

УДК 532+533.2

СЕПАРАЦИЯ ЧАСТИЦ В ГРАНУЛИРОВАННОМ ПОТОКЕ

И. И. ИЕВЛЕВ

Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина, Харьков

Получено 30.10.2008

В данной работе исследуется процесс сепарирования твердых частиц в стационарном потоке гранулированной среды в плоском наклонном лотке. Для описания динамики основного потока используется реологическая модель Сэвиджа. Плотность частиц примеси считается малой, частицы между собой не взаимодействующие. Динамика этих частиц осуществляется под действием поля сил тяжести и воздействия на них основного потока. Численные результаты приведены в виде графиков – траекторий движения частиц.

У даній роботі досліджується процес сепарування твердих часток у стаціонарному потоці гранульованого середовища в плоскому похилому лотку. Для опису динаміки основного потоку використовується реологічна модель Сэвиджа. Щільність часток домішки вважається малою, частки між собою не взаємодіють. Динаміка цих часток здійснюється під впливом поля сил ваги і впливу на них основного потоку. Чисельні результати наведені у вигляді графіків – траекторій руху часток.

Separation's process of the firm particles in a stationarity stream of the granulated environment on the inclined tray is studying in this work. For the description of dynamics of the basic stream is used a Savig's reological model. Density of particles is considered small, the particles among themselves isn't acting. Dynamics of these particles is carried out under the influence of a field of a gravity and influences on them of the basic stream. Numerical results are giving in the form of the graphics - the trajectories of the particles.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе исследуется динамика примеси в виде твердых частиц в потоке гранулированной среды, движущейся по наклонному лотку в поле сил тяжести. Рассмотренная задача представляет интерес в связи с изучением сепарации примеси в технологических устройствах [1]. В данном случае двухкомпонентная среда состоит из несущей компоненты в виде гранулированной среды и дисперсной среды – твердых частиц. Исследование динамики таких сред является актуальным как с теоретической точки зрения, так и прикладной [1–3]. Из-за сложной формы частиц, входящих в обе компоненты, и их характера взаимодействия между собой возникают определенные проблемы при формулировке реологических соотношений [2, 5]. Реология существенно зависит от характера движения среды. В настоящей работе рассматриваются "быстрые" движения, когда применимы соотношения Сэвиджа [5]. Уравнения движения многофазных сред, опирающиеся на общие законы динамики, приведены в работе [6]. Здесь предполагается, что объемная плотность ν_2 частиц примеси мала по сравнению с плотностью частиц ν несущей фазы. Поэтому влиянием примеси на движение гранулированного потока можно пренебречь. Сама же дисперсная фаза может рассматриваться как ансамбль невзаимодействующих между собой частиц и исследование динамики примеси фактически сводится к рассмотрению динамики отдельной частицы в потоке гранулированной среды.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем считать, что частицы примеси имеют одинаковую сферическую форму радиуса a . Отличие от сферической формы можно учесть эмпирическим коэффициентом η . Тогда основную систему уравнений двухфазной среды можно записать в виде [6,7]

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \operatorname{div} \nu \mathbf{v}_1 = 0, \quad (1)$$

$$\rho_1^0 \nu \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \operatorname{div} \hat{\sigma} + \rho_1^0 \nu \mathbf{g}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \pi (\eta a)^3 \rho_2^0 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} &= \frac{4}{3} \pi (\eta a)^3 \rho_2^0 g \mathbf{e}_g + \\ &+ 6\pi \mu \eta a (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) - \frac{4}{3} \pi (\eta a)^3 \operatorname{div} \hat{\sigma}^0 + \\ &+ \rho_1^0 \nu \pi (\eta a)^3 K_M \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \end{aligned} \quad (3)$$

где ν – объемная плотность несущей фазы; ρ_i^0 – плотность материала частиц; \mathbf{v}_i – скорость i -той фазы; $\hat{\sigma}$ – тензор напряжений; \mathbf{g} – массовые силы, действующие на 1-ю (несущую) фазу; \mathbf{e}_g – единичный вектор, определяющий направление силы тяжести; $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}/2$; $\hat{\sigma}^0$ – "равновесная" часть тензора напряжений в несущей среде (см. ниже); K_M – феноменологический коэффициент силы Магнуса.

Здесь в правой части уравнения (3) первое слагаемое представляет собой силу тяжести, действующую на частицу. Второе слагаемое определяет силу сопротивления Стокса, а третье и четвертое – силы Архимеда и Магнуса соответственно [6].

В случае "быстрых" движений гранулированной среды воспользуемся реологическими соотношениями Сэвиджа [5]. Тензор напряжений разбивается на две части: "равновесную" $\hat{\sigma}^0$ и "неравновесную" $\hat{\sigma}^v$:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^0 + \hat{\sigma}^v, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^0 &= \alpha \hat{P} = \\ &= \alpha \left[\left(\frac{1}{k(\nu - \nu_0)} - 1 \right) |\nabla \nu|^2 \hat{\delta} + 2\nabla \nu \otimes \nabla \nu \right]; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\hat{\sigma}^v = m_0 \hat{T} = m_0 \frac{4\nu}{\nu_b - \nu} \sqrt{I_2(\hat{V})} \hat{V}, \quad (6)$$

α, k, m_0 – эмпирические константы; ν_b – объемная плотность частиц несущей фазы при их плотной упаковке; \hat{P} и \hat{T} – тензоры второго ранга, стоящие сомножителями при α и m_0 в соотношениях (5) и (6) соответственно; \hat{V} – тензор скоростей деформаций; $I_2(\hat{V})$ – второй инвариант тензора скоростей деформаций.

Выберем в качестве масштабов линейного размера L (глубину лотка), времени $\sqrt{L/g}$, скорости \sqrt{Lg} , массы $\rho_1^0 L^3$. Приведем все переменные к безразмерному виду. Тогда уравнение (1) по форме остается прежним, а уравнения (2) и (3) приобретут следующий вид:

$$\nu \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = -Eu \operatorname{div} \hat{P} + \operatorname{Re}^{-1} \operatorname{div} \hat{T} + \nu \mathbf{e}_g, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} &= \mathbf{e}_g + \frac{9}{\bar{a}^2 \operatorname{Re}} D \frac{\nu}{\nu_b - \nu} \sqrt{I_2(\hat{V})} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) - \\ &- Eu D \operatorname{div} \hat{P} + \frac{3}{4} D K_M \nu \omega \times (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\operatorname{Re} = \rho_1^0 L^2 m_0^{-1}$ – число Рейнольдса; $Eu = \alpha \{ \rho_1^0 g L^3 \}^{-1}$ – число Эйлера; $D = \rho_1^0 / \rho_2^0$, $\bar{a} = a/L$.

Граничные условия ставятся на твердой стенке S и свободной поверхности Γ . На S они соответствуют условию непротекания

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (9)$$

и равенству касательных напряжений силам трения и сопротивления [4]

$$|\mathbf{n} \cdot \hat{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}| = f_\Sigma |\mathbf{n} \cdot \hat{\sigma} \cdot \mathbf{n}| + D_\Sigma |\mathbf{v}_\tau|, \quad (10)$$

где f_Σ – коэффициент трения гранулированной среды о стенку [8]; D_Σ – коэффициент сопротивления [9]; \mathbf{n} – нормаль к поверхности; $\boldsymbol{\tau}$ – единичный касательный к поверхности вектор, определяющий направление вектора скорости на S .

На свободной поверхности Γ имеет место условие отсутствия напряжения

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\sigma} = 0, \quad (11)$$

\mathbf{n} – нормаль к поверхности Γ .

2. ПЛОСКИЙ ПОТОК ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЫ В НАКЛОННОМ ЛОТКЕ

Пусть плоский лоток направлен под углом θ к горизонту. Рассмотрим стационарный поток постоянной глубины h , движущийся под действием силы тяжести. Будем считать поле скоростей среды одномерным. Введем декартову систему координат так, чтобы ось Ox была направлена вдоль лотка вниз, а ось Oy была бы перпендикулярна к дну лотка. Тогда векторное поле скоростей будет иметь одну ненулевую составляющую и вместе с объемной плотностью ν несущей фазы будет зависеть только от переменной y :

$$\mathbf{v}_1 = (U(y), 0, 0), \quad \nu = \nu(y). \quad (12)$$

В этом случае тензоры \hat{P} и \hat{V} имеют простую структуру

$$\begin{aligned} P_{xx} = P_{zz} &= Eu \Phi \nu'^2, \quad P_{yy} = Eu \Psi \nu'^2, \\ V_{xy} = V_{yx} &= \frac{1}{2} U', \end{aligned} \quad (13)$$

(остальные компоненты тензоров равны нулю). Здесь приняты обозначения: $()'$ – дифференцирование по переменной y ;

$$\Phi = \frac{1}{k(\nu - \nu_0)} - 1, \quad \Psi = \Phi + 2. \quad (14)$$

Тензор \hat{T} будет иметь следующие ненулевые компоненты L :

$$T_{xy} = T_{yx} = \operatorname{Re}^{-1} \frac{\nu}{\nu - \nu_0} |U'| U'. \quad (15)$$

В этом случае уравнения движения потока будут представлены двумя обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} (\Psi \nu'^2) &= -Eu^{-1} \cos \theta, \\ \frac{d}{dy} \left(\frac{\nu}{\nu_b - \nu} U'^2 \right) &= -\operatorname{Re} \sin \theta. \end{aligned} \quad (16)$$

Граничные условия после простых преобразований примут вид:

$$\begin{aligned} U(0) &= \operatorname{Re}_\Sigma (\sin \theta - f_\Sigma \cos \theta), \\ \nu(1) &= \nu_0, \quad \nu'(1) = 0, \quad U'(1) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где

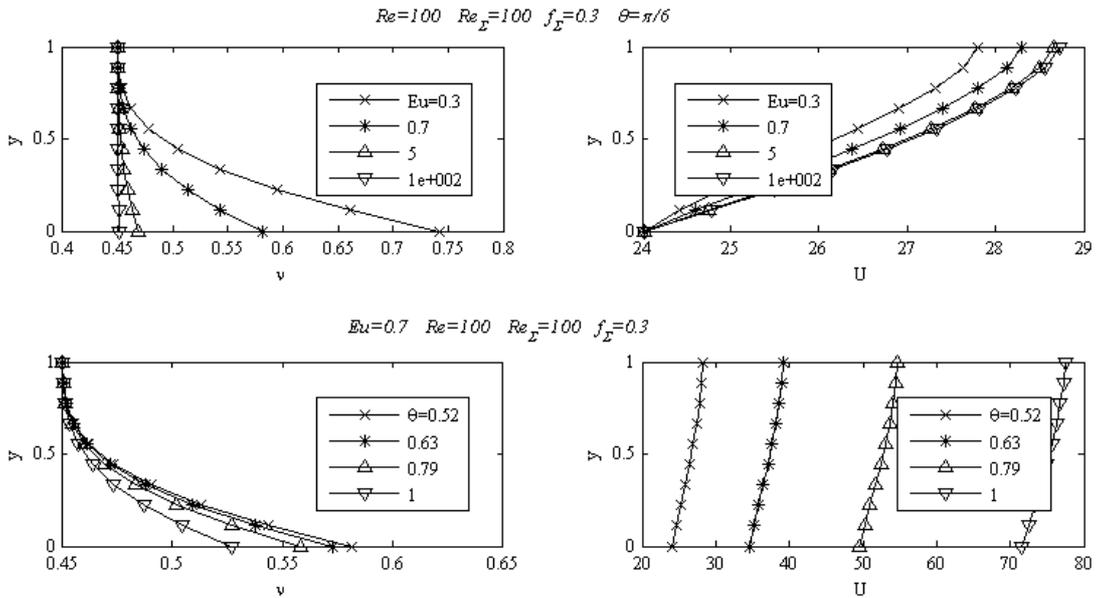


Рис. 1. Распределение плотности ν и скорости U несущей фазы по глубине слоя

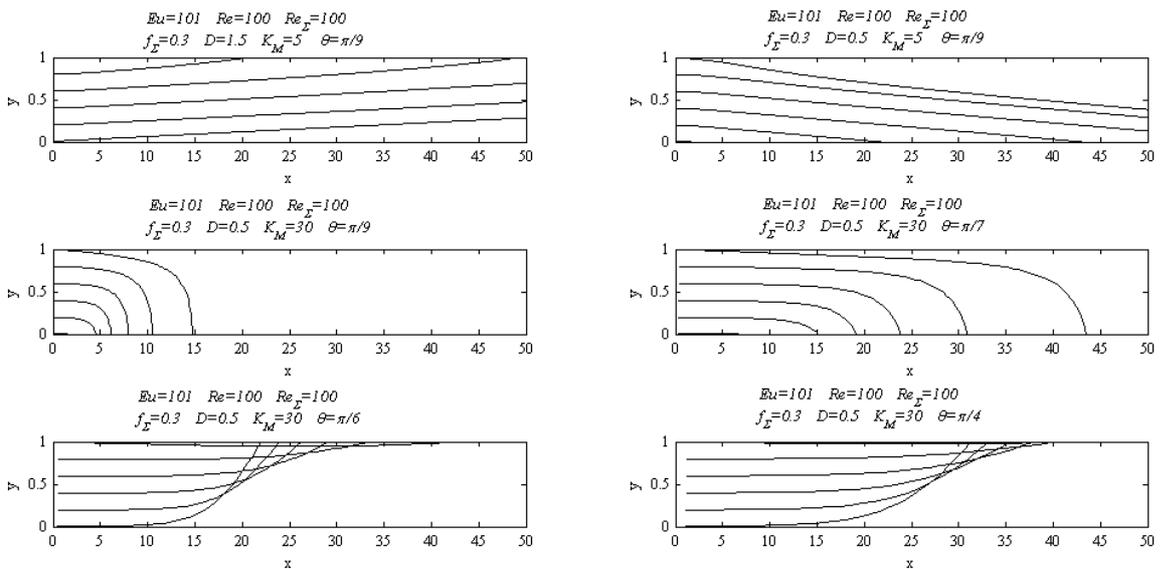


Рис. 2. Траектории движения частиц примеси

$$Re_{\Sigma} = \frac{\rho_1^0 \sqrt{gh}}{D_{\Sigma}}$$

Из первого соотношения граничного условия (17) вытекает необходимое условие возникновения стационарного движения потока $tg \theta > f_{\Sigma}$.

3. ДИНАМИКА ПРИМЕСИ

Динамика частицы примеси описывается векторным уравнением (8). Представим скорость частицы \mathbf{v}_2 в виде суммы $\mathbf{v}_1 + \mathbf{w} = (U + u, v, 0)$, где \mathbf{w} является относительной скоростью. Пусть положение частицы определяется радиус-вектором $\mathbf{r} = (X, Y, 0)$ так, что $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}_2$. Тогда уравнение (8) сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных X, Y :

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

$$\begin{aligned}\ddot{X} &= \sin \theta + U' \dot{Y} - \frac{9}{\bar{a}^2 \text{Re}} D \frac{\nu U'}{\nu_b - \nu} (\dot{X} - U) + \\ &+ \frac{3}{8} DK_M \nu U' \dot{Y}, \\ \ddot{Y} &= (D - 1) \cos \theta - \frac{9}{\bar{a}^2 \text{Re}} D \frac{\nu U'}{\nu_b - \nu} \dot{Y} + \\ &+ \frac{3}{8} DK_M \nu U' (\dot{X} - U).\end{aligned}\quad (18)$$

В качестве начальных условий примем значения координат и скорости частицы при $t = 0$:

$$\begin{aligned}X(0) &= 0, \quad Y(0) = y_0 \quad (0 < y_0 < 1), \\ \dot{X}(0) &= U(y_0), \quad \dot{Y}(0) = 0.\end{aligned}\quad (19)$$

4. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Уравнения краевой задачи (17), (18) допускают первые интегралы, после определения которых разыскиваемые функции находятся численным интегрированием. Результаты вычислений представлены на рис. 1 в виде графиков – эпор распределения объемной плотности ν и скорости U по y , с указанием соответствующих значений параметров задачи. Видно, что графики соответствуют физическому смыслу решения – плотность среды растет, а скорость уменьшается с глубиной слоя. При этом с ростом угла наклона лотка градиент плотности ν убывает, а градиент скорости U возрастает.

После определения характеристик несущего потока разыскиваются траектории движения частиц примеси численным решением задачи Коши (18), (19). Соответствующие графики приведены на рис. 2. Все расчеты проводились для $\bar{a} = 0.2$.

Первая пара графиков рис. 2 отражает влияние силы Архимеда на плавучесть частиц примеси – легкие частицы всплывают, тяжелые тонут. Вторая пара графиков этого рисунка характеризует влияние силы Магнуса. Эта сила при незначительных скоростях основного потока способствует опусканию частиц на дно лотка. Увеличение скорости потока и его градиента в направлении оси y приводит к появлению обратного явления – всплывания тяжелых частиц (третья пара графиков рисунка).

Движение частиц примеси в потоке гранулированной среды носит сложный характер, что обусловлено многими факторами. Расчеты говорят о том, что процессом сепарирования твердых частиц можно управлять, в частности, с помощью изменения угла наклона лотка. В работе, конечно, учитываются не все возможные факторы, влияющие на динамику указанной двухфазной среды. Критерием проверки достоверности результатов должен служить эксперимент. Однако практически эксперименты на данную тему отсутствуют в силу сложности их проведения [10].

1. Гортинский В.В., Демский А.Б., Борискин М.А. Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях.– М.: Колос, 1980.– 304 с.
2. Goldhirsch I., Sela N. Origin of normal stress differences in rapid granular flow // Physical Review E.– 1996.– vol. 54, num. 4.– P. 4458–4464.
3. Миляускас Г. Особенности процессов переноса в полидисперсных излучающих потоках // Пром.теплотехника.– 2001.– 23, № 1.– С. 115–122.
4. Иевлев И.И. К динамике гранулированных сред в наклонных лотках // Прикладна гідромеханіка.– 2003.– Том 5(77), № 3.– С. 41–47.
5. Сэвидж С. Гравитационное течение несвязанных гранулированных материалов/ Механика гранулированных сред: Теория быстрых движений.– М.: Мир, 1985.– 146 с.
6. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред.– М.: Наука, 1978.– 336 с.
7. Соу С. Гидродинамика многофазных систем.– М.: Мир, 1971.– 536 с.
8. Зенков Р.Л. Механика насыпных грузов.– М.: Машиностроение, 1964.– 251 с.
9. Константинов Ю.М. Гидравлика.– Киев: Вища шк., 1988.– 398 с.
10. Бэгнолд Р. Эксперименты со взвешенной суспензией больших твердых сфер в ньютоновской жидкости под действием сдвига/ В кн. Механика гранулированных сред: Теория быстрых движений.– М.: Мир, 1985.– 44–63 с.