\right)^{1/2} + B \left(1 - \frac{t}{\tau^\pm}\right)^{3/2} + O\left(\left(1 - \frac{t}{\tau^\pm}\right)^{5/2}\right), \quad (32)$$

де

$$A = l_{ij}(0) \sqrt{1 + \frac{1 \pm \alpha}{1 \mp \alpha}},$$

$$B = -l_{ij}(0) \Gamma_2 |\lambda_1 - \lambda_2| \frac{\tau^\pm}{8\pi\sqrt{\gamma}} \sqrt{1 + \frac{1 \pm \alpha}{1 \mp \alpha}}.$$

Головна частина представлення (32) з точністю до коефіцієнта повністю співпадає з плоским випадком [24]. Доданки вищого порядку відображають різницю в геометрії сфери та площини.

Оскільки на сфері орієнтація трикутника, утвореного вихорами, може змінюватись вздовж траєкторії руху, в загальному випадку $\dot{\phi}_1 \neq \dot{\phi}_2 \neq \dot{\phi}_3$, тобто різні вихори рухаються з різними частотами. Зазначимо, що у плоскому випадку трикутник

самоподібним чином стягується в точку, тобто всі вихори рухаються з однаковою кутовою швидкістю

$$\omega_p = \dot{\phi}_i = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{\Gamma_i + \Gamma_j}{l_{ij}^2}.$$

Формули для кутових швидкостей ($\omega_i = \dot{\phi}_i$) можна записати у вигляді

$$\omega_i = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\Gamma_j}{l_{ij}^2} \cos(\theta_j) + \frac{\Gamma_k}{l_{ik}^2} \cos(\theta_k) - \frac{\Gamma_j}{l_{ij}^2} \operatorname{ctg}(\theta_i) \sin(\theta_j) \cos(\phi_i - \phi_j) - \frac{\Gamma_k}{l_{ki}^2} \operatorname{ctg}(\theta_i) \sin(\theta_k) \cos(\phi_k - \phi_i) \right],$$

де $i \neq j \neq k$. Використавши рівності (23), отримаємо

$$\omega_i = \frac{\omega_p - (\Gamma_j + \Gamma_k)/(8\pi)}{1 + (\Gamma_j \Gamma_k l_{jk}^2(t))/(4\Gamma_i \Gamma)}, \quad (33)$$

де $i \neq j \neq k$. Проінтегрувавши рівняння (33), отримаємо співвідношення для $\phi_i(t)$:

$$\phi_i(t) = D_i \ln \left(\frac{\tau^\mp + t}{\tau^\pm - t} \right) + B_i \arctan(\gamma_i t + \delta_i),$$

де

$$D_i = \frac{A_i}{l_{jk}^2(0)} \frac{\tau^+ \tau^-}{\tau^+ + \tau^-},$$

$$A_1 = \frac{1}{\Gamma_2(1 + \lambda)} A_3, \quad A_2 = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\lambda}{1 + \lambda} A_3,$$

$$A_3 = \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^3 + \Gamma_1^3(1 + 1/\lambda) + \Gamma_2^3(1 + \lambda)}{4\pi(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2},$$

$$B_i = \frac{(A_i \alpha_i + \beta_i) \tau^+ \tau^- \gamma_i}{\alpha_i l_{jk}^2(0)},$$

$$\alpha_i = \frac{\Gamma_j \Gamma_k}{4\Gamma_i} \frac{1}{\Gamma}, \quad \beta_i = \frac{\Gamma_j + \Gamma_k}{8\pi},$$

$$\gamma_i = \left[-\frac{(\tau^+ + \tau^-)^2}{4} - \frac{\tau^+ \tau^-}{\alpha_i l_{jk}^2(0)} \right]^{-1/2},$$

$$\delta_i = \frac{(\tau^{\mp} - \tau^{\pm}) \gamma_i}{2}, \quad \lambda = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \lambda_2.$$

На рис. 9 зображено траєкторії, вздовж яких рухаються вихори при наближенні до точки зіткнення ($\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$, $\Gamma_3 = -\frac{1}{2}$).

ВИСНОВКИ

Таким чином, картина руху трьох точкових вихорів на поверхні сфери має свої особливості в порівнянні з рухом на площині. Зокрема, у випадку самоподібного зіткнення точкових вихорів на сфері супутня конфігурація вихорів буде також приводити до зіткнення в діаметрально протилежній точці (на площині супутня конфігурація приводить до нескінченного розходження трьох вихорів). Також на відміну від плоского випадку при зіткненні вихорів кожен із них буде рухатись зі своєю, відмінною від інших, кутовою швидкістю.

Через те, що сфера є компактом, на ній існують додаткові положення рівноваги трьох точкових вихорів, яких немає у плоскому випадку. Поява цих додаткових положень рівноваги відповідає існуванню вироджених (точкових) форм фізичних областей на фазовій площині.

Завдяки збереженню центра завихреності усі можливі рухи точкових вихорів на площині можна класифікувати в залежності від відносного розташування центру завихреності та сфери. Приведена у статті класифікація показує, що можливі п'ять відмінних випадків руху точкових вихорів на сфері.

1. Helmholtz H. Über Integrale hydrodinamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. Reine Angew. Math.– 1858.– 55.– S. 25–55.
2. Meleshko V. V., Aref H. A Bibliography of Vortex Dynamics 1858-1956 // Adv. in applied mech.– 2007.– 41.– P. 197–292.
3. Мелешко В. В., Константинов М. Ю. Динамика вихревых структур.– Киев: Наук. думка, 1993.– 283 с.

4. Newton P. K. The N-Vortex problem. Analytical Techniques.– New York: Springer, 2001.– 432 p.
5. Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур.– М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.– 368 с.
6. Вилля А. Теория вихрей.– М.-Л.: ОНТИ, 1936.– 266 с.
7. Сэффмэн Ф. Дж. Динамика вихрей.– М.: Научный мир, 2000.– 376 с.
8. Пуанкаре А. Теория вихрей.– Ижевск: Изд. РХД, 2001.– 160 с.
9. Козлов В. В. Общая теория вихрей.– Ижевск: Изд. Удмур. универ., 1998.– 238 с.
10. Алексеевко С. В., Куйбин П. А., Окулов В. Л. Введение в теорию концентрированных вихрей.– Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 2003.– 504 с.
11. Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике.– М.: АН СССР, 1962.– 403 с.
12. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред.– М.: ИЛ, 1954.– 486 с.
13. Громека И. С. О вихревых движениях жидкости на сфере. Собрание протоколов заседания секции физ.-мат. общества естествоиспытателей при Казанском университете. // В кн. Громека И. С. Собр. соч.– М.: АН СССР, 1952.– 295 с.
14. Васильев О. Ф. Об одной забытой работе И. С. Громеки // Прикл. матем. мех.– 1951.– 15.– С. 261–263.
15. Zermelo E. Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegung in einer Kugeläche // Z. Math. Phys.– 1902.– 47.– S. 201–237.
16. Богомолов В. А. Динамика завихренности на сфере // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа.– 1977.– 6.– С. 57–65.
17. Kimura Y., Okamoto H. Vortex motion on a sphere // J. Phys. Soc. Japan.– 1987.– 56(12).– P. 4203–4206.
18. Kimura Y. Vortex motion on surfaces with constant curvature // Proc. R. Soc. London.– 1999, A 455.– P. 245–259.
19. Borisov A. V., Lebedev V. G. Dynamics of three vortices on a Plane and a Sphere. II. General compact case // Regular Chaotic Dyn.– 1998.– vol. 3, no. 2.– P. 99–114.
20. Borisov A. V., Lebedev V. G. Dynamics of three vortices on a Plane and a Sphere. III. General compact case // Regular Chaotic Dyn.– 1998.– vol. 3, no. 4.– P. 76–90.
21. Борисов А. В., Газизуллина Л. А., Рамоданов С. М. Диссертация Э. Цермело о вихревой гидродинамике на сфере // Нелинейная динамика.– 2008.– vol. 4, no. 4.– С. 497–513.
22. Островський В. В., Мелешко В. В. Динаміка точкових вихорів на сфері // Вісник КУ.– 2007.– 3.– С. 23–28.
23. Островський В. В. Рух рідини у полі пари вихорів на нерухомій сфері // Вісник КУ.– 2008.– 4.– С. 22–26.
24. Aref H. Motion of three vortices // Phys. Fluids.– 1979.– 22(3).– P. 393–400.
25. Synge J. L. On the motion of three vortices // Can. J. Math.– 1949.– 1.– P. 257–270.
26. Kidambi R., Newton P. K. Motion of three point vortices on a sphere // Physica D.– 1998.– 116.– P. 143–175.
27. Kidambi R., Newton P. K. Collision of three vortices on a sphere // Il Nuovo Cimento.– vol. 22, no. C(6).– 1999.– P. 779–791.