

УДК 539.3

# КЛАССИФИКАЦИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ДВУХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВИХРЕВЫХ КОЛЕЦ ДАЙСОНА В БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

А. А. ГУРЖИЙ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев, Украина**Получено 11.01.2009*

Рассматривается задача о взаимодействии системы осесимметричных вихревых колец внутри бесконечной цилиндрической поверхности (трубы), заполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Уравнения движения вихрей имеет гамильтонову структуру и два независимых инварианта движения, выражающих закон сохранения импульса вдоль оси движения и закон сохранения кинетической энергии движения колец. Исследования показывают, что два вихревых кольца могут образовывать стационарную структуру, которая движется с постоянной осевой скоростью вдоль трубы. В случае одинаковых по знаку интенсивностей вихрей кольца могут участвовать в разовом и периодическом взаимодействиях. Сформирована система нелинейных уравнений, которая позволяет определить область допустимых начальных параметров вихрей для периодического движения. Вихревые кольца с противоположными по знаку интенсивностями также могут двигаться по периодическим траекториям. Построены области начальных параметров вихревых колец для каждого из возможных типов движения двух осесимметричных вихрей с противоположными по знаку интенсивностями в круглой трубе, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью.

Розглядається задача про взаємодію системи вісесиметричних вихрових кілець всередині нескінченної циліндричної поверхні (труби), заповненої ідеальною нестисливою рідиною. Рівняння руху вихорів має гамильтонову структуру і два незалежні інваріанти руху, які виражають закон збереження імпульсу уздовж осі руху і закон збереження кінетичної енергії руху кілець. Дослідження показують, що два вихрові кільця можуть утворювати стаціонарну структуру, яка рухається з постійною осьовою швидкістю уздовж труби. У разі однакових по знаку інтенсивностей вихорів кільця можуть брати участь у разовій і періодичній взаємодії. Сформовано систему нелінійних рівнянь, яка дозволяє визначити область допустимих початкових параметрів вихорів для періодичного руху. Вихрові кільця з протилежними по знаку інтенсивностями так само можуть рухатись по періодичних траєкторіях. Побудовано області початкових параметрів вихрових кілець для кожного з можливих типів руху двох осесиметричних вихорів з протилежними по знаку інтенсивностями в круглій трубці, заповненій ідеальною нестисливою рідиною.

The problem on interaction of the system of axisymmetrical vortex rings inside an unbounded cylindrical surface (pipes) filled by an ideal incompressible fluid is considered. Equations of motion of vortices have Hamiltonian structure and two independent invariants of motion, which express the law of impulse conservation along the axis of motion and the law of kinetic energy conservation of ring motion. Researches show that two vortex rings can form a stationary structure which moves with fixed axial velocity along the axis of symmetry. In the case of vortex intensities, which are identical on a sign, rings can participate in single interaction and periodic motion. The system of nonlinear equations, which allows define the region of possible initial parameters of vortices for periodic motion, is formed. Vortex rings with opposite sign of intensities also can move by periodic trajectories. The regions of initial parameters of vortex rings for each of possible types of motion for two axisymmetric vortices with opposite sign of intensities inside a circular pipe filled by an ideal incompressible fluid are drawn.

## ВВЕДЕНИЕ

Вихревая динамика представляет собой одно из наиболее интенсивно развиваемых направлений современной гидромеханики. Повышенный интерес к этой тематике можно объяснить стремлением многих исследователей к более глубокому осознанию природы различных гидродинамических явлений на основе более общих законов и закономерностей, обусловленных внутренними процессами в сплошной среде. Вихревые структуры, формирующиеся в областях с большими градиентами проекций поля скорости, сопровождают различные течения вязкой жидкости. Элементарная частица жидкости, участвующая в вихревом движении, обладает большим по сравнению с потенци-

альным течением числом степеней свободы и, как результат, большим значением объемной плотности энергии. Вихри описаны различными авторами как "мускулы и источник звука" различных течений. Диссипация энергии крупномасштабных вихревых структур по каскаду волновых чисел может приводить к появлению вихрей меньшего масштаба. Это один из путей формирования турбулентности [1, 2].

Основополагающей в этом научном направлении явилась работа Гельмгольца [3], в которой были сформулированы основные законы (теоремы) для вихревого движения в рамках модели идеальной жидкости при условии потенциальности внешних массовых сил и несжимаемости однородной жидкости. Применительно к осесимметричным задачам о движении системы вихревых

колец в безграничной жидкости эти теоремы позволили сделать важные выводы о закономерностях их движения. Вихревые кольца участвуют в движении в рамках модели идеальной жидкости неограниченно долгое время. Из второй теоремы следует, что объем вихревого кольца с течением времени не меняется.

На поверхности кольца составляющие скорости должны быть непрерывными, при этом возникает типичная задача о склейке потенциального и вихревого движений [1, 4]. Определение точной формы поперечного сечения вихревого кольца, согласующейся с законом движения области завихренности, представляет сложную задачу.

В чрезвычайно интересной работе Дайсона [5] приведен подробный вывод уравнений движения системы тонких осесимметричных вихревых колец. Автор рассматриваются тонкие торроидальные вихревые кольца, у которых форма поперечного сечения приблизительно круговая. В этом случае эволюция вихря сопровождается деформацией поверхности вихря при неизменной круговой форме поперечного сечения и распределения завихренности внутри кольца. В работе найдены два инварианта движения, выражающих закон сохранения импульса жидкости вдоль оси движения и закон сохранения кинетической энергии. С помощью этих инвариантов были получены количественные результаты для ряда конкретных случаев взаимодействия вихрей. В современной литературе [6–10] задачу о взаимодействии тонких коаксиальных колец связывают с исследованиями [5] и называют *вихревыми кольцами Дайсона*. Эта модель вихревого течения находит широкое применение при проведении качественного анализа различных гидродинамических течений.

Известно [3, 5, 6, 9], что два одинаковых осесимметричных вихревых кольца участвуют в периодическом взаимодействии. Определенный вклад в понимание условий, при которых вихревые кольца могут формировать связанные системы, внесли исследования Хикса [11]. В работе сделано предположение, что предельный случай периодического взаимодействия двух вихрей определяется равенством самоиндуцированных скоростей вихревых колец, удаленных друг от друга на бесконечное расстояние.

Впоследствии эта идея была реализована в исследованиях [9, 12], в которых приведена полная классификация взаимодействий системы двух осесимметричных вихревых колец в безграничной жидкости. Используя гамильтонову форму уравнений движения [5, 13] и упомянутые ранее два инварианта движения, в работах сформирована не-

линейная система уравнений, которая определяет нормированные области второго вихревого кольца для периодического взаимодействия двух вихревых колец, имеющих одинаковые и противоположные по знаку циркуляции вихрей. Важным в этих исследованиях является то, что впервые было обнаружено стационарное движение двух осесимметричных вихревых колец.

При анализе взаимодействий вихревых колец с твердыми поверхностями активно используется метод изображений. При этом каждому действительному вихревому кольцу в соответствие ставится мнимая вихревая нить, параметры которой зависят от параметров действительного кольца и расстояния до твердой поверхности. В результате общее число уравнений, описывающих динамику осесимметричных колец, не увеличивается, а граничное условие непротекания жидкости через твердую поверхность выполняется точно.

Несмотря на широкое применение метода изображений при изучении плоских вихревых течений, его использование в осесимметричном случае оказывается ограниченным. Среди наиболее распространенных решений следует отметить взаимодействие тонкого осесимметричного вихревого кольца с плоской стенкой, расположенной перпендикулярно к плоскости вихря, и движение вихревой нити около (или внутри) сферической поверхности в приближении идеальной несжимаемой жидкости (смотри подробности в [6, Гл.4] или в [1, §164]).

В настоящее время в современной литературе имеется большое количество работ, посвященных анализу взаимодействия крупномасштабных вихрей в трубах (например, [14–18]). Большинство работ связано с экспериментальными исследованиями или с прямым численным моделированием вихревого течения. Поверхность трубы существенно снижает осевую самоиндуцированную скорость вихревого кольца и, в некоторых случаях, вихревые кольца даже могут двигаться в обратном направлении по отношению к самоиндуцированной скорости.

В недавней публикации [19] рассмотрена задача о движении тонкого осесимметричного вихревого кольца в круглой трубе. В основу численно-аналитического решения задачи положен метод дискретных особенностей, адаптированный к осесимметричным задачам. Для удовлетворения граничных условий на внутренней поверхности вводится последовательность мнимых вихревых нитей одинакового радиуса, смещенных друг относительно друга в осевом направлении на фиксированное расстояние. Распределение интенсивно-

сти мнимых вихревых структур определяется из условия равенства константе значения функции тока на твердой поверхности. В работе приводятся уравнения движения для системы тонких вихревых колец. Гамильтонова форма уравнений движения совпадает с уравнениями для коаксиальных вихревых колец в безграничном пространстве с гамильтонианом, учитывающим влияние границ. Показано, что эти уравнения обладают двумя инвариантами движения, которые соответствуют закону сохранения импульса движения вдоль оси трубы и закону сохранения кинетической энергии движения вихревых колец.

Целью настоящей работы является классификация возможных типов взаимодействия системы двух тонких осесимметричных вихревых колец в бесконечной трубе, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью.

### 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВИХРЕВЫХ КОЛЕЦ В ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРУБЕ

Рассмотрим взаимодействие системы  $N$  тонких коаксиальных вихревых колец интенсивности  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , радиуса  $R_i$ , радиуса поперечного сечения  $a_i$  ( $a_i \ll R_i$ ) и осевого положения  $Z_i$ , которые помещены внутри прямолинейной бесконечной цилиндрической поверхности (трубы) с круговым поперечным сечением  $R_0$ , заполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \phi, z)$ , совпадающую с осью симметрии поверхности (рис. 1).

Для выполнения граничного условия непротекания жидкости на внутренней поверхности трубы вводится система  $M$  мнимых вихревых нитей переменной интенсивности  $\Gamma_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ , постоянного радиуса  $R_c$ , смещенных друг относительно друга на расстояние  $\Delta_z$ . Поле скорости течения жидкости определяется суперпозицией вкладов, наведенных со стороны  $N$  действительных вихревых колец и системой  $M$  мнимых вихревых нитей. В этом случае уравнения движения тонких вихревых колец представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (задача Коши), которая может быть представлена в следующем виде [19]:

$$\frac{dR_i}{dt} = -\frac{1}{\Gamma_i R_i} \frac{\partial U}{\partial Z_i}, \quad (1)$$

$$\frac{dZ_i}{dt} = \frac{\Gamma_i}{4\pi R_i} \left( \ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\Gamma_i R_i} \frac{\partial U}{\partial R_i}, \quad (2)$$

$$a_i R_i = \text{const}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

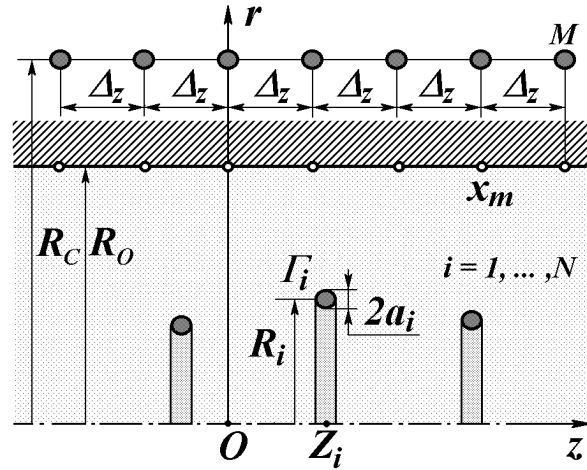


Рис. 1. Пространственное положение вихрей и последовательности контрольных точек при анализе выполнения граничного условия для функции тока

с начальными условиями

$$\begin{aligned} R_i(0) &= R_i^0, & Z_i(0) &= Z_i^0, \\ a_i(0) &= n_i^0 R_i^0, & n_i^0 &\ll 1, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $n_i = a_i/R_i$  – относительная толщина  $i$ -го вихревого кольца.

В приведенных выражениях

$$\begin{aligned} U(R_i, R_j, Z_i - Z_j) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Gamma_i \Gamma_j \sqrt{R_i R_j} \times \\ &\times \left[ \left( \frac{2}{k_{ij}} - k_{ij} \right) K(k_{ij}) - \frac{2}{k_{ij}} E(k_{ij}) \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{\Gamma_i \Gamma_m}{4\pi} \sqrt{R_c R_i} \times \\ &\times \left[ \left( \frac{2}{k_{mi}^{(ci)}} - k_{mi}^{(ci)} \right) K(k_{mi}^{(ci)}) - \frac{2}{k_{mi}^{(ci)}} E(k_{mi}^{(ci)}) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{где } k_{ij}^2 &= \frac{4R_i R_j}{R_{max,ij}^2}, & [k_{mi}^{(ci)}]^2 &= \frac{4R_i R_c}{[R_{max,mi}^{(ci)}]^2}, \\ R_{max,ij}^2 &= (R_i + R_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2, \\ [R_{max,mi}^{(ci)}]^2 &= (R_i + R_c)^2 + (Z_i - Z_m)^2, \\ Z_m &= Z_s + (m - 1)\Delta_z. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $Z_s$  – осевое положение первой мнимой вихревой нити. Штрих под знаком суммы в уравнении (5) означает исключение из суммирования сингулярного слагаемого  $i = j$ . Здесь и далее используются следующие обозначения в верхних индексах

(в круглых скобках): индекс  $c$  относится к мнимым вихревым нитям, индекс  $0$  соответствует поверхности трубы, а индекс  $i$  относится к действительным вихревым кольцам.

Интенсивности мнимых вихрей  $\Gamma_m$  (при  $m = 1, \dots, M$ ) определяются из условия равенства наведенной функции тока системой действительных колец и мнимых вихревых нитей в системе  $M$  точек коллокации, которые имеют одинаковые с соответствующими мнимыми вихревыми нитями осевые положения. Это условие позволяет сформировать линейную алгебраическую систему уравнений

$$[\mathbf{A}_{nm}] \Gamma_m = -\mathbf{B}_n, \quad n, m = 1, \dots, M, \quad (7)$$

где

$$[\mathbf{A}_{nm}] = \left( \frac{2}{k_{mn}^{(co)}} - k_{mn}^{(co)} \right) \mathbf{K}(k_{mn}^{(co)}) - \frac{2}{k_{mn}^{(co)}} \mathbf{E}(k_{mn}^{(co)}),$$

$$\mathbf{B}_n = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \sqrt{\frac{R_i}{R_c}} \times$$

$$\times \left[ \left( \frac{2}{k_{in}^{(io)}} - k_{in}^{(io)} \right) \mathbf{K}(k_{in}^{(io)}) - \frac{2}{k_{in}^{(io)}} \mathbf{E}(k_{in}^{(io)}) \right] \quad (8)$$

с обозначениями

$$[k_{nm}^{(co)}]^2 = \frac{4R_0R_c}{[R_{max, nm}^{(co)}]^2}, \quad [k_{in}^{(io)}]^2 = \frac{4R_0R_i}{[R_{max, in}^{(io)}]^2}.$$

$$[R_{max, nm}^{(co)}]^2 = (R_c + R_0)^2 + (Z_n - Z_m)^2,$$

$$[R_{max, in}^{(io)}]^2 = (R_i + R_0)^2 + (Z_i - Z_n)^2, \quad (9)$$

$$Z_n = Z_s + \Delta_z(n - 1).$$

Можно показать, что значение радиальной составляющей скорости (1) вихревых колец определяется только вкладом со стороны действительных колец. Мнимые вихревые нити (другими словами, внутренняя поверхность трубы) в приближении идеальной жидкости не оказывают влияние на радиальную компоненту скорости вихревых колец. В выражении (1) для осевой компоненты скорости первое слагаемое представляет собой самоиндуцированную скорость тонкого вихревого кольца [5,6,11], а второе слагаемое описывает наведенную компоненту скорости со стороны системы действительных колец и мнимых вихревых нитей.

Динамическая система (1) обладает двумя независимыми инвариантами движения, выражающими законы сохранения импульса вдоль оси симметрии и закон сохранения кинетической энергии движения жидкости. В принятых ранее обозначениях выражения для инвариантов движения имеют вид

$$P = \sum_{i=1}^N \Gamma_i R_i^2 = \text{const}, \quad (10)$$

$$W = \sum_{i=1}^N \Gamma_i^2 R_i \left( \ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{7}{4} \right) + U = \text{const}. \quad (11)$$

Интересно заметить, что выражение для первого инварианта совпадает с соответствующим инвариантом движения системы осесимметричных вихревых колец в безграничной жидкости, поскольку идеальная жидкость на внутренней поверхности трубы не испытывает сопротивления движению. Слагаемое под знаком суммы в уравнении (11) определяет энергию изолированных колец, а функция  $U$  – энергию, связанную с взаимодействием действительных вихревых колец между собой, и энергию, наведенную со стороны мнимых вихревых нитей (или твердой поверхности), на действительные вихревые кольца.

## 2. ОДИНОЧНОЕ ВИХРЕВОЕ КОЛЬЦО В БЕСКОНЕЧНОЙ ТРУБЕ

Рассмотрим движение одиночного вихревого кольца интенсивности  $\Gamma_1$ , радиуса  $R_1$  с круговым поперечным сечением  $a_1$  в бесконечной трубе радиуса  $R_0$ . В дальнейшем все линейные размеры в задаче удобно отнести к радиусу трубы  $R_0$ , интенсивности  $\Gamma_1$ , а время пронормировать на величину  $R_0^2/\Gamma_1$ .

Анализ структуры уравнений движения (1) показывает, что одиночное осесимметричное вихревое кольцо движется в прямолинейной круглой трубе с постоянной осевой скоростью

$$\frac{dR_1}{dt} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{dZ_1}{dt} = \frac{\Gamma_1}{4\pi R_1} \left( \ln \frac{8R_1}{a_1} - \frac{1}{4} \right) +$$

$$+ \sum_{m=1}^M \frac{\Gamma_m}{2\pi R_{max, m1}^{(ci)}} \left[ \mathbf{K}(k_{m1}^{(ci)}) - \mathbf{E}(k_{m1}^{(ci)}) + \right.$$

$$\left. + \frac{2R_c(R_c - R_1)}{[R_{max, m1}^{(ci)}]^2} \mathbf{E}(k_{m1}^{(ci)}) \right] \quad (13)$$

в принятых ранее обозначениях.

На рис. 2 показана зависимость осевой скорости одиночного вихревого кольца интенсивности  $\Gamma_1 = 1.0$  в трубе радиуса  $R_0 = 1.0$  от радиуса кольца для различных значений  $n$  относительной толщины вихря. В расчетах принято  $M = 80$ ,

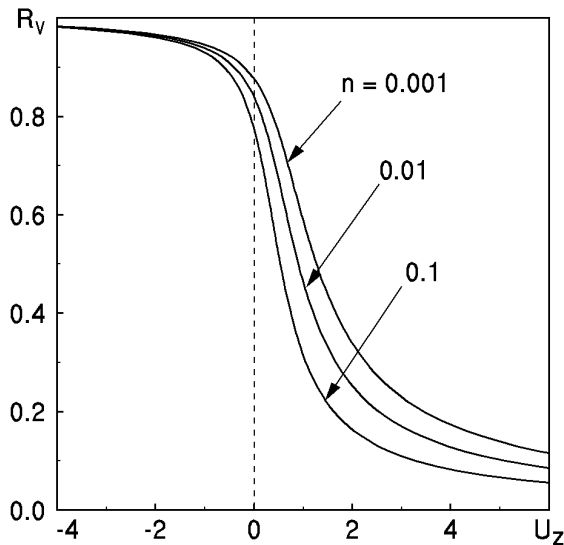


Рис. 2. Зависимость осевой скорости одиночного вихревого кольца от его радиуса при движении в прямолинейной трубе

$R_c = 1.2$ ,  $\Delta_z = 0.1$  и  $Z_s = -4.0$ . По мере увеличения размеров кольца усиливается влияние границ области течения, что приводит к уменьшению осевой скорости кольца. Если размер вихревого кольца приближается к значению радиуса трубы, то осевая скорость вихря меняет знак, вихревое кольцо движется в обратном направлении. Интересно заметить, что значение осевой скорости для малых колец по сравнению с радиусом трубы зависит от относительной толщины вихря. В то же время, если радиус вихревого кольца асимптотически стремится к  $R_0$ , значение осевой скорости одиночного кольца фактически не зависит от относительных размеров кольца.

Исследования показывают, что вихревые кольца с произвольным значением относительной толщины обладают критическим значением радиуса  $R_{cr}$ , при котором вихревое кольцо в круглой бесконечной трубе покоится. Рис. 3 иллюстрирует зависимость критических радиусов колец от значений относительной толщины вихрей в состоянии покоя. Чем толще вихревое кольцо, тем меньшим значением  $R_{cr}$  обладают кольца. Отметим, что значение критического радиуса кольца не зависит от значения  $\Gamma_1$  интенсивности вихря.

Известно, что вихревое кольцо способно вовлекать в собственное движение часть близлежащей жидкости, формируя так называемое *вихревое облако* или *атмосферу вихря*. Для определения

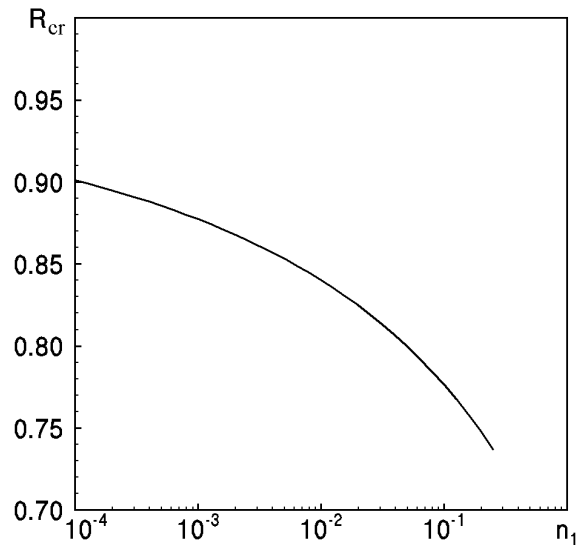


Рис. 3. Зависимость радиуса вихревого кольца от его относительной толщины в состоянии покоя

формы вихревого облака достаточно построить распределение функции тока течения в области, прилегающей к вихревому кольцу, в движущейся системе координат с осевой скоростью кольца. Размеры и форма вихревого облака определяются линией функции тока постоянного уровня с максимальным (по модулю) значением, при котором линия функции тока остается замкнутой.

Рассмотрим одиночное вихревое кольцо интенсивности  $\Gamma_1$  и радиуса  $R_1$  с относительной толщиной  $n_1$ . В этом случае распределение функции тока течения жидкости в системе координат, связанной с вихрем, определяется суперпозицией вкладов действительного вихревого кольца и системы  $M$  мнимых вихревых нитей:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) = & -U_z \frac{r^2}{2} + \frac{\Gamma_1 \sqrt{R_1 r}}{2\pi} \times \\ & \times \left\{ \frac{2}{k} [\mathbf{E}(k) - \mathbf{K}(k)] - k\mathbf{E}(k) \right\} + \\ & + \sum_{m=1}^M \frac{\Gamma_m \sqrt{R_{cr}}}{2\pi} \times \\ & \times \left\{ \frac{2}{k_m^{(c)}} [\mathbf{E}(k_m^{(c)}) - \mathbf{K}(k_m^{(c)})] - k_m^{(c)} \mathbf{E}(k_m^{(c)}) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} k^2 = & \frac{4R_1 r}{(R_1 + r)^2 + (Z_1 + z)^2}, \\ [k_m^{(c)}]^2 = & \frac{4R_{cr}}{(R_{cr} + r)^2 + (Z_m + z)^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

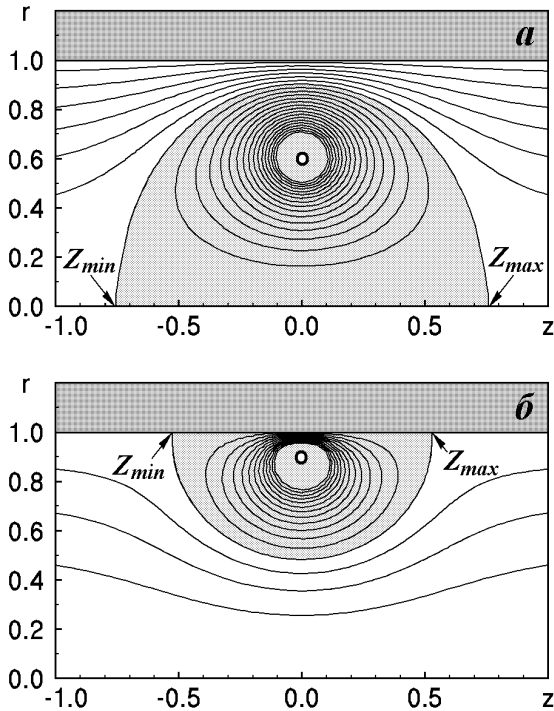


Рис. 4. Распределение функции тока в области, прилегающей к вихревому кольцу при стационарном движении в трубе при  $n = 0.01$  для: а –  $R_1 = 0.6$ , б –  $R_1 = 0.9$ . Вихревое облако на рисунках выделено серым цветом

В приведенном выражении  $U_z$  – осевая скорость движения одиночного вихревого кольца (13).

На рис. 4 показано распределение функции тока, наведенной одиночным точечным вихрем интенсивности  $\Gamma_1 = 1.0$  с относительной толщиной поперечного сечения  $n = 0.01$  в подвижной системе координат, связанной с вихревым кольцом. На рисунках нанесены линии равного значения функции тока через эквидистантные значения  $\Delta\Psi = 0.05$ . Рис. 4, а иллюстрирует распределение функции тока для вихревого кольца  $R_1 = 0.6$ . Серым цветом выделена область течения, которая вовлекается в собственное движение вихревым кольцом. Видно, что вихревое облако представляет собой сплюснутый эллипсоид, поперечное сечение которого ( $Z_{max} - Z_{min} = 2.56R_0$ ) значительно превышает поперечное сечение вихря для безграничного пространства ( $Z_{max} - Z_{min} = 0.54R_0$ ) [20].

Как только осевая скорость вихревого кольца меняет свой знак, форма вихревого облака существенно меняется. Распределение функции тока для  $R_1 = 0.9$  при  $\Gamma_1 = 1.0$  для  $n = 0.01$  показано на рис. 4 с аналогичными обозначениями. Вихревое облако представляет собой кольцо, опира-

ющееся на внутреннюю поверхность трубы. Известно [21], что изменение формы вихревого облака при взаимодействии вихрей является источником интенсивного перемешивания жидкостей. Следовательно, можно сделать предположение, что перемешивание жидкости в поле скорости вихревых колец внутри цилиндрической поверхности должно протекать с более интенсивными режимами по сравнению со случаями взаимодействия осесимметричных вихревых колец в безграничной среде.

### 3. ДВА ВИХРЕВЫХ КОЛЬЦА В БЕСКОНЕЧНОЙ ТРУБЕ

Рассмотрим задачу о взаимодействии двух тонких вихревых колец в бесконечной трубе. Простой анализ показывает, что уравнения движения вихрей в трубе имеют аналогичную структуру с уравнениями движения осесимметричных вихрей в безграничной жидкости. Наличие двух инвариантов движения позволяет провести качественный анализ взаимодействия без явного интегрирования уравнений движения. Эта особенность движения в безграничной жидкости дала возможность [12] провести полную классификацию типов взаимодействия двух вихревых колец.

#### 3.1. Стационарное движение

Известно [12, 22], что два вихревых кольца в безграничной среде могут двигаться стационарно. Этот режим движения достигается при определенном соотношении между радиусами и интенсивностями вихревых колец. Аналогичный режим движения вихрей внутри бесконечной трубы до настоящего времени исследован не был.

Для стационарного движения двух вихревых колец в бесконечной трубе должны выполняться два условия

$$\frac{dR_1}{dt} = \frac{dR_2}{dt} = 0, \quad \frac{dZ_1}{dt} = \frac{dZ_2}{dt}. \quad (16)$$

Анализируя структуру и знаки радиальных скоростей вихревых колец (1), заключаем, что при неодинаковых осевых положениях колец ( $Z_{12} = Z_1 - Z_2 \neq 0$ ) радиальные скорости всегда отличны от нуля, следовательно решения системы (16) в этом диапазоне осевых положений не существует. В предельном случае, при бесконечном смещении колец друг относительно друга, радиальные компоненты скоростей вихрей равны нулю. Этот случай соответствует изолированным вихревым кольцам.

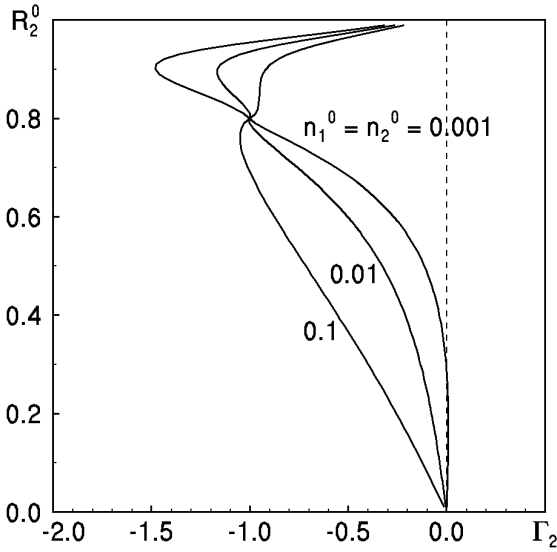


Рис. 5. Зависимость радиуса второго вихревого кольца от его интенсивности при стационарном движении двух вихревых колец в бесконечной трубе

Радиальные компоненты скоростей вихревых колец равны нулю в случае, когда оба кольца находятся в одной плоскости ( $Z_{12} = 0$ ). В этом случае выражения для осевых скоростей колец имеют вид

$$\frac{dZ_1}{dt} = \frac{\Gamma_1}{4\pi R_1} \left( \ln \frac{8R_1}{a_1} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\Gamma_2}{2\pi(R_1 + R_2)} \times \left[ \mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k) + \frac{2R_2}{(R_2 - R_1)} \mathbf{E}(k) \right] + \sum_{m=1}^M C_m(R_1), \quad (17)$$

$$\frac{dZ_2}{dt} = \frac{\Gamma_2}{4\pi R_2} \left( \ln \frac{8R_2}{a_2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\Gamma_1}{2\pi(R_1 + R_2)} \times \left[ \mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k) + \frac{2R_1}{(R_1 - R_2)} \mathbf{E}(k) \right] + \sum_{m=1}^M C_m(R_2), \quad (18)$$

где 
$$C_m(R_i) = \sum_{m=1}^M \frac{\Gamma_m}{2\pi R_{max,mi}^{(ci)}} \left[ \mathbf{K}(k_{mi}^{(ci)}) - \mathbf{E}(k_{mi}^{(ci)}) + \frac{2R_c(R_c - R_i)}{[R_{max,mi}^{(ci)}]^2} \mathbf{E}(k_{mi}^{(ci)}) \right], \quad (19)$$

с использованием принятых ранее обозначений.

Приравнявая выражения (17) и (18), получаем равенство, которое позволяет связать интенсивность и радиус второго вихревого кольца при

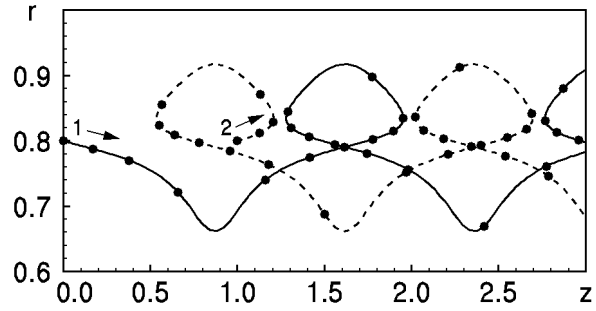


Рис. 6. Периодическое взаимодействие двух одинаковых осесимметричных вихревых колец внутри бесконечной круговой трубы

стационарном взаимодействии двух осесимметричных вихревых колец в бесконечной трубе с круговым поперечным сечением. Результаты численного решения представлены на рис. 5 при  $\Gamma_1 = 1.0$ ,  $R_1^0 = 0.8$  для  $n_1^0 = n_2^0 = 0.1, 0.01$  и  $0.001$ . Видно, что для каждого значения радиуса  $R_2^0$  второго вихревого кольца существует значение его интенсивности  $\Gamma_2$ , при котором пара вихревых колец движется стационарно вдоль оси симметрии. В большинстве случаев значение  $\Gamma_2$  отрицательно, исключая область малых  $R_2^0$  для тонких колец. Чем тоньше вихревые кольца, тем область положительных  $\Gamma_2$  больше. Для толстых вихрей соответствующее  $\Gamma_2$  всегда отрицательно в рассматриваемом диапазоне значений  $R_2^0$ .

### 3.2. Однонаправленное движение колец

Рассмотрим взаимодействие двух коаксиальных вихревых колец внутри трубы, движущихся вдоль общей оси симметрии. Если кольца обладают интенсивностями одного знака ( $\Gamma_1 \Gamma_2 > 0$ ), то направления векторов самоиндуцированной скорости колец совпадают. Этот случай движения условно назовем однонаправленным взаимодействием двух вихревых колец.

Известно [5, 11, 12], что два одинаковых вихревых кольца в безграничной жидкости участвуют в периодическом взаимодействии. Аналогичный случай движения двух одинаковых в начальный момент времени вихревых колец показан на рис. 6 для  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1.0$ ,  $R_1^0 = R_2^0 = 0.8$ ,  $Z_1^0 = 0.0$ ,  $Z_2^0 = 1.0$ ,  $n_1^0 = n_2^0 = 0.01$ . Сплошной линией изображена траектория первого вихревого кольца, а штриховой нанесена траектория второго вихря. Кружочками показано положение вихрей через эквидистантные интервалы времени  $\Delta t = 1.0$ , стрелкой указано направление движения.

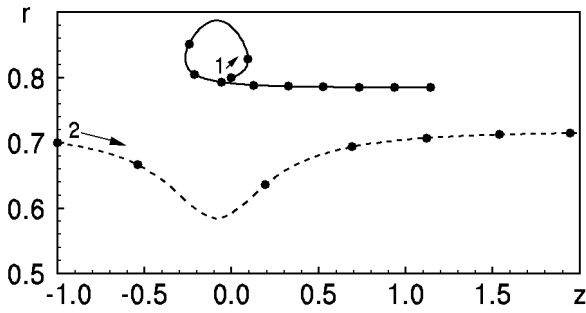


Рис. 7. Разовое взаимодействие двух осесимметричных вихревых колец с одинаковыми по знаку интенсивностями в бесконечной трубе

При движении вдоль оси симметрии переднее вихревое кольцо 1 под влиянием заднего вихревого кольца 2 расширяется, увеличивая собственную энергию. С течением времени кольцо 1 останавливается и начинает даже двигаться в обратном направлении. В то же время, заднее вихревое кольцо 2 сужается, уменьшая свою собственную энергию, и ускоряется. В конечном итоге вихревое кольцо 2 проскакивает сквозь кольцо 1. Затем кольца меняются положениями и процесс повторяется снова. Такая “чехарда” в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости продолжается неограниченно долго.

При неодинаковых вихревых кольцах периодичность взаимодействия может быть нарушена. На рис. 7 показан пример взаимодействия, при котором переднее вихревое кольцо имеет меньшую самоиндуцированную скорость по сравнению с задним вихрем ( $\Gamma_1 = 1.0$ ,  $\Gamma_2 =$ ,  $R_1^0 = 0.8$ ,  $R_2^0 = 0.7$ ,  $Z_1^0 = 0.0$ ,  $Z_2 = -1.0$ ,  $n_1^0 = n_2^0 = 0.01$ ). Вихревые кольца участвуют только в одном проскакивании одного вихря сквозь другой. В результате взаимодействия переднее кольцо имеет большую самоиндуцированную скорость по сравнению с вихрем 1, взаимное расстояние между кольцами неограниченно возрастает.

В работе [11] сделано предположение, что предельные параметры вихревых колец, которые могут участвовать в периодическом взаимодействии в безграничной среде, определяются равенством самоиндуцированных скоростей колец на бесконечном удалении. Эта идея была реализована в работе [12]. Было показано, что в противном случае заднее кольцо либо не догонит переднее, либо догонит, проскочит через переднее, и, в силу симметрии задачи относительно  $Z_1 - Z_2$ , расстояние между ними снова будет возрастать неограниченно долго.

Поскольку структура уравнений движения вихревых колец в бесконечной трубе совпадает с уравнениями вихрей в безграничной жидкости, можно сделать предположение, что эти рассуждения справедливы для системы двух вихрей в бесконечной трубе с одинаковыми по знаку интенсивностями. Обозначая безразмерные радиусы колец на бесконечном удалении через  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_1}{4\pi\rho_1} \left( \ln \frac{8\rho_1}{a_{\rho,1}} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\Gamma_1\rho_1} \frac{\partial}{\partial\rho_1} U(\rho_1, \rho_2, \infty) = \\ = \frac{\Gamma_2}{4\pi\rho_2} \left( \ln \frac{8\rho_2}{a_{\rho,2}} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\Gamma_2\rho_2} \frac{\partial}{\partial\rho_2} U(\rho_1, \rho_2, \infty), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Gamma_1\rho_1^2 + \Gamma_2\rho_2^2 = \Gamma_1[R_1^0]^2 + \Gamma_2[R_2^0]^2, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \Gamma_i^2 \rho_i \left( \ln \frac{8\rho_i}{a_{\rho,i}} - \frac{7}{4} \right) + U(\rho_1, \rho_2, \infty) \leq \\ \leq \sum_{i=1}^2 \Gamma_i^2 R_i^0 \left( \ln \frac{8R_i^0}{a_i^0} - \frac{7}{4} \right) + U(R_1^0, R_2^0, 0), \end{aligned} \quad (22)$$

$$R_i^0 [a_i^0]^2 = \rho_i a_{\rho,i}^2, \quad i = 1, 2. \quad (23)$$

В этой системе уравнение (20) представляет собой условие равенства скоростей колец на бесконечном удалении друг от друга, уравнение (21) и неравенство (22) – инварианты движения, связывающие начальное положение вихрей и положение колец на бесконечном удалении друг от друга. Последние уравнения (23) представляют собой закон сохранения объема завихренности. Неравенство (22) обусловлено тем обстоятельством, что подведенная к системе колец начальная энергия не должна быть меньше энергии колец на бесконечном расстоянии друг от друга.

Решение нелинейной системы (20)-(23) может быть найдено при поэтапном решении уравнений. Сначала решается уравнение (20) с учетом (21) и (23), в результате чего находятся значения  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Затем для этих значений решается уравнение (22) и находится значение  $|Z_{12}^0|$ .

Результаты вычислений показаны на рис. 8 при  $\Gamma_1 = 1.0$ ,  $R_1^0 = 0.8$  и  $n_1^0 = n_2^0 = 0.01$  для различных значений интенсивности  $\Gamma_2$ . Области допустимых начальных параметров второго кольца для периодического взаимодействия колец показаны на рисунке различной штриховкой. Видно, что для любых значений интенсивности второго вихревого кольца существует область параметров, при которых вихревая пара образует связанную систему. Причем чем больше отличаются интенсивности вихрей (в большую или в меньшую сторону), тем больше площадь параметров второго кольца



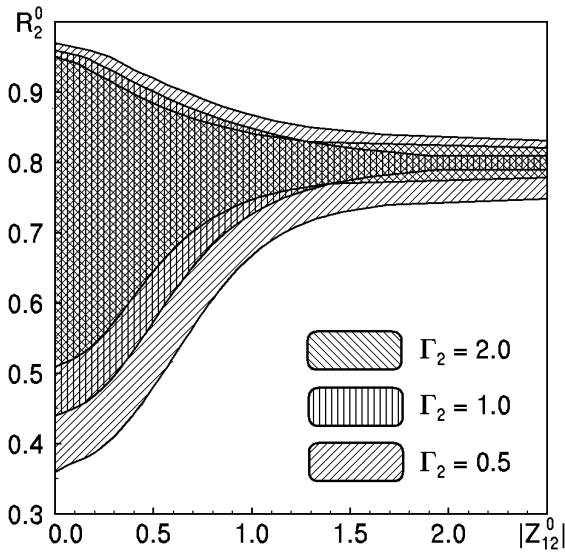


Рис. 8. Области допустимых начальных параметров второго вихревого кольца для периодического взаимодействия двух вихревых колец с одинаковыми по знаку интенсивностями в бесконечной трубе

для периодического взаимодействия колец.

Область параметров на рис. 8, которая лежит ниже заштрихованной области значений, соответствует случаю разового взаимодействия вихревых колец, при котором второе кольцо проскакивает внутри первого. Пример такого взаимодействия показан на рис. 7. В верхней части рис. 8 также имеется область параметров второго кольца, при котором имеет место разовое взаимодействие. Этот случай характеризуется проскакиванием первого кольца внутри второго вихря. На рис. 9 показан этот случай движения вихрей для  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1.0$ ,  $R_1^0 = 0.8$ ,  $R_2^0 = 0.9$  и  $n_1^0 = n_2^0 = 0.01$  с принятыми ранее обозначениями.

### 3.3. Встречное взаимодействие колец

В случае взаимодействия двух вихревых колец с интенсивностями разных знаков  $\Gamma_1 \Gamma_2 < 0$  самоиндуцированные скорости колец направлены в противоположные стороны. Этот случай движения условно назовем встречным взаимодействием двух вихревых колец.

В частном случае двух одинаковых симметричных вихревых колец с течением времени происходит увеличение радиусов колец по мере их сближения. При этом, в силу симметрии задачи, кольца не проскакивают одно сквозь другое. По мере

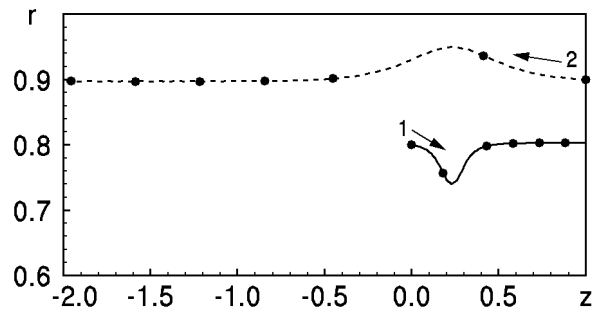


Рис. 9. Разовое взаимодействие двух осесимметричных вихревых колец с одинаковыми по знаку интенсивностями в бесконечной трубе

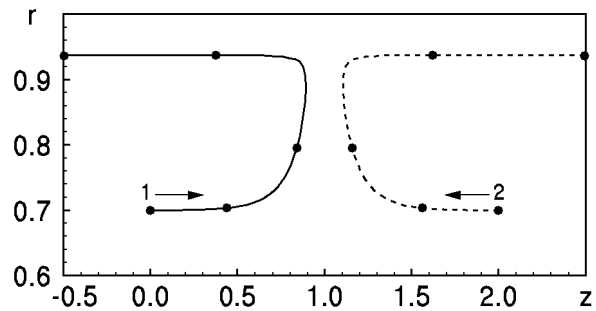


Рис. 10. Встречное взаимодействие двух одинаковых осесимметричных вихревых колец в бесконечной трубе

увеличения радиусов кольца приближаются к внутренней поверхности трубы. Это приводит к тому, что осевая скорость колец меняет свой знак. В результате вихревые кольца симметрично удаляются друг от друга. Этот случай взаимодействия вихрей показан на рис. 10 для  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1.0$ ,  $R_1^0 = R_2^0 = 1.0$ ,  $n_1^0 = n_2^0 = 0.01$ .

В работе [12] показано, что два вихревых кольца с противоположными по знаку интенсивностями могут участвовать в безграничной среде в периодическом взаимодействии. Для определения границ области начальных параметров второго кольца для периодического взаимодействия необходимо на два инварианта движения колец наложить условие равенства осевых скоростей колец, находящихся в одной плоскости.

Параметры вихрей при стационарном движении определяют тип дальнейшего их взаимодействия. Так, если кольца (или одно из них) будут иметь радиусы, меньшие чем значения, соответствующие стационарному движению, разница осевых скоростей колец не поменяет знак. В этом случае наступит проскакивание меньшего вихревого кольца сквозь большее. Если вихри (или один их них)

будут иметь большие радиусы, то их движение, в силу симметрии траектории относительно  $Z_1 - Z_2$ , пойдет по периодическим траекториям. Наконец, если вихри не достигают общей плоскости в окрестности стационарного режима взаимодействия, радиальные компоненты скоростей колец не меняют свой знак. В результате имеем проскакивание одного кольца сквозь другое. Эти рассуждения справедливы для любых значений интенсивностей колец.

Следовательно, для построения границ областей допустимых начальных параметров второго вихревого кольца при встречном взаимодействии двух вихрей необходимо к упомянутым ранее двум инвариантам движения, (10) и (11), добавить условие равенства осевых скоростей колец в момент равенства их осевых координат. Обозначая безразмерные радиусы колец в плоскости  $Z_1 = Z_2$  через  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , получаем систему уравнений

$$\frac{\Gamma_1}{4\pi\rho_1} \left( \ln \frac{8\rho_1}{a_{\rho,1}} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\Gamma_1\rho_1} \frac{\partial}{\partial\rho_1} U(\rho_1, \rho_2, 0) = \frac{\Gamma_2}{4\pi\rho_2} \left( \ln \frac{8\rho_2}{a_{\rho,2}} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\Gamma_2\rho_2} \frac{\partial}{\partial\rho_2} U(\rho_1, \rho_2, 0), \quad (24)$$

$$\Gamma_1\rho_1^2 + \Gamma_2\rho_2^2 = \Gamma_1[R_1^0]^2 + \Gamma_2[R_2^0]^2, \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^2 \Gamma_i^2 \rho_i \left( \ln \frac{8\rho_i}{a_{\rho,i}} - \frac{7}{4} \right) + U(\rho_1, \rho_2, \infty) = \sum_{i=1}^2 \Gamma_i^2 R_i^0 \left( \ln \frac{8R_i^0}{a_i^0} - \frac{7}{4} \right) + U(R_1^0, R_2^0, 0), \quad (26)$$

$$R_i^0 [a_i^0]^2 = \rho_i a_{\rho,i}^2, \quad i = 1, 2. \quad (27)$$

Результаты вычислений показаны на рис. 11 для  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1.0$ ,  $R_1^0 = 0.8$  и  $n_1^0 = n_2^0 = 0.01$ . Видно, что вся область начальных параметров делится на четыре области: A, B, C и D.

Область параметров A характеризуется большой самоиндуцированной скоростью второго вихревого кольца. В результате имеет место проскакивание второго вихря сквозь первое кольцо. Пример такого взаимодействия показан на рис. 12 для  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1.0$ ,  $R_1^0 = 0.8$ ,  $R_2^0 = 0.4$  при  $n_1^0 = n_2^0 = 0.01$  с принятыми ранее обозначениями. При приближении колец радиусы обоих вихрей незначительно увеличиваются, затем, в силу симметрии задачи относительно  $Z_1 - Z_2$ , кольца удаляются друг от друга, двигаясь в противоположных направлениях.

Аналогичный тип взаимодействия имеет место для области параметров, соответствующих области B на рис. 11. В противоположность предыдущему случаю, здесь имеет место проскакивание

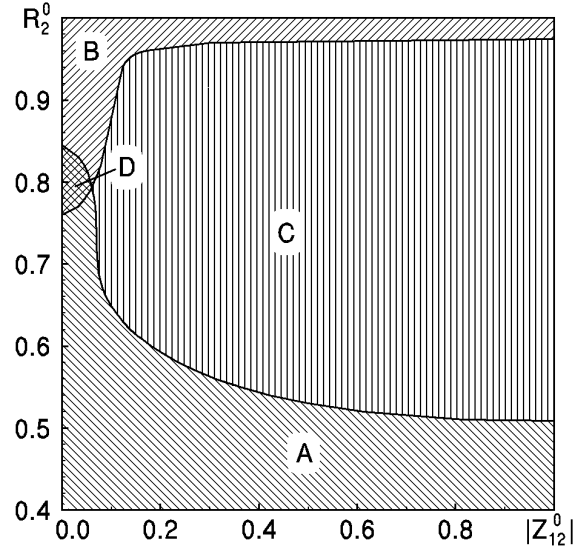


Рис. 11. Области допустимых начальных параметров второго вихревого кольца для каждого из возможных взаимодействий двух вихревых колец с противоположными по знаку интенсивностями в бесконечной трубе

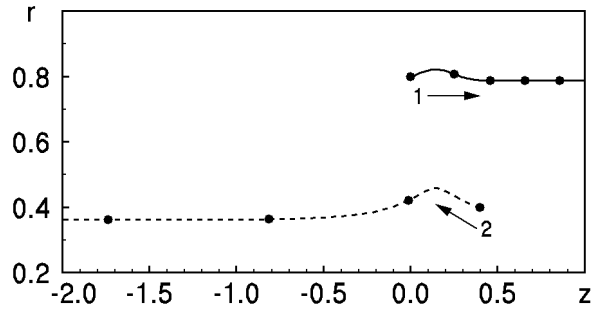


Рис. 12. Встречное взаимодействие двух вихревых колец в бесконечной трубе с начальными параметрами, соответствующими области A на рис. 11

первого вихревого кольца сквозь второй вихрь. Случай взаимодействия для  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1.0$ ,  $R_1^0 = 0.8$ ,  $R_2^0 = 0.98$  при  $n_1^0 = n_2^0 = 0.01$  показан на рис. 13. По мере приближения колец друг к другу их радиусы незначительно уменьшаются, происходит проскакивание колец одно сквозь другое. Затем кольца удаляются на бесконечное расстояние, двигаясь в противоположных направлениях.

Область параметров C характеризуется тем, что вихревые кольца не достигают положения, при котором их осевые координаты совпадают. При этом кольца приближаются друг к другу и одновременно увеличивают собственные радиусы. С те-

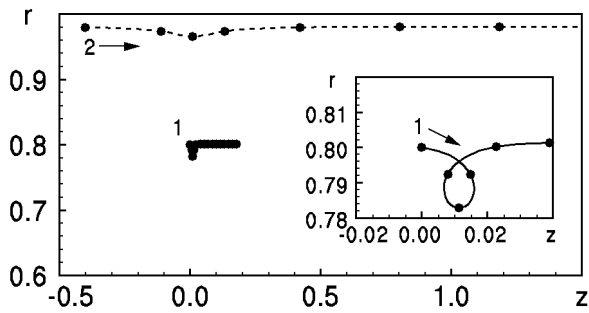


Рис. 13. Встречное взаимодействие двух вихревых колец в бесконечной трубе с начальными параметрами, соответствующими области B на рис. 11

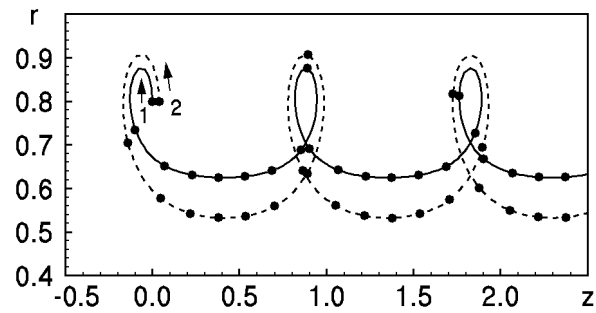


Рис. 15. Периодическое взаимодействие двух вихревых колец с противоположными по знаку интенсивностями в бесконечной трубе

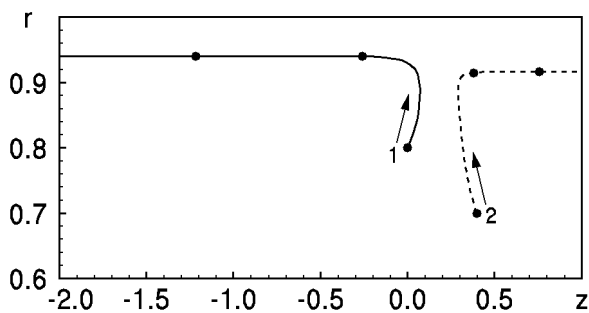


Рис. 14. Встречное взаимодействие двух вихревых колец в бесконечной трубе с начальными параметрами, соответствующими области C на рис. 11

чением времени они достигают своего минимального расстояния при достаточно больших значениях радиусов и, под влиянием границ, меняют знаки осевых скоростей. В конечном итоге кольца начинают двигаться в противоположных направлениях и снова удаляются друг от друга на бесконечное расстояние. Пример взаимодействия для  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1.0$ ,  $R_1^0 = 0.8$ ,  $R_2^0 = 0.7$  при  $n_1^0 = n_2^0 = 0.01$  показан на рис. 14.

Четвертый тип движения для вихревых колец с интенсивностями противоположных знаков составляет периодическое взаимодействие, в области D на рис. 11. Пример такого движения представлен на рис. 15. Сплошной линией показана траектория первого вихревого кольца, а штриховой нанесена траектория второго вихря. Кружочками показано положение вихрей через эквидистантные интервалы времени  $\Delta t = 0.1$ , стрелкой указано направление движения по траекториям. В этом случае взаимная энергия вихревых колец по модулю значительно больше собственной энергии вихрей. В результате вихревые кольца образуют свя-

занную систему. Кольца одновременно увеличивают свои радиусы и замедляются, при этом меньшее кольцо увеличивает свой радиус быстрее. В результате большее кольцо проскакивает внутри меньшего. В дальнейшем кольца меняют положения и процесс взаимодействия вихрей продолжается по аналогичному сценарию.

## ВЫВОДЫ

Рассмотрена задача о движении системы осесимметричных вихревых колец с малым, но конечным поперечным сечением, в бесконечной трубе, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Для решения задачи применен адаптированный метод дискретных особенностей [23], который предусматривает введение системы мнимых вихревых нитей с фиксированным расстоянием между нитями и постоянным радиусом, превышающим радиус трубы, для выполнения граничного условия непротекания жидкости на внутренней поверхности трубы. На твердой поверхности выбирается система контрольных точек (точек коллокации) [19], в которых накладывається условие равенства значений функции тока. В результате формируется система линейных алгебраических уравнений, решение которой дает распределение интенсивностей мнимых нитей для заданного положения системы действительных вихревых колец.

Уравнения, описывающие взаимодействие вихрей, имеют гамильтонову структуру и обладают двумя независимыми инвариантами, выражающими закон сохранения импульса течения жидкости вдоль оси симметрии и закон сохранения кинетической энергии вихрей. Эти уравнения имеют аналогичную структуру с уравнениями, описывающими динамику тонких вихревых колец в безграницы

чной жидкости. Отличие в задачах имеется только в структуре функции, описывающей кинетическую энергию течения. Она состоит из двух слагаемых, учитывающих как вклад действительных вихревых колец, так и системы мнимых вихревых колец, описывающих эквивалентное влияние границы на рассматриваемое действительное вихревое кольцо.

Исследования показали, что одиночное вихревое кольцо движется, не меняя своих размеров, с постоянной осевой скоростью. Значение скорости зависит от соотношения радиусов кольца и трубы. С увеличением радиуса кольца значение его осевой скорости уменьшается и при асимптотическом приближении к значению радиуса трубы меняет свой знак. В этом случае одиночное вихревое кольцо движется в обратную сторону по отношению к направлению самоиндуцированной скорости вихря.

Два вихревых кольца внутри трубы, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, могут двигаться стационарно. Этот режим, по аналогии со случаем взаимодействия в безграничной жидкости, достигается для колец, расположенных в одной плоскости. Исследования показывают, что для любых значений радиусов колец существуют значения интенсивностей, при которых вихри движутся стационарно. В большинстве случаев значения интенсивностей должны быть противоположных знаков, исключая диапазон сильно отличающихся по радиусу тонких вихревых колец.

Кроме периодического движения двух вихревых колец с интенсивностями одного знака, существует разовое их взаимодействие, которое заключается в проскакивании одного из колец сквозь другое с последующим увеличением взаимного расстояния до бесконечности. Для определения областей начальных параметров колец для периодического движения необходимо решить систему нелинейных уравнений, состоящую из условия равенства осевых скоростей на бесконечном удалении вихрей и двух инвариантов движения. Исследования показывают, что два одинаковых вихревых кольца всегда образуют связанную динамическую систему. Период взаимодействия таких вихрей увеличивается по мере увеличения их осевого начального расстояния.

Два вихря с противоположными по знаку интенсивностями имеют несколько типов взаимодействия. Для определения области начальных параметров колец для каждого из случаев движения необходимо решить нелинейную систему уравнений, состоящую из условия равенства осевых скоростей вихрей при совпадении их осевых положе-

ний и двух упомянутых ранее инвариантов движения. Решение уравнений делит всю область допустимых начальных параметров на четыре области, каждая из которых определяет тип взаимодействия осесимметричных вихрей в бесконечной трубе. Две области параметров характеризуются разовым взаимодействием, при котором вихри проскакивают один сквозь другой. Третья область значений определяет параметры вихрей, при которых кольца отталкиваются друг от друга и продолжают свое движение в противоположных направлениях. Заметим, что в этом случае вихри при взаимном сближении не достигают положения, при котором осевые координаты вихрей совпадают. Наконец, последний тип взаимодействия характеризуется периодическим движением. Вихри в этом случае двигаются на малых расстояниях, по аналогии с периодическим взаимодействием двух вихрей с противоположными по знаку интенсивностями для безграничного пространства.

1. Ламб Г. Гидродинамика.– М.,Л.: Гостехиздат, 1947.– 928 с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидромеханики и их математические модели.– М.: Наука, 1977.– 416 с.
3. Helmholtz H. Integrale der hydrodynamischen gleichungen welche den wirbelbewegungen entsprechen // J. Reine angew. Math.– 1858.– **55**.– P. 25–55.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987.– 840 с.
5. Dyson F.W. The potential of an anchor ring // Phil. Trans. Roy. Soc. London.– 1893.– **184**.– P. 43–95.
6. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур.– Киев: Наукова думка, 1993.– 279 с.
7. Fraenkel L.E. On steady vortex ring of small cross-section in an ideal fluid // Proc. Roy. Soc. London.– 1970.– **316**, N.1524.– P. 29–62.
8. Moore D.W. The velocity of a vortex ring with a thin core of elliptical cross section // Proc. Roy. Soc. London.– 1922.– **370**, N.1742.– P. 407–415.
9. Riley N. On the behaviour of pairs of vortex rings // Q. J. Mech. Appl. Math.– 1993.– **46**.– P. 521–539.
10. Shariff K., Leonard A. Vortex rings // Ann. Rev. Fluid Mech.– 1992.– **24**.– P. 235–279.
11. Hicks W.M. On the mutual threading of vortex rings // Proc. Roy. Soc. London.– 1922.– **A102**.– P. 111–131.
12. Гуржий А.А. О классификации взаимодействия двух тонких вихревых колец в идеальной жидкости // Гидромеханика.– 1994.– N.68.– С. 79–85.
13. Shashikanth B.N., Marsden J.E. Leapfrogging vortex rings: Hamiltonian structure, geometric phases and discrete reduction // Fluid Dyn. Res.– 2003.– **33**.– P. 333–356.
14. Луговцов Б.А., Сенницкий В.Л. Об импульсе вихревого кольца, движущегося в трубе/ Сб. Динамика сплошной среды // АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.– 1973.– N16.– С. 53–63.

15. *Brasseur J.Z.* Evolution characteristics of vortex rings over a wide range Reynolds numbers // *Pap/AIAA.*– 1986.– N 1097.– P. 1–11.
16. *Escudier M.P., Zehnder N.* Vortex-flow regimes // *J. Fluid Mech.*– 1982.– **115**.– P. 105–121.
17. *Herrada M.A., Perez-Saborid M., Barrero A.* Vortex breakdown in compressible flows in pipes // *Phys. Fluids.*– 2003.– **15**, N. 8.– P. 2208–2218.
18. *Nitsche M., Krasny R.* A numerical study of vortex ring formation at the edge of a circular tube // *J. Fluid Mech.*– 1994.– **276**.– P. 139–161.
19. *Гуржий А.А.* Взаимодействие осесимметричных вихревых колец в бесконечной трубе, заполненной идеальной жидкостью // *Прикл. гидромеханика.*– 2008.– Т. 10, N 4.– С. 26–42.
20. *Вилля Г.* Теория вихрей.– М.,Л.: Гостехиздат, 1936.– 266 с.
21. *Meleshko V.V., van Heijst G.J.F.* Interacting two-dimensional vortex structures: point vortices, contour kinematics and stirring properties // *Chaos, Soliton & Fractals.*– 1994.– **4**.– P. 977–1010.
22. *Weidman P.D., Riley N.* Vortex rings pairs: numerical simulation and experiment // *J. Fluid Mech.*– 1993.– **257**.– P. 311–337.
23. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.– М.: Наука, 1985.– 253 с.