

УДК 539.3

АДАПТИРОВАННЫЙ МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ К ЗАДАЧЕ АДВЕКЦИИ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ МОРСКИМИ ТЕЧЕНИЯМИ

А. А. ГУРЖИЙ*, Д. И. ЧЕРНИЙ**

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев,

**Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Получено 09.12.09

Рассматривается задача об адвекции пассивной примеси морскими течениями в областях со сложной геометрией в приближении идеальной несжимаемой жидкости. Задача решена адаптированным к задачам двухмерной адвекции численным методом, в основу которого положен метод дискретных особенностей. Размещение системы вихрей на фиксированном расстоянии от береговой линии позволяет существенно улучшить выполнение граничного условия. Оптимальное смещение вихрей от границы определяется из условия минимума числа обусловленности системы линейных алгебраических уравнений, сформированной для определения интенсивности вихрей. Численная модель позволяет учесть процесс формирования вихревых структур, образующихся при обтекании выступов береговой линии. Адвекция пассивной примеси анализируется на примере численного решения задачи двухмерного течения жидкости в проливе, содержащем остров. Показано, что интенсивность процесса адвекции существенно усиливается при наличии острова и острых кромок в береговой линии.

Розглядається задача про адвекцію пасивної домішки морськими течіями в областях зі складною геометрією в наближенні ідеальної несжимаємої рідини. Задача розв'язана адаптованим до задач двовимірної адвекції чисельним методом, в основу якого покладений метод дискретних особливостей. Розміщення системи вихорів на фіксованій відстані від берегової лінії дозволяє істотно поліпшити виконання граничної умови. Оптимальне зміщення вихорів від межі визначається з умови мінімуму числа обумовленості системи лінійних алгебраїчних рівнянь, сформованої для визначення інтенсивності вихорів. Чисельна модель дозволяє врахувати процес формування вихрових структур, утворених при обтіканні виступів берегової лінії. Адвекція пасивної домішки аналізується на прикладі чисельного розв'язку задачі двовимірної течії рідини в протоці, що має острів. Показано, що інтенсивність процесу адвекції істотно посилюється за наявності острова і гострих кромок у береговій лінії.

The problem of an advection of passive impurity by sea flows in regions with complex geometry in approaching of an ideal incompressible fluid is considered. The problem is solved by numerical method an adapted to the two-dimensional problems based on the discrete singularity method. Placing of the system of point vortices on the fixed distance from the coastline allows substantially improve the satisfaction of the boundary condition. The optimal displacement of vortices from the border is defined from the condition of minimum of conditionality number of a linear algebraic system of equations formed for the determination of vortex intensities. The numeral model allows to take into account the process of forming of vortex structures flow around ledges of coastline. The advection of passive impurity is analysed on the example of numerical solution of the problem of the two-dimensional fluid flow in a channel, which contains an island. It is shown that the intensity of the advection process substantially increases for geometry, which has the island and sharp edges of the coastline.

ВВЕДЕНИЕ

Стремительное развитие новых технологий и экологическая безопасность ставят перед исследователями широкий перечень прикладных задач, которые уже сегодня требуют своего разрешения. Нередко активная и непоследовательная деятельность человека на море приводит к экологическим авариям, в результате которых некоторый объем вредных веществ попадает на морскую поверхность. Именно в этот момент специалистам по чрезвычайным ситуациям необходимо срочно принимать решения по ликвидации последствий. Необходимо как можно быстрее и точнее спрогнозировать распространение загрязнения. Часто десятки минут имеют важное значение для принятия эффективных решений по ликвидации последствий

аварий и минимизации возможных потерь, которые их сопровождают.

Большинство задач, связанных с прогнозированием распространения загрязнений, опираются на ставшие уже классическими методы решения и требуют значительных вычислительных ресурсов. Наиболее интересные с вычислительной точки зрения методы обсуждаются в содержательных обзорах [1–5]. Многие из этих методов принимают во внимание различные физические процессы, происходящие на морской поверхности. Это, в свою очередь, значительно увеличивает продолжительность вычислений. Однако не всегда увеличение мощности вычислительной техники может привести к быстрому и успешному решению задачи. Весьма актуальными в этих случаях являются численные методы решения, которые после получения необходимых данных для заданного мор-

ского региона позволяют в режиме, опережающем реальное время, качественно спрогнозировать динамику распространения загрязнения. С этих позиций разработка новых эффективных прогностических методов и алгоритмов расчета динамики морских загрязнений представляет определенный научный и практический интерес.

В большинстве случаев данные, которые поступают в вычислительные центры, представляют собой спутниковые снимки с образованными уже на морской поверхности пятнами загрязнений. Они могут находиться на поверхности на протяжении достаточно большого промежутка времени. В этом случае задачу о распространении и перемешивании загрязнения с чистой морской водой можно в первом приближении считать двухмерной.

Среди основных механизмов перемешивания жидкостей можно выделить два наиболее важных: диффузионное перемешивание, вызванное хаотическим движением молекул, и конвективное перемешивание, определяемое неоднородным движением жидкости. Анализ масштабов перемешивания жидкостей морскими течениями позволяет сделать вывод о том, что диффузионные эффекты не являются преобладающими, особенно на начальных этапах распространения загрязнений. Доминирующим в процессе перемешивания оказывается конвективный механизм, который определяется глобальным движением жидкости. В современной литературе [6–8] это явление получило название *адвекция жидкости* и находит широкое применение при анализе закономерностей процесса перемешивания жидкостей различного масштаба [9–13].

Если физические свойства примеси и окружающей жидкости отличаются незначительно, то анализ процесса адвекции сводится к отслеживанию траекторий движения лагранжевых частиц в эйлеровом поле скорости. В этом случае уравнения движения отдельной жидкой частицы, расположенной в точке $\mathbf{r}(t)$, сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка (задача Коши)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ – поле скорости рассматриваемого течения.

Анализ процесса адвекции пассивной примеси существенно упрощается, если в начальный мо-

мент выделить границу (замкнутый контур) области загрязнения системой пассивных точек (маркеров) и следить за эволюцией этих маркеров во времени. Упорядоченное соединение последовательности маркеров для произвольного момента времени позволяет сформировать новое положение границы выделенной области. В настоящее время существует несколько численных методов [14–16], которые адаптированы к различным видам деформации непрерывных контуров в двухмерных гидродинамических течениях. Все методы при анализе процессов адвекции требуют решения гидродинамической задачи и определения распределения поля скорости течения в произвольный момент времени.

В последнее время в вычислительной гидромеханике нашел широкое распространение метод дискретных особенностей [17–22]. Наряду с простотой численной реализации, главным его преимуществом по сравнению с другими вычислительными методами является возможность описания течений, которые развиваются в областях со сложной геометрией границ.

Основная идея метода дискретных особенностей сводится к формированию на границах рассматриваемого течения системы точечных вихрей, суперпозиция которых позволяет аппроксимировать реальное течение циркуляционным [17, 21, 23]. В приближении идеальной жидкости интенсивность вихрей подбирается такой, чтобы в некотором наборе контрольных точек (*точки коллокации*) выполнялось граничное условие непротекания жидкости через береговую линию. В результате формируется система линейных алгебраических уравнений, решение которой позволяет определить интенсивности вихрей. Следует заметить, что количество вихрей и их размещение на границе области течения выбирает исследователь, следуя определенным рекомендациям [21, 23, 24].

Пример распределения функции тока в проливе, полученного после решения задачи методом дискретных особенностей, показан на рис. 1. Пространственное положение системы точечных вихрей отмечено на рисунке кружочками, а система точек коллокации, расположенных на береговой линии между вихрями, отмечена квадратиками. Видно, что граничное условие в областях, прилегающих к точкам коллокации, в первом приближении выполняется. Напротив, в областях, прилегающих к точечным вихрям, выполнение граничных условий нарушается. Однако во многих прикладных задачах [17, 20, 21, 24, 25] такое локальное невыполнение граничного условия на границе не вносит существенных ошибок при определении

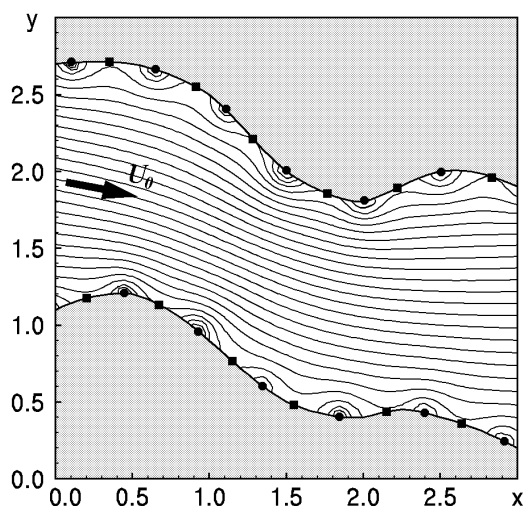


Рис. 1. Распределение функции тока в проливе, полученное после решения задачи методом дискретных особенностей

распределения поля скорости в областях, удаленных от границ на расстояния большие, чем мера дискретности задачи.

Известно [6, 26], что наиболее интенсивные режимы адвекции происходят как раз в областях, прилегающих к границам. Поэтому в задачах адвекции течение жидкости в этих областях должно быть описано наиболее точно. Для достижения гладкости решения в областях, прилегающих к береговой линии, необходимо потребовать выполнение граничного условия на всей границе. Можно сделать предположение, что именно это требование ограничивает применение метода дискретных особенностей при моделировании процессов переноса скалярных полей прибрежными течениями.

Цель настоящих исследований – модификация и адаптирование метода дискретных особенностей применительно к задачам адвекции пассивной жидкости в поле скорости морских течений со сложной геометрией береговой линии. Для адекватного численного моделирования процесса адвекции пассивной примеси необходимо обеспечить гладкость поля скорости в рассматриваемом течении и выполнение граничного условия на всей береговой линии.

1. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Рассмотрим течение идеальной несжимаемой

жидкости в проливе, показанном в определенном масштабе на рис. 1, на входе которого задано распределение скорости течения $U_0(s)$, где s – поперечная координата¹. Необходимо определить распределение поля скорости в рассматриваемом течении.

Известно [8, 27, 28], что функция тока $\Psi(x, y)$ течения жидкости, которая наведена одиночным точечным вихрем интенсивности Γ , расположенным в точке с координатами (x_v, y_v) , определяется выражением

$$\Psi(x, y) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln[(x_v - x)^2 + (y_v - y)^2]. \quad (3)$$

Если в рассматриваемую систему входят N точечных вихрей интенсивности Γ_i , ($i = 1, \dots, N$), то выражение для функции тока представляет собой суперпозицию вкладов со стороны каждого из вихрей:

$$\Psi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \ln[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2], \quad (4)$$

где (x_i, y_i) – координаты i -го точечного вихря.

Используя связь между функцией тока и полем скорости течения

$$U(x, y) = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V(x, y) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (5)$$

можно найти значение проекций скорости течения в произвольной точке.

Рассматриваемое течение ограничено береговой линией. Для удовлетворения граничного условия непротекания жидкости в терминах функции тока

$$\Psi(x, y)|_s = \text{const} \quad (6)$$

введем систему N точек коллокации и потребуем, чтобы в этих точках значения функции тока, наведенные системой N точечных вихрей, были одинаковы на каждом из берегов пролива. Разница в значениях функции тока на берегах определяется интегралом

$$\Delta \Psi = \int_0^h U(s) ds, \quad (7)$$

где h – ширина пролива. Часто при проведении вычислений на одном из берегов пролива выбирают $\Psi^{(1)} = 0$, тогда на другом берегу функция тока принимает значение $\Psi^{(2)} = \Delta \Psi$.

¹В некоторых случаях исходными данными может служить срез глубин в поперечном сечении пролива и объемный расход жидкости в этом сечении. Этих данных достаточно для того, чтобы определить профиль скорости $U_0(s)$ на входе пролива.

Накладывая условие равенства значений функции тока в точках коллокации, принадлежащих каждому из берегов, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных интенсивностей Γ_i точечных вихрей:

$$[A_{ij}]\Gamma_i = \Psi_j, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (8)$$

где

$$[A_{ij}] = -\frac{1}{4\pi} \ln[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]. \quad (9)$$

Здесь Ψ_j – значение функции тока в j -й точке коллокации.

Важным шагом при проведении вычислений с использованием метода дискретных особенностей является выбор пространственного положения точечных вихрей и точек коллокации. Удачный выбор определяет успех решения задачи. Количество точек коллокации зависит от изрезанности береговой линии рассматриваемого региона. Следуя [23], напомним рекомендацию при выборе расстояний между точками коллокации: чем меньше радиус кривизны береговой линии, тем чаще должны располагаться точки коллокации. В этом случае метод дискретных особенностей позволяет с заданной погрешностью построить криволинейную береговую линию, которая может содержать различные выступы, заливы, протоки и искусственные сооружения. Погрешность решения краевой задачи вблизи границ зависит от точности аппроксимации границы [21].

Для обеспечения гладкости распределения поля скорости у границы течения в рассматриваемом численном методе предлагается сместить положение точечных вихрей на расстояние Δ вглубь береговой линии. На рис. 2 показан пример расположения системы точек коллокации (квадратики) и системы точечных вихрей (кружочки) на фрагменте береговой линии. Каждый вихрь расположен на прямой AD – перпендикуляре к касательной BC с границей течения, на расстоянии Δ от точки коллокации A .

Известно [22], что уменьшение смещения Δ приводит к ухудшению выполнения граничного условия на береговой линии, особенно в области, равноудаленной от точек коллокации. Присвоение Δ большого значения по сравнению с расстояниями между точками коллокации приводит к тому, что система алгебраических уравнений (8) становится вырожденной и численное ее решение становится проблематичным: требуется применение специальных методов решения. Существует оптимальное значение Δ для заданной системы точек коллокации, которое может быть определено из условия

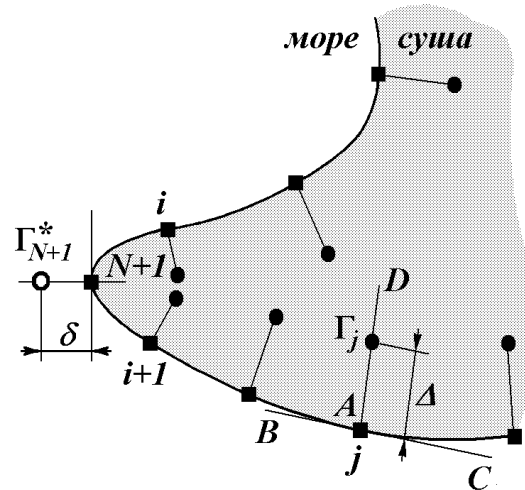


Рис. 2. Схема расположения точечных вихрей и точек коллокации вдоль береговой линии

минимума числа обусловленности алгебраической системы уравнений (8).

В численных методах [29, 30] под числом C обусловленности понимают число, которое позволяет оценить точность численного решения линейной алгебраической системы уравнений (8) в зависимости от точности представления вектора правых частей. Для любой невырожденной матрицы $[A]$ число обусловленности представляет собой [29]

$$C = \text{Cond}[A] = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|. \quad (10)$$

При этом справедливо неравенство

$$\frac{|\delta x|}{|x|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{|\delta b|}{|b|}. \quad (11)$$

Если в (11) отношение $|\delta b|/|b|$ интерпретировать как меру относительной неопределенности вектора правых частей (для вещественных чисел с двойной точностью имеем $\approx (10^{-20} \dots 10^{-16})$), то произведение $\text{Cond}[A] \cdot |\delta b|/|b|$ определяет ограничение сверху относительной неопределенности вектора решения $|\delta x|/|x|$.

На рис. 3 показана зависимость числа обусловленности $C = \text{Cond}[A]$ от смещения Δ вихрей для системы алгебраических уравнений (8), составленной для точек коллокации на рис. 1. Видно, что зависимость имеет минимальное значение при $\Delta \approx 0.31$, при котором численное решение алгебраической системы достигается с наибольшей точностью.

Значения Γ_i , где $i = 1, \dots, N$, полученные после решения системы (8), позволяют определить по

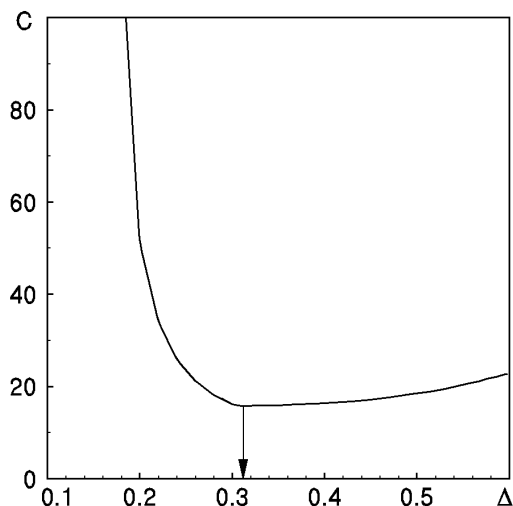


Рис. 3. Зависимость числа обусловленности алгебраической системы уравнений (8) от смещения Δ системы точечных вихрей от береговой линии

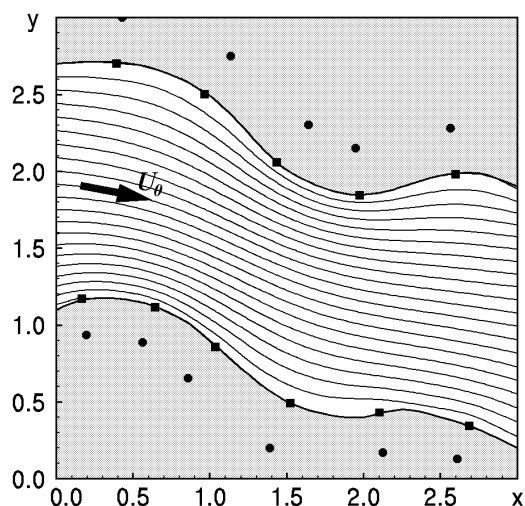


Рис. 4. Распределение функции тока в проливе, полученное после решения задачи адаптированным методом дискретных особенностей в проливе с береговой линией, представленной на рис. 1

формуле (4) распределение функции тока $\Psi(x, y)$ в рассматриваемом проливе. Результаты вычислений показаны на рис. 4, на котором нанесены линии равного значения функции тока по аналогии с рис. 1. Видно, что линии тока плавно огибают границы пролива, что свидетельствует о хорошем выполнении граничного условия (6). Совпадение крайних линий тока с границами области течения позволяет обеспечить условие непроницаемости одновременно во всех точках береговой линии пролива.

Береговая линия может содержать острые выступы, при обтекании которых морские течения могут формировать срывающиеся крупномасштабные вихревые структуры. Предлагаемая вычислительная модель позволяет учитывать образование и отрыв таких вихрей. Для этого достаточно на выступе поместить дополнительную точку коллокации, отмеченную индексом $N + 1$ на рис. 2, и вихрь интенсивности Γ_{N+1} , удаленный от выступа на расстояние δ . Этот вихрь в рассматриваемом течении может перемещаться, но значение его интенсивности подбирается таким, чтобы наведенное значение функции тока в $(N + 1)$ -ой точке коллокации имело равное значение по отношению к другим точкам коллокации на рассматриваемой береговой линии.

Перемещение вихря приводит к изменению расстояния от вихря до соответствующей ему точки коллокации, что в свою очередь приводит к изменению интенсивности вихря. Как только рассто-

яние между подвижным вихрем и соответствующей ему точкой коллокации превысит некоторое значение δ_{cr} , в рассматриваемую систему вносится $(N + 2)$ -й вихрь в начальную точку, которая использовалась для $(N + 1)$ -го вихря. При этом значение интенсивности удалившегося вихря фиксируется. Вклад подвижных вихрей в линейной алгебраической системе (8) необходимо учитывать со знаком минус в правой части уравнений. Такие подвижные системы вихрей часто используются в вычислительных методах, подробный обзор которых можно найти в [20, 31].

Для того, чтобы подвижные вихри не вносили существенных возмущений в поле скорости в областях, прилегающим к вихрям, можно вместо точечных вихрей рассматривать вихрь с распределенным полем завихренности. С вычислительной точки зрения удобно использовать вихри Ренкена. Область завихренности такого вихря сконцентрирована в круговой области радиуса a , намного меньшего характерного размера задачи. При этом поле функции тока вихря Ренкена интенсивности Γ , расположенного в точке (x_v, y_v) , определяется выражением [28]

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} -\frac{\Gamma}{4\pi} \left[\frac{r^2}{a^2} - 1 + 2 \ln a \right] & \text{при } r \leq a, \\ -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r & \text{при } r > a, \end{cases} \quad (12)$$

где $r^2 = (x_v - x)^2 + (y_v - y)^2$.

В реальных течениях интенсивность оторвавшихся от береговой линии вихрей с течением времени уменьшается. При проведении вычислений можно принять во внимание диссипацию вихрей, оторвавшихся в момент t_0 от выступа береговой линии. При этом интенсивность крупномасштабных вихревых структур меняется во времени по экспоненциальному закону [27, гл. 334, а].

Для определения распределения поля функции тока в проливе со сложной конфигурацией береговой линии необходимо выбрать систему N точек коллокации, каждой из которых в соответствие необходимо поставить точечный вихрь, смещенный от береговой линии на расстояние Δ . Если береговая линия имеет M выступов, то необходимо добавить в рассматриваемую систему еще M точек коллокации, каждой из которых ставится в соответствие подвижный вихрь Ренкена, смещенный в сторону моря от береговой линии на расстояние δ . Интенсивности вихрей определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$[\mathbf{A}_{ij}]\Gamma_i = 4\pi\Psi_j + \sum_{k=1}^K \Gamma_k \ln[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2], \quad i, j = 1, \dots, N, N+1, \dots, N+M, \quad (13)$$

где

$$[\mathbf{A}_{ij}] = -\ln[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2], \quad \Gamma_k = \Gamma_k^{(0)} \exp[-\alpha(t - t_k)]. \quad (14)$$

В приведенном выражении N – количество фиксированных точечных вихрей; M – количество подвижных вихрей Ренкена, расположенных у береговой линии; K – количество оторвавшихся от выступов вихрей Ренкена, расположенных в средней части течения; t_k – момент времени, при котором вихрь Ренкена оторвался от выступа береговой линии; $\Gamma_k^{(0)}$ – интенсивность вихря Ренкена в момент отрыва; α – показатель диссипации интенсивности подвижных вихрей.

Распределение функции тока определяется суммированием вкладов каждого из вихрей в рассматриваемой системе:

$$\Psi(x, y) = - \sum_{i=1}^{N+M} \frac{\Gamma_i}{4\pi} \ln[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2] - \sum_{k=1}^K \Psi_k^*, \quad (15)$$

где

$$\Psi_k^* = \begin{cases} -\frac{\Gamma}{4\pi} \left[\frac{r_k^2}{a^2} - 1 + 2 \ln a \right] & \text{при } r_k \leq a, \\ -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r_k & \text{при } r_k > a, \end{cases} \quad r_k^2 = (x_k - x)^2 + (y_k - y)^2. \quad (16)$$

Последующее дифференцирование выражений (15) по координатам в соответствии с (5) позволяет определить распределение поля скорости течения жидкости в произвольной точке рассматриваемого пролива.

2. АДВЕКЦИЯ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В МОРСКОМ ПРОЛИВЕ

Рассмотрим процесс адвекции пассивной примеси в проливе, береговая линия которого показана в некотором масштабе на рис. 5,а. Направление течения указано стрелкой. В проливе имеется остров, его контуры в большем масштабе показаны на рис. 5, б. Обезразмерим все параметры задачи на некоторый характерный размер L_0 , связанный с масштабом карты, и на характерный интервал времени T_0 , в течение которого развивается течение. В этом случае все скорости будут проинормированы на величину L_0/T_0 , а интенсивности вихрей – на L_0^2/T_0 .

Для описания береговой линии введем систему $N = 63$ точек коллокации, которые показаны квадратами на рис. 5. При этом 20 точек расположены на северном берегу пролива, 18 точек формируют южный берег и 25 отведены для формирования береговой линии острова. Напротив каждой точки коллокации размещаем точечный вихрь интенсивности Γ_i , ($i = 1, \dots, 63$). Каждый вихрь размещается на прямой, перпендикулярной к касательной для береговой линии, построенной в точке коллокации. Расстояние Δ_i между вихрями и соответствующими точками коллокации выбиралось из условия минимума числа обусловленности (10) линейной алгебраической системы уравнений (13).

На рис. 5,а видно, что береговая линия имеет четыре выступа: по одному – на северном и южном побережье пролива, и два – на острове. На этих выступах помещаем дополнительные 4 точки коллокации и 4 вихря Ренкена интенсивности Γ_m с ядром завихренности, сконцентрированным в круговой области радиуса $a = 0.02$. Эти вихри отмечены на рисунках полыми кружочками.

Видно, что течение жидкости разделяется островом примерно на равных по объемному ра-

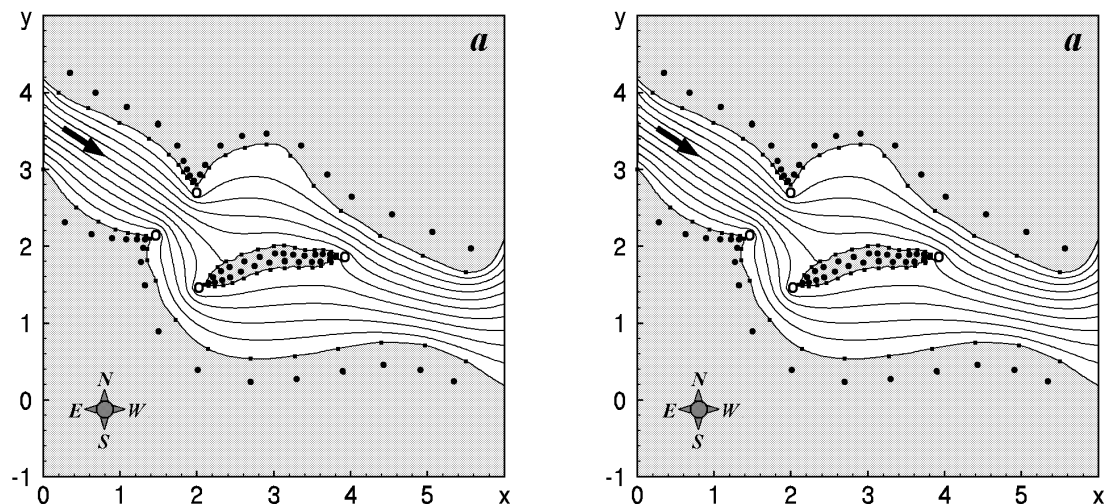


Рис. 5. Распределение функции тока в течении с береговой линией, которая содержит систему фиксированных и подвижных вихревых структур:
 а – общий вид пролива; б – область, прилегающая к острову

сходу потока, которые обтекают остров с северной и южной сторон. В этом случае можно определить значение функции тока в точках коллокации на береговой линии острова в соответствии с (7).

Распределение функции тока в проливе, полученное после решения линейной алгебраической системы уравнений (13), показано на рис. 5,а, на котором нанесены линии равного уровня с эквидистантным шагом $\Delta\Psi = 0.10$ (на рис. 5,б линии уровня показаны с $\Delta\Psi = 0.05$). Видно, что предельные линии тока повторяют контур береговой линии рассматриваемого пролива, следовательно, граничное условие (6) выполняется вдоль всей береговой линии.

Пусть в некоторый момент времени на входе пролива появилось загрязнение. Предположим, что границы этой области в начальный момент представляют собой круг с радиусом $R_0 = 0.4$ с центром в точке, показанной на рис. 6,а.

Для отслеживания динамики процесса адвекции пассивного контура, охватывающего область загрязнения в рассматриваемом течении, введем систему $N_m = 180$ маркеров. Упорядоченное соединение маркеров позволяет сформировать исходную границу области загрязнения, которая выделена черным цветом на рис. 6,а. Исследования показывают, что при адвекции траектории жидких частиц проявляют сильную зависимость от своего начального положения. В результате расстояние между двумя ближайшими маркерами может сильно увеличиваться. Поэтому для формирова-

ния непрерывной линии, описывающей границы области загрязнения, необходимо в процессе вычислений постоянно добавлять определенное количество маркеров.

Для организации процедуры добавления маркеров в работе использовался метод кусочной сплайн-интерполяции [15]. Этот численный метод анализирует деформацию контура и, при необходимости, добавляет нужное количество маркеров, чтобы расстояния между соседними маркерами, формирующими непрерывный контур, сохранялись в пределах заданного диапазона расстояний между маркерами.

Результаты моделирования процесса адвекции пассивной примеси в проливе представлены на рис. 6,б-е. На начальном этапе пятно примеси достаточно быстро смещается к сечению с выступами, с которых сходит последовательность крупномасштабных вихревых структур. Эти вихри закручиваются в соответствии со знаком циркуляции, частично уменьшая эффективное сечение канала для пассивной примеси (рис. 6,б). К безразмерному моменту времени $t = 1.0$ примесь достигает острова, разделяется примерно на две равные части, которые обтекают остров с обеих сторон (рис. 6,в). Расчеты показывают, что на начальном этапе подвижные вихревые структуры, образованные на выступах в рассматриваемом проливе, оказывают незначительное влияние на распространение загрязнения в канале.

Исследования показывают, что пассивная при-

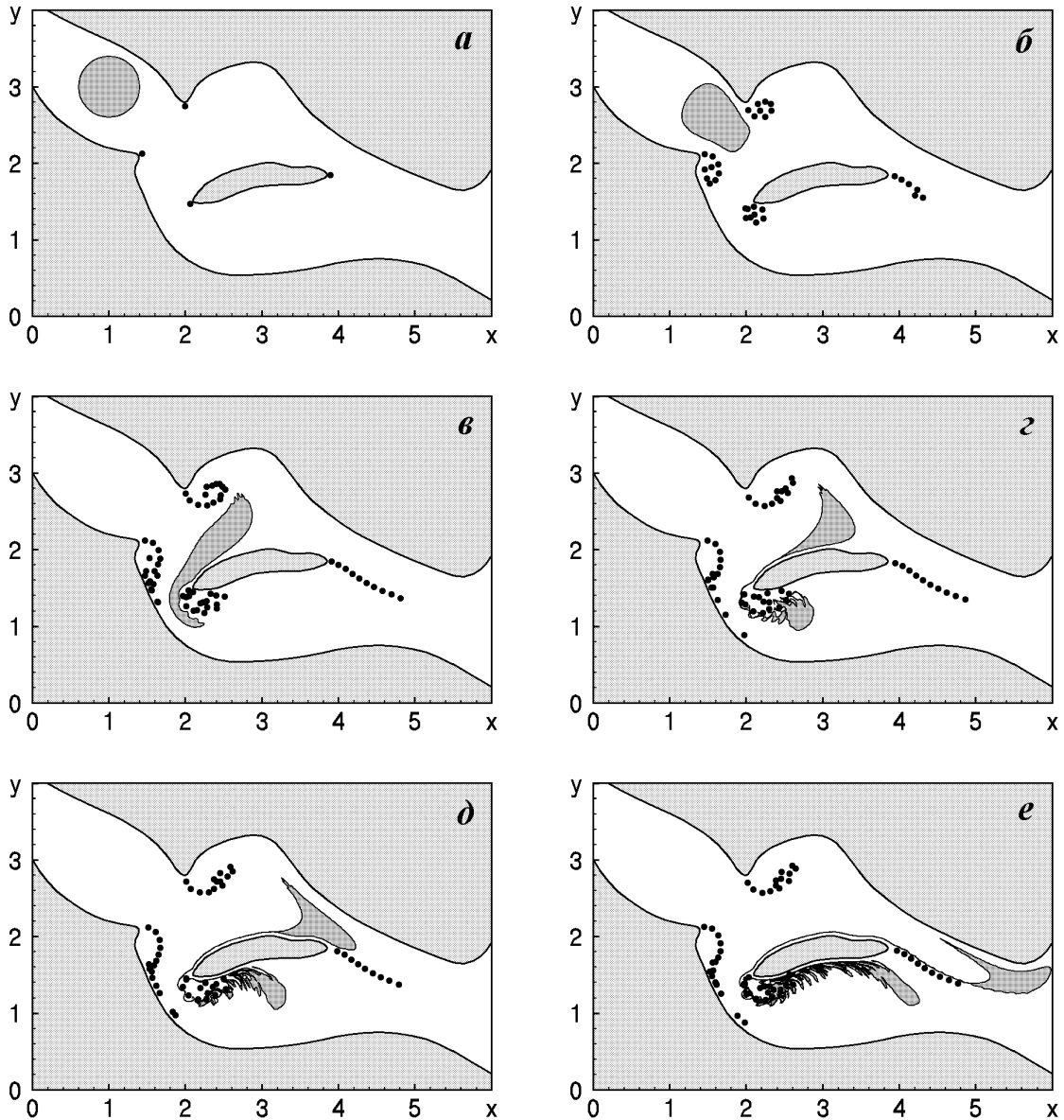


Рис. 6. Распространение пятна пассивного загрязнения, изначально расположенного на входе пролива, с течением времени:
 $a - t = 0.0$, $b - t = 0.4$, $c - t = 1.0$, $d - t = 1.5$, $e - t = 2.0$, $e - t = 3.0$

месь, попавшая в южную часть острова, попадает под влияние крупномасштабных вихревых структур и подвергается интенсивному перемешиванию с чистой жидкостью. Положение подвижных вихрей и загрязнения в момент времени $t = 1.5$ показаны на рис. 6, *д*. С течением времени примесь смещается в тыльную область острова, постепенно отрывается от него и сносится течением к устью пролива. Следует обратить внимание, что загрязнение, которое обтекает остров с северной

стороны, не участвует в интенсивном перемешивании, несмотря на то, что пассивная жидкость находится в непосредственной близости к системе крупномасштабных вихревых структур, образованных в северной части острова. Характерное положение пассивной примеси в безразмерный момент времени $t = 2.0$ представлено на рис. 6, *д*.

Финальная стадия адвекции в рассматриваемом проливе показана на рис. 6, *е*. Видно, что загрязнение в проливе разделяется на две части. Северная

часть сносится течением и практически не перемещается с окружающей жидкостью. В то же время, южная часть загрязнения подвергается интенсивному перемешиванию в восточной части острова. В эту область течения сносится система крупномасштабных вихревых структур, в поле скорости которых наступает режим интенсивной адвекции.

ВЫВОДЫ

Рассмотрена задача о двумерной адвекции пассивной примеси морскими течениями с произвольными границами. Численное решение задачи основано на методе дискретных особенностей, адаптированном к двумерным задачам адвекции. Предлагаемый адаптированный метод предусматривает предварительную оцифровку береговой линии морского региона. Для этого вводится последовательность контрольных точек (точек коллокации), частота следования которых определяется радиусом кривизны береговой линии. Каждой точке коллокации в соответствие ставится точечный вихрь, интенсивность которого определяется из условия непротекания жидкости в точках коллокации. Главной особенностью предлагаемого вычислительного метода является смещение системы вихрей вглубь береговой линии. При этом исчезают сингулярности в распределении поля скорости в непосредственной близости к границам течения.

Однако такое смещение приводит к тому, что матрица линейной алгебраической системы уравнений, сформированная для определения интенсивностей вихрей, ухудшается за счет того, что ее главная диагональ не является преобладающей. Численное решение таких систем уравнений требует вычислительной аккуратности и соответствующего контроля точности вычислений. Исследования показали, что существует оптимальное смещение системы вихрей, при котором число обусловленности матрицы системы линейных алгебраических уравнений имеет минимум и, следовательно, точность определения значений интенсивностей системы вихрей является максимальной.

Адаптированный метод дискретных особенностей позволяет учесть процессы отрыва крупномасштабных вихревых структур при обтекании выступов береговой линии морскими течениями. Для этого вводится система дополнительных точек коллокации и система подвижных вихревых структур. При удалении таких вихрей от выступов интенсивность вихрей фиксируется и в рассма-

триваемое течение снова вводятся дополнительные вихри, которые снова располагаются у выступов береговой линии. Часто [17, 21, 23, 32] в качестве подвижных вихрей используются вихри Ренкена, которые не имеют сингулярности в распределении поля скорости.

В качестве демонстрационного примера рассмотрено решение задачи об адвекции пассивной примеси морским течением в проливе, береговая линия которого представлена в определенном масштабе на рис. 5. Исследования показывают, что течение в рассматриваемом проливе разделяет выделенную область пассивной примеси примерно на две равные части, одна из которых сносится течением в северной части острова, а другая – в южной части. Северная часть слабо перемешивается течением в проливе, несмотря на то, что эта часть примеси проходит рядом с системой подвижных вихрей, сформированных на выступах береговой линии. В то же время, южная часть примеси попадает в зону интенсивного перемешивания в тыльной зоне острова, в которую попадают подвижные вихри, сформированные на южном выступе острова.

Численное решение задачи не требует больших вычислительных ресурсов и позволяет в первом приближении достаточно быстро получить предварительный прогноз распространения области загрязнения, попавшей на морскую поверхность. Отметим, что расчеты, основанные на адаптированном методе дискретных особенностей, проходят в режиме, который значительно превышает режим реального времени. Предварительные результаты адвекции, полученные указанным выше методом, могут оказать существенную помощь при формировании решений по ликвидации последствий экологических аварий в непосредственной близости к береговым линиям на море и в океане.

Авторы статьи выражают глубокую признательность проф. В. В. Мелешко (Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Украина) за уделенное к исследованиям внимание, полезные советы и активное обсуждение предварительных результатов.

1. Lucas D.H. Developments in air pollution measurement // Phil. Trans. Roy. Soc. London.– 1969.– **265**, N.1161.– P. 143–151.
2. Peirson D.H. Interhemispheric transfer of radioactive pollution from nuclear explosions // Phil. Trans. Roy. Soc. London.– 1969.– **265**, N.1161.– P. 295–300.
3. Гилл А. Динамика атмосферы и океана, Т. 1.– М.: Мир, 1986.– 397 р.

4. Heaps N.S. A Two-Dimensional Numerical Sea Model // Phil. Trans. Roy. Soc. London.– 1969.– **265**, N 1160.– P. 93–137.
5. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.– М.: Наука, 1985.– 253 с.
6. Ottino J.M. The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport.– Cambridge: Cambridge University Press, 1989.– 683 p.
7. Aref H. Chaotic advection of fluid particle // Trans. Roy. Soc. London.– 1990.– **333**.– P. 273–288.
8. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур.– Киев: Наукова думка, 1993.– 279 с.
9. Jones S.W. The enhancement of mixing by chaotic advection // Phys. Fluids.– 1991.– **A3**, N 5.– P. 1081–1086.
10. Perugini D., Poli G., Mazzuoli R. Chaotic advection, fractals and diffusion during mixing of magmas: evidence from lava flows // J. Volcan. Geotherm. Res.– 2003.– **124**.– P. 255–279.
11. Rom-Kedar V., Zaslavsky G.M. Chaotic kinetics and transport (Overview) // Chaos.– 2000.– **10**, N 1.– P. 1–2.
12. Karolyi G., Pentek A., Scheuring I., Tel T., Torozkai Z. Chaotic flow: The physics of species coexistence // Proc. Nation. Acad. Sci. USA.– 2000.– **97**, N 25.– P. 13661–13665.
13. Cetegen B.M., Aguirre J.P. Analysis of molecular mixing and chemical reaction in a vortex pair // Phys. Fluids.– 1990.– **A2**, N 12.– P. 2211–2216.
14. Dritchel D.G. Contour dynamics and contour surgery: numerical algorithms for extended, high-resolution modelling of vortex dynamics in two-dimensional, inviscid, incompressible flows // Comp. Phys. Per.– 1989.– **10**.– С. 77–146.
15. Гуржий О.А., Мелешко В.В., ван Хейст Г.Я.Ф. Метод кусковой сплайн - интерполяции в задаче про адекватію пасивної домішки у відомому полі швидкості // Доп. НАН України.– 1996.– N 8.– С. 54–62.
16. Zabusky N.J., Huges M.H., Roberts K.V. Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions // J. Comp. Phys.– 1997.– **135**.– С. 220–226.
17. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью.– М.: Наука, 1978.– 351 с.
18. Веретенцев А.Н., Рудяк В.Я., Яненко Н.Н. О построении дискретных вихревых моделей течений идеальной несжимаемой жидкости // Журн. вычис. математики и мат. физики.– 1986.– Т. 26, N 1.– С. 103–113.
19. Cottet G.-H., Konmoutsakos P.D. Vortex methods: theory and practice.– Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2000.– 314 p.
20. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел.– М.: Наука, 1988.– 232 с.
21. Довгий С.О., Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных рівнянь. Теорія та застосування.– К.: Наукова думка, 2004.– 510 с.
22. Сарпкая Т. Вычислительные методы вихрей // Современное машиностроение. Серия А.– 1989.– N 10.– С. 1–60.
23. Горелов Д.Н. К выбору контрольных точек в методе дискретных вихрей // Прикл. механика и техн. физика.– 1990.– N 1.– С. 167–170.
24. Черний Д.И. Аппроксимация решения начально-краевой задачи с подвижными границами // Обчислювальна та прикладна математика.– 1997.– Вип. 2(82).– С. 112–123.
25. Войцеховський С.О., Гаркуша В.І., Витько В.П., Кондратенко О.В., Рябоконеко О.Д., Хорошилов О.В., Черний Д.І. Математична та інформаційна модель гідрологічних процесів // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки.– 2004.– Вип. 4.– С. 276–282.
26. Гуржий А.А., Мелешко В.В., ван Хейст Г.Я.Ф. Режимы хаотического перемешивания жидкости в круге парой точечных вихрей / В кн. "Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей"(под ред. Борисова А.В. и др.) // Москва, Ижевск.– Ин-т компьютерных исследований.– 2003.– С. 441–467.
27. Ламб Г. Гидродинамика.– М.,Л.: Гостехиздат, 1947.– 928 с.
28. Вилля Г. Теория вихрей.– М.,Л.: Гостехиздат, 1936.– 266 с.
29. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений.– М.: Мир, 1969.– 167 с.
30. Форсайт Дж., Малкольм М., Коулер К. Машинные методы математических вычислений.– М.: Мир, 1980.– 210 с.
31. Салтанов Н.В., Горбань В.А. Вихревые структуры в жидкости: аналитические и численные решения.– Киев: Наукова думка, 1993.– 244 с.
32. Белоцерковский С.М. Метод численного решения пространственной задачи о диффузии вихрей / Труды Военно-воздушной инженерной академии им. Н.Е.Жуковского // М.: Изд. Академии, 1986.– Вып. 1313.– С. 40–51.