

ОБ УРАВНЕНИЯХ ГИДРОДИНАМИКИ, ОТНЕСЕННЫХ К ПОДВИЖНЫМ ОСЯМ

Г. Ф. ЗОЛОТЕНКО

Институт математики НАН Украины, Киев

Получено 04.09.2008

Методами аналитической механики выводятся различные формы уравнений движения идеальной однородной жидкости, сжимаемой и несжимаемой, отнесенных к одной и той же подвижной системе координат, и устанавливаются их взаимосвязи. Найдены новые формы уравнений в подвижных осях, в том числе уравнение “абсолютного движения жидкости в подвижной системе координат”, отличное от одноименного классического уравнения. Предложена классификация уравнений, отнесенных к подвижным осям. Сформулировано и доказано общее утверждение о совпадении (при определенных условиях и с точностью до преобразования сдвига пространственных переменных) классического уравнения относительного и нового уравнения абсолютно–относительного движений жидкости. Это утверждение иллюстрируется на примерах движения системы координат по поверхности Земли и угловых колебаний бака с жидкостью в лабораторных условиях.

Методами аналітичної механіки виводяться різні форми рівнянь руху ідеальної однорідної рідини, стисливої та нестисливої, віднесені до однієї і тієї самої рухомої системи координат, і встановлюються їхні взаємозв'язки. Знайдено нові форми рівнянь у рухомих осях, у тому числі рівняння “абсолютного руху рідини у рухомій системі координат”, що відрізняється від одноіменного класичного рівняння. Запропоновано класифікацію рівнянь, віднесених до рухомих осей. Сформульовано та доведено загальне твердження про співпадіння (за певних умов та з точністю до перетворення зсуву просторових змінних) класичного рівняння відносного та нового рівняння абсолютно–відносного рухів рідини. Це твердження ілюструється на прикладах руху системи координат по поверхні Землі та кутових коливань бака з рідиною у лабораторних умовах.

Different forms of equations of motion of an ideal homogeneous (compressible and incompressible) fluid referred to one and the same moving coordinate system have been derived using the methods of analytical mechanics, and their relationships have been determined. It has been deduced new forms of equations in the moving axes, including the equation “of an absolute motion of a fluid referred to the moving coordinate system”, which differs from the classical equation with the same name. Classification of the referred to the moving axes equations has been offered. The general statement about coincidence (under certain conditions and to within the shift transformation of spatial variables) the classical equations of relative motion and the new equations of absolute-relative motion of the fluid has been formulated and proved. This statement is illustrated by examples of a movement of the coordinate system along a surface of the Earth and angular fluctuations of a tank with a fluid under the laboratory conditions.

ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей работы — анализ различных форм уравнений движения жидкости в подвижных системах координат и установление взаимосвязей между этими формами.

Известны следующие основные формы общих дифференциальных уравнений движения (идеальной, однородной, сжимаемой или несжимаемой) жидкости в подвижных осях:

- “уравнения движения, отнесенные к подвижной системе координат” [1, с. 27]¹

¹Строго говоря, в цитированной книге Г. Ламба сами уравнения, отнесенные к подвижной системе координат, не выписаны, однако подготовлены все необходимые соотношения и даны указания по способу получения этих уравнений в координатной (а не в векторной) форме. Из контекста ясно, что у Ламба вектор $(Dx/Dt, Dy/Dt, Dz/Dt)$ является относительной скоростью жидкости, поэтому эти уравнения могут быть представлены в форме (1), которая приведена (по-видимому, впервые) Г.С. Наримановым и Л.В. Докучаевым в [3] (стр.19, формула (1.9)) в других обозначениях и для более специальной правой части.

$$\frac{\partial' \mathbf{V}_a}{\partial t} + (\mathbf{V}_r \cdot \nabla) \mathbf{V}_a + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_a = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P, \quad (1)$$

- “уравнения относительного движения жидкости” [2, с. 57]

$$\begin{aligned} \frac{\partial' \mathbf{V}_r}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_r^2 \right) - \mathbf{V}_r \times \text{rot } \mathbf{V}_r + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_r = \\ = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P - \mathbf{W}_e, \end{aligned} \quad (2)$$

- “уравнения абсолютного движения жидкости в подвижной системе координат”, [2, с. 57]

$$\begin{aligned} \frac{\partial' \mathbf{V}_a}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{V}_a^2}{2} - \mathbf{V}_a \cdot \mathbf{V}_e \right) - (\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_e) \times \text{rot } \mathbf{V}_a = \\ = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее \mathbf{V}_a , \mathbf{V}_r и \mathbf{V}_e — абсолютная, относительная и переносная скорости жидкости соответственно; \mathbf{W}_e — переносное ускорение жидкости;

Ω — угловая скорость подвижной системы координат; ρ — плотность; P — давление; \mathbf{F} — массовая сила. Штрих при частной производной по t обозначает дифференцирование в подвижной системе координат, ∇ — оператор градиента по пространственным переменным. Названия уравнений взяты из первоисточников и потому заключены в кавычки.

Несколько неожиданное название последнего уравнения² и то обстоятельство, что, в силу известного соотношения

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_e, \quad (4)$$

уравнение (1) также может быть названо “уравнением абсолютного движения жидкости в подвижной системе координат”, наводят на вопрос о связи этих уравнений и о том, сколько же подобных форм уравнений гидродинамики существует. Аналогичные вопросы возникают также при анализе математических моделей в некоторых из сравнительно недавних работ. Например, в объемной монографии [4] исходное уравнение теории потенциального движения жидкости в поступательно перемещающемся со скоростью \mathbf{V}_0 баке представлено в “смешанном” виде (стр. 7, уравнение (1.7b))

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{q}_{rel}^2 + gZ' - \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\mathbf{V}_0^2 = C(t), \quad (5)$$

где Φ и Z' — потенциал абсолютной скорости жидкости и также абсолютная вертикальная координата соответствующей точки поля скоростей; \mathbf{q}_{rel} — относительная скорость жидкой частицы (g — величина ускорения силы тяжести, $C(t)$ — произвольная функция времени). Аналогичное “смешанное” представление исходного уравнения гидродинамики, но уже в случае угловых движений бака, использовано в [5, с. 25, уравнение (23)]:

$$\frac{D\mathbf{v}_r}{Dt} + 2\Omega \times \mathbf{v}_r + \dot{\Omega} \times \mathbf{r} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p, \quad (6)$$

где \mathbf{v}_r — относительная скорость жидкости; \mathbf{r} — абсолютный вектор-радиус жидкой частицы (D/Dt — оператор субстанциональной производной, Ω — угловая скорость бака, \mathbf{f} — вектор массовых сил). Создается впечатление, что в этом уравнении искомая вектор-функция \mathbf{v}_r есть функция абсолютного вектор-радиуса \mathbf{r} , но в действительности это не так (см. п. 5 настоящей статьи).

² Действительно, зачем рассматривать “абсолютное” движение жидкости, если уже совершен переход к ее “относительному” движению.

Дж. Бэтчелор в своем курсе гидродинамики [6, с. 183] ограничился уравнением относительного движения. Это же уравнение (с учетом сил вязкости) является исходным в широко цитируемой монографии Х. Гринспена [7, с. 11] о вращающихся жидкостях.

Анализу вопроса о возможных формах представления векторных и скалярных физических величин, входящих в уравнения гидродинамики, посвящен п. 1.

Следует отметить, что понятие “абсолютное движение жидкости в подвижной системе координат” точно никем не определялось, поскольку, по-видимому, предполагалось, что оно самоочевидно. Вместе с тем оказывается, что можно получить, по крайней мере, еще одно уравнение, аналогичное трем вышеприведенным (1)—(3) и отличное от них. Некоторые новые формы уравнений выведены в п. 2.

Взаимосвязи различных форм уравнений анализируются в п. 3. Прослеживаются цепочки преобразований зависимых и независимых переменных, позволяющих переходить от одних форм уравнений к другим. В частности, воспроизведен способ получения уравнения (3) из уравнения относительного движения жидкости (2), отличный от известного (основанного на физических соображениях) приема исключения переносного ускорения \mathbf{W}_e в [2, с. 57]. Связь уравнений (3) и (1) установлена в [3, с. 19].

Существование различных форм уравнений гидродинамики естественным образом приводит к необходимости их классификации. В настоящей работе предлагается классификация отнесенных к подвижным осям уравнений, в основу которой положены формы координатных представлений векторов положения и скорости жидкой частицы (п. 4).

Наконец, важным для приложений является вопрос о мотивах применения той или иной формы уравнений в задачах теории относительного движения жидкости (как внутренних, например, в динамике твердых тел с жидкостью, так и внешних, например, в динамике твердых тел внутри жидкости). Отчасти ответ на этот вопрос известен: уравнение (3) широко используется в приложениях потому, что в случае потенциальных течений допускает первый интеграл, представленный в знаменитой работе Н.Е. Жуковского [8] в виде

$$\frac{1}{\rho}p - U = \tau - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}(V^2 - V'^2), \quad (7)$$

где p , ρ , U , τ , F , V^2 и V' — давление, плотность, силовая функция, функция времени, потенциаль-

ная функция абсолютных скоростей, сумма квадратов абсолютных скоростей и скорость влечения от движения твердого тела соответственно (обозначения и терминология Н.Е. Жуковского)³.

Заметим, что само уравнение (3) у Н.Е. Жуковского отсутствует. Его вывод имеется в книге [2, с.57], там же доказывается (с. 115 и 116), что полученное Н.Е. Жуковским “выражение гидродинамического давления” является одновременно и первым интегралом этого уравнения. Л.М. Милн-Томсон в [9, с. 93] ограничился “уравнением для давления” при рассмотрении уравнений движения жидкости относительно подвижных осей. В более специальных работах [3, с. 19] и [10, с. 61] в качестве исходного уравнения для исследования неустановившихся движений идеальной жидкости внутри подвижных тел также использовалась формула Жуковского⁴.

Определенную мотивацию применению “нового” уравнения дает доказанное в настоящей работе утверждение об условиях совпадения уравнений абсолютно-относительного и относительно-относительного классов (п. 5). Показано, что под эти условия подпадают задачи из таких разных областей гидродинамики, как динамика атмосферы и океана, с одной стороны, и динамика жидкости в совершающем угловые колебания баке, с другой стороны.

В настоящей работе принята специальная система обозначений: векторы, заданные в неподвижных осях, обозначаются строчными, а в подвижных осях — прописными буквами. Эти обозначения отражают двойственность представления векторов при наличии двух систем координат и позволяют сразу распознавать, в какой из них, подвижной или неподвижной, задан тот или иной вектор. Аналогичные обозначения вводятся и для скалярных функций векторных аргументов: функция, вектор-аргумент которой задан в неподвижной системе координат, обозначается строчной, а в подвижной — прописной буквой. Например, из формы записи уравнений (1)–(3) сразу видно, что в них все векторы и скалярная функция P соответствуют подвижным осям. Исключением является плотность жидкости, которую в неподвижной и подвижной системах координат все-

гда будем обозначать строчной буквой ρ с явным указанием, при необходимости, ее аргументов. Векторы как таковые, т. е. без привязки к какой-либо конкретной системе координат, будут обозначаться строчными буквами, поскольку рассмотрение любого из них начинается с неподвижной системы координат и, следовательно, их естественно отождествлять с формой, обозначаемой малой буквой. Наконец, используется символ $:=$, который означает “равно по определению”. Остальные обозначения (в частности, суммирование по повторяющимся индексам и символы дифференцирования

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt}, \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \quad \frac{\partial' \mathbf{b}}{\partial t}, \quad \frac{D\mathbf{b}}{Dt}, \quad \mathbf{b}^*.$$

некоторого вектора \mathbf{b} по времени) традиционны в гидромеханике и аналитической механике.

1. ДВОЙСТВЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Классические уравнения Эйлера в неподвижной декартовой прямоугольной системе координат $O^*\xi^1\xi^2\xi^3$ могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial v^l}{\partial t} + v^k \frac{\partial v^l}{\partial \xi^k} = f^l - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi^k} \quad (k, l = 1, 2, 3)^5. \quad (8)$$

Здесь (ξ^1, ξ^2, ξ^3) — проекции на неподвижные оси вектор-радиуса \mathbf{r} жидкой частицы относительно неподвижного начала O^* ; t — время; (v^1, v^2, v^3) — проекции на неподвижные оси вектора \mathbf{v}_a абсолютной скорости жидкости; (f^1, f^2, f^3) — проекции на неподвижные оси вектора \mathbf{f} массовых сил, отнесенных к единице массы. Далее рассматриваются различные формы представления в неподвижной и подвижной системах координат векторов, входящих в уравнение (8).

1.1. Базисные векторы

Считая, что движение жидкости наблюдается с подвижного объекта, введем в рассмотрение жестко связанную с этим объектом систему координат $OX^1X^2X^3$ с ортами \mathbf{I}_l ($l = 1, 2, 3$), которые в проекциях на оси этой системы координат определяются вектор-столбцами⁶

$$\mathbf{I}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

⁵Здесь и далее по повторяющимся индексам выполняется суммирование.

⁶Вектор-столбец, соответствующий некоторому вектору, обозначается той же буквой, что и сам вектор, но не жирной.

³Эта формула, обобщающая интегралы Бернулли (для установившихся движений жидкости в неподвижной системе координат) и Коши (для неустановившихся движений жидкости в той же неподвижной системе координат) на случай подвижной системы координат, была, по-видимому, впервые, получена Н.Е. Жуковским в 1885 г. [8, с.173, формула (9)] из интеграла Коши.

⁴По терминологии этих работ “интеграл Лагранжа-Коши” и “интеграл Коши” соответственно.

Положение системы координат $OX^1X^2X^3$ относительно системы координат $O^*\xi^1\xi^2\xi^3$ определяется вектор–радиусом $\mathbf{r}_0(t)$ подвижного начала O относительно неподвижного начала O^* и таблицы направляющих косинусов (табл. 1):

Табл. 1.

	X^1	X^2	X^3
ξ^1	$a_{11}(t)$	$a_{12}(t)$	$a_{13}(t)$
ξ^2	$a_{21}(t)$	$a_{22}(t)$	$a_{23}(t)$
ξ^3	$a_{31}(t)$	$a_{32}(t)$	$a_{33}(t)$

В дальнейшем таблице косинусов ставится в соответствие матрица

$$A(t) := \|a_{kl}(t)\| \quad (k, l = 1, 2, 3).$$

Эта матрица обладает важным свойством ортогональности, т.е.

$$A^{-1} = A^T,$$

где T – символ транспонирования матрицы (см., например, [11, с. 774] или [12, с. 12]).

Столбец с номером l матрицы $A(t)$ является, по определению, ортом \mathbf{I}_l ($l = 1, 2, 3$) подвижной системы координат $OX^1X^2X^3$ в проекциях на оси $O^*\xi^1\xi^2\xi^3$ неподвижной системы координат, а строка с номером k – ортом \mathbf{e}_k ($k = 1, 2, 3$) неподвижной системы координат $O^*\xi^1\xi^2\xi^3$ в проекциях на оси $OX^1X^2X^3$ подвижной системы координат. Орты \mathbf{e}_k в проекциях на неподвижные оси определяются вектор–столбцами

$$\mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

и не зависят от t , а их проекции E_k на подвижные оси, конечно, являются функциями времени.

Таким образом, геометрически столбцы и строки матрицы косинусов A служат базисными векторами двух систем координат в проекциях на соответствующие оси.

Установим алгебраическую связь между базисными векторами неподвижной и подвижной систем координат. Для этого заметим, что матрица A может быть представлена одним из двух альтернативных способов: либо как совокупность (трех) столбцов, либо как совокупность (трех) строк. Другими словами, можно написать

$$A = [\mathbf{i}_1(t), \mathbf{i}_2(t), \mathbf{i}_3(t)] = \begin{bmatrix} E_1^T(t) \\ E_2^T(t) \\ E_3^T(t) \end{bmatrix},$$

где через $\mathbf{i}_l(t)$ обозначен вектор–столбец проекций орта \mathbf{I}_l на неподвижные оси (короче, ξ -оси), а через $E_k(t)$ – вектор–столбец проекций орта \mathbf{e}_k на подвижные оси (короче, X -оси)⁷.

Далее, имеем следующее почти очевидное представление вектор–столбцов $\mathbf{i}_l(t)$ через вектор–столбцы \mathbf{e}_k :

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}_l]_\xi := \mathbf{i}_l(t) &= a_{1l} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{2l} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{3l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= a_{1l}\mathbf{e}_1 + a_{2l}\mathbf{e}_2 + a_{3l}\mathbf{e}_3, \quad l = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

В то же время, вектор–строки $E_k^T(t)$ выражаются через вектор–строки I_l^T следующим образом:

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_k]_X := E_k^T(t) &= a_{k1} [1, 0, 0] + \\ &+ a_{k2} [0, 1, 0] + a_{k3} [0, 0, 1] = \\ &= a_{k1}I_1^T + a_{k2}I_2^T + a_{k3}I_3^T, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

(Символы $[...]_\xi$ и $[...]_X$ обозначают проектирование векторов на ξ -оси и X -оси соответственно.)

Из последних двух матричных соотношений ясно, что алгебраически связь базисных векторов можно представить следующими формулами:

$$\mathbf{i}_l(t) = a_{kl}(t)\mathbf{e}_k, \quad E_k(t) = a_{kl}(t)\mathbf{I}_l, \quad (11)$$

где $k, l = 1, 2, 3$, а по повторяющимся индексам выполняется суммирование. Формула для $E_k(t)$ получена в результате транспонирования соответствующих вектор–строк. В правых частях этих равенств стоят вектор–столбцы *постоянных* векторов \mathbf{e}_k и \mathbf{I}_l , определяемые формулами (10) и (9) соответственно.

Осталось убедиться, что вектор–столбцы \mathbf{I}_l и \mathbf{e}_k , имеющие по выражениям (9), (10) одинаковый вид, расставлены в предыдущих матричных соотношениях правильно. Но это становится ясным из рассмотрения проекций базисных векторов в том двумерном случае, когда оси OX^1X^2 повернуты вокруг точки O , совпадающей с точкой O^* , на некоторый положительный (меньший $\pi/2$) угол относительно системы координат $O^*\xi^1\xi^2$.

Замечание. Вектор–столбцы $\mathbf{i}_l(t)$ ($l = 1, 2, 3$), линейно независимы и взаимно ортогональны, что вытекает из невырожденности и ортогональности

⁷Здесь и далее, если не оговорено противное, векторы и их компоненты, заданные в неподвижных осях $O^*\xi^1\xi^2\xi^3$, обозначаются строчными буквами, а в подвижных осях $OX^1X^2X^3$ – прописными. Кроме того, *базисные* векторы и их вектор–столбцы нумеруются индексами (k или l) внизу, а отдельные компоненты *любоих* векторов и их вектор–столбцов – индексами (k, l, m или n) сверху.

матрицы $A(t)$. Следовательно, соответствующие им векторы могут быть приняты за базисные. Это же утверждение справедливо и для вектор-столбцов $E_k(t)$ ($k = 1, 2, 3$).

Из формул (9) – (11) вытекают следующие двойственные представления базисных векторов:

$$\mathbf{e}_k(t) = \begin{cases} \mathbf{e}_k & \text{в } \xi\text{-осях,} \\ \mathbf{E}_k(t) := a_{kl}(t)\mathbf{I}_l & \text{в } X\text{-осях.} \end{cases} \quad (12)$$

$$\mathbf{I}_l(t) = \begin{cases} \mathbf{i}_l(t) := a_{kl}(t)\mathbf{e}_k & \text{в } \xi\text{-осях,} \\ \mathbf{I}_l & \text{в } X\text{-осях.} \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $\mathbf{E}_k(t)$ – орты \mathbf{e}_k неподвижной системы координат, наблюдаемые в подвижных X -осях, а $\mathbf{i}_l(t)$ – орты \mathbf{I}_l подвижной системы координат, наблюдаемые в неподвижных ξ -осях.

Замечание. Орт $\mathbf{i}_l(t)$ – это орт \mathbf{I}_l , но с изменяющейся ориентацией в неподвижном пространстве. В подвижной системе координат $OX^1X^2X^3$ орт \mathbf{I}_l задается одним из соотношений (9), а в неподвижной $O^*\xi^1\xi^2\xi^3$ – соответствующим столбцом матрицы $A(t)$ (см. первую из формул (11)). Следовательно, орты $\mathbf{i}_l(t)$ и \mathbf{I}_l не одно и то же: если для задания \mathbf{I}_l достаточно одного из соотношений (9) и, значит, можно оставаться в системе координат $OX^1X^2X^3$, то для задания $\mathbf{i}_l(t)$ нужно, помимо указания его длины и одной из осей OX^1, X^2, OX^3 , на которой он лежит, описать каким-то образом ориентацию этой оси в неподвижном пространстве, чего уже нельзя сделать, оставаясь только в системе координат $OX^1X^2X^3$. По существу, такая ориентация задается аналитически столбцами матрицы $A(t)$. Аналогично вводятся орты $\mathbf{E}_k(t)$, и для них можно сформулировать, с соответствующими изменениями, такое же утверждение.

Различие векторов $\mathbf{i}_l(t)$ и \mathbf{I}_l существенно при: 1) дифференцировании по времени заданных в подвижных осях векторов (когда необходимо различать абсолютные и относительные производные этих векторов); 2) перепроектировании векторов из неподвижной системы координат в подвижную. Если при выполнении этих операций выбрать $\mathbf{e}_k(t) = \mathbf{e}_k$ и полагать просто $\mathbf{I}_l(t) = \mathbf{I}_l$, то исчезают параметры, отражающие изменение взаимной ориентации осей рассматриваемых систем координат.

1.2. Произвольный вектор

Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{b}(t)$, определяемый в осях $O^*\xi^1\xi^2\xi^3$ вектор-столбцом $b(t)$, а в

осях $OX^1X^2X^3$ – вектор-столбцом $B(t)$, так что

$$\mathbf{b}(t) = \begin{cases} b^k(t)\mathbf{e}_k & \text{в } \xi\text{-осях,} \\ B^l(t)\mathbf{i}_l(t) & \text{в } X\text{-осях.} \end{cases} \quad (14)$$

Здесь верхняя сумма соответствует разложению этого вектора по ортам неподвижных осей, а нижняя – по ортам подвижных осей (хотя эти орты и берутся в проекциях на неподвижные оси). В нижней сумме выбран базис из переменных ортов $\mathbf{i}_l(t)$, а не из постоянных \mathbf{I}_l , поскольку необходимо учесть изменение ориентации осей подвижной системы координат. В представлении (14) изначально вектор $\mathbf{b}(t)$ задается в ξ -осях компонентами $b^k(t)$, а ищутся его проекции $B^l(t)$ на X -оси.

Далее, в неподвижных и подвижных осях вектор $\mathbf{b}(t)$ должен быть одним и тем же, так что имеем равенство

$$b^k(t)\mathbf{e}_k = B^l(t)\mathbf{i}_l(t).$$

Заменяя здесь орты $\mathbf{i}_l(t)$ их выражениями из (13) и приравнявая коэффициенты при ортах \mathbf{e}_k , приходим к следующей формуле связи координат вектора $\mathbf{b}(t)$ в неподвижных и подвижных осях:

$$b^k(t) = a_{kl}(t)B^l(t). \quad (15)$$

Это и обратное к нему соотношения представимы, очевидно, в следующем матричном виде:

$$\mathbf{b}(t) = A(t) \cdot B(t), \quad B(t) = A^T(t) \cdot \mathbf{b}(t). \quad (16)$$

Замечание. Формулы (16) связывают вектор-столбцы *одного и того же* вектора в *различных* системах координат, в то время как формулы (11) связывают вектор-столбцы *различных* векторов (ортов) в *одной и той же* системе координат.

Пример. Для проверки формул (16) рассмотрим частный случай. Пусть $\mathbf{b}(t) = \mathbf{e}_1$. Тогда ясно, что в первой строке (14) коэффициенты $(b^1(t), b^2(t), b^3(t)) = (1, 0, 0)$. В то же время, орт \mathbf{e}_1 в проекциях на подвижные оси является, по определению, первой строкой матрицы A , т.е. во второй строке (14) должно быть

$$(B^1(t), B^2(t), B^3(t)) = (a_{11}(t), a_{12}(t), a_{13}(t)).$$

Подставив эти значения $B^l(t)$ в первую из формул (16) и воспользовавшись свойством ортогональности строк, найдем что

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Справа здесь получился вектор–столбец из компонент b^k орта \mathbf{e}_1 , как и должно быть. Вторая из формул (16) дает также верные результаты, а именно:

$$A^T \cdot b = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что аналогичные выводы получаются и в случаях $\mathbf{b}(t) = \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{b}(t) = \mathbf{e}_3$. Таким образом, в рассмотренных частных случаях формулы (16) верны ⁸.

Альтернативный подход заключается в представлении $\mathbf{b}(t)$ вместо (14) формулой

$$\mathbf{b}(t) = \begin{cases} c^k(t)\mathbf{E}_k(t) & \text{в } \xi\text{-осях,} \\ C^l(t)\mathbf{I}_l & \text{в } X\text{-осях.} \end{cases} \quad (17)$$

где $\mathbf{E}_k(t)$ — проекции ортов \mathbf{e}_k на подвижные оси. Здесь изначально вектор $\mathbf{b}(t)$ задается в X -осях компонентами $C^l(t)$, а ищутся его проекции $c^k(t)$ на ξ -оси.

Поскольку вектор $\mathbf{b}(t)$ один и тот же в обеих системах координат, должно выполняться равенство

$$c^k(t)\mathbf{E}_k(t) = C^l(t)\mathbf{I}_l.$$

Подставив сюда вместо ортов $\mathbf{E}_k(t)$ их разложения в соответствии со второй из формул (12) и приравняв коэффициенты при ортах \mathbf{I}_l , получим равенство

$$C^l(t) = a_{kl}(t)c^k(t). \quad (18)$$

Это и обратное к нему соотношения представимы в следующем матричном виде:

$$C(t) = A^T(t) \cdot c(t), \quad c(t) = A(t) \cdot C(t). \quad (19)$$

Формально структура равенств (19) и (16) одинакова, однако в них различны столбцы $b(t)$, $B(t)$ и $c(t)$, $C(t)$. Например, $b(t)$ — это вектор–столбец из коэффициентов разложения вектора $\mathbf{b}(t)$ по неподвижным ортам \mathbf{e}_k , а $c(t)$ — по *изменяющим ориентацию* (относительно системы координат $OX^1X^2X^3$) ортам \mathbf{E}_k .

Таким образом, при наличии двух систем координат теоретически возможны четыре представления одного и того же вектора. Покажем, что $b(t) = c(t)$. Действительно, поскольку вектор $\mathbf{b}(t)$ один и тот же, должно быть

$$b^k(t)\mathbf{e}_k = C^l(t)\mathbf{I}_l.$$

⁸В общем случае первая из этих формул совпадает с формулой (2.2.6) монографии [11] (стр.44), если там совместить начала систем координат, т.е. положить $\xi_0 = 0$, и учесть, что $\xi = b(t)$, $x = B(t)$, а матрица косинусов α равна матрице A^T настоящей работы.

Если теперь левую часть перепроектировать на подвижные оси, т.е. взять те же \mathbf{e}_k , но представить их через \mathbf{I}_k (см. вторую из формул (11)), то получим соотношение

$$b^k(t)(a_{kl}(t)\mathbf{I}_l) = C^l(t)\mathbf{I}_l.$$

Отсюда

$$C^l(t) = a_{kl}(t)b^k(t)$$

или, в матричной форме,

$$C(t) = A^T(t) \cdot b(t).$$

Но с другой стороны, в силу первой из формул (19),

$$C(t) = A^T(t) \cdot c(t).$$

Следовательно, $b(t) = c(t)$, что и требовалось доказать. Ясно, что также $B(t) = C(t)$.

Теперь соотношения (14) и (17) могут быть объединены следующим образом:

$$\mathbf{b}(t) = \begin{cases} b^k(t)\mathbf{e}_k \\ B^l(t)\mathbf{i}_l(t) \end{cases} = \begin{cases} b^k(t)\mathbf{E}_k(t) \\ B^l(t)\mathbf{I}_l \end{cases}. \quad (20)$$

Отсюда видна специфика каждого из четырех представлений произвольного вектора в неподвижных и подвижных осях.

1.3. Абсолютный вектор–радиус \mathbf{r}

Вектор–радиус \mathbf{r} жидкой частицы, проведенный из неподвижного начала O^* или подвижного начала O , далее, для краткости, называется *абсолютным* или *относительным* соответственно. Жидкая частица считается отмеченной переменными Лагранжа $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)$, так что $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$.

В дальнейшем ограничимся вариантом (14) разложения векторов и абсолютный вектор–радиус $\mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$ будем представлять в следующем виде:

$$\mathbf{r}(\mathbf{a}, t) = \begin{cases} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{a}, t) := \xi^k(\mathbf{a}, t)\mathbf{e}_k & \text{в } \xi\text{-осях,} \\ \mathbf{X}(\mathbf{a}, t) := X^l(\mathbf{a}, t)\mathbf{i}_l(t) & \text{в } X\text{-осях.} \end{cases} \quad (21)$$

Связь координат ξ^k и X^l вытекает из (15), (16) и определяется формулами

$$\xi^k(\mathbf{a}, t) = a_{kl}(t)X^l(\mathbf{a}, t), \quad X^l(\mathbf{a}, t) = a_{kl}(t)\xi^k(\mathbf{a}, t), \quad (22)$$

$$k, l = 1, 2, 3.$$

1.4. Абсолютная скорость \mathbf{v}_a

Вектор абсолютной скорости \mathbf{v}_a является векторной функцией векторного аргумента, т.е. $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_a(\mathbf{r}, t)$. В силу того, что как векторный аргумент \mathbf{r} , так и векторные значения самой функции $\mathbf{v}_a(\mathbf{r}, t)$ допускают двойственные представления, оказываются возможными различные формы представления абсолютной скорости жидкости. Найдем их, принимая для вектора положения \mathbf{r} представление (21), а для вектора скорости \mathbf{v}_a – представление типа (14).

По определению

$$\mathbf{v}_a = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)}{\partial t}.$$

Отсюда, в силу (21),

$$\mathbf{v}_a(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \mathbf{v}_\xi := \partial \boldsymbol{\xi} / \partial t = (\partial \xi^k / \partial t) \mathbf{e}_k, \\ \mathbf{V}_X := \partial \mathbf{X} / \partial t = \partial [X^l \mathbf{i}_l(t)] / \partial t. \end{cases} \quad (23)$$

(Здесь орты $\mathbf{i}_l(t)$, в отличие от ортов \mathbf{e}_k , дифференцируются по t). Но, согласно (14), каждый из векторов \mathbf{v}_ξ и \mathbf{V}_X в (23) представляется двояким образом. Поэтому имеют место соотношения

$$\mathbf{v}_a(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \mathbf{v}_\xi := v_\xi^k \mathbf{e}_k & \text{в } \xi\text{-осях,} \\ \mathbf{V}_\xi := V_\xi^l \mathbf{i}_l(t) & \text{в } X\text{-осях,} \\ \mathbf{v}_X := v_X^k \mathbf{e}_k & \text{в } \xi\text{-осях,} \\ \mathbf{V}_X := V_X^l \mathbf{i}_l(t) & \text{в } X\text{-осях.} \end{cases} \quad (24)$$

В (24) нижние буквенные индексы указывают направление проектирования аргумента \mathbf{r} , строчные буквы \mathbf{v} обозначают проектирование соответствующей вектор-функции на ξ -оси, а прописные \mathbf{V} – на X -оси.

Наиболее простое координатное представление имеет вектор $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_\xi$ – его проекции на ξ -оси равны производным по t от вектора $\mathbf{r}(\mathbf{a}, t) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{a}, t)$, т.е.

$$\mathbf{v}_\xi(\mathbf{a}, t) = v_\xi^k \mathbf{e}_k = \dot{\xi}^k(\mathbf{a}, t) \mathbf{e}_k, \quad (25)$$

где точка обозначает частную производную по t при фиксированных переменных Лагранжа \mathbf{a} . Этот же вектор \mathbf{v}_a в проекциях на X -оси имеет более сложную форму (применена вторая из формул (16) при $b(t) = v_\xi$, $B(t) = V_\xi$):

$$\mathbf{V}_\xi(\mathbf{a}, t) = V_\xi^l \mathbf{i}_l(t) = a_{kl}(t) \dot{\xi}^k(\mathbf{a}, t) \mathbf{i}_l(t). \quad (26)$$

Ситуация еще более усложняется для представленной \mathbf{v}_X и \mathbf{V}_X . Это связано с применением формулы связи абсолютной и относительной производных по t от вектора, заданного в подвижной системе координат. Для произвольного вектора $\mathbf{B}(t)$, заданного в подвижных осях, она имеет вид (см., например, [13, с. 100, ф-лы (11) и (12)])

$$\frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} = \frac{d'\mathbf{B}(t)}{dt} + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{B}(t). \quad (27)$$

Замечание. Вектор абсолютной производной $d\mathbf{B}/dt$, вычисляемый по формуле (27), относится к подвижным осям, поскольку в этих осях задаются векторы \mathbf{B} , $\boldsymbol{\Omega}$ и $d'\mathbf{B}(t)/dt$.

Найдем вектор \mathbf{V}_X . Для этого применим к нижнему из соотношений (23) формулу (27), полагая

$$\mathbf{B}(t) = X^l(\mathbf{a}, t) \mathbf{i}_l(t).$$

Кроме того, воспользуемся тем, что

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X} = X^n \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}_n(t),$$

и, для компактности записи, применим формулу представления векторного произведения двух произвольных векторов $\mathbf{a} = a^l \mathbf{i}_l(t)$, $\mathbf{b} = b^l \mathbf{i}_l(t)$ через символы Леви-Чивита, имеющую вид (см. [11, с. 43, ф-ла (2.1.14)])

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a^l b^m \epsilon_{lmn} \mathbf{i}_n(t).$$

Тогда получим следующее представление вектора $\mathbf{v}_a := \mathbf{V}_X$ в подвижной системе координат $OX^1 X^2 X^3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_X(\mathbf{a}, t) &= V_X^n(\mathbf{a}, t) \mathbf{i}_n(t) = \\ &= [\dot{X}^n(\mathbf{a}, t) + \Omega^l(t) X^m(\mathbf{a}, t) \epsilon_{lmn}] \mathbf{i}_n(t), \end{aligned} \quad (28)$$

где $\Omega^l(t)$ – проекции вектора $\boldsymbol{\Omega}(t)$ угловой скорости на X -оси; ϵ_{lmn} ($l, m, n = 1, 2, 3$) – символ Леви-Чивита, определяемый в зависимости от значений индексов суммирования l, m, n по формуле

$$\epsilon_{lmn} = \begin{cases} +1, & (lmn) \in \{(123), (231), (312)\}, \\ 0, & \text{если среди } l, m, n \text{ есть равные,} \\ -1, & (lmn) \in \{(213), (132), (321)\}. \end{cases}$$

Наконец, проектируя вектор \mathbf{V}_X на неподвижные оси, найдем третью из форм (24):

$$\mathbf{v}_X(\mathbf{a}, t) = v_X^k(\mathbf{a}, t) \mathbf{e}_k, \quad (29)$$

где, по первой из формул (16),

$$v_X^k = a_{kn}(t) [\dot{X}^n(\mathbf{a}, t) + \Omega^l(t) X^m(\mathbf{a}, t) \epsilon_{lmn}]. \quad (30)$$

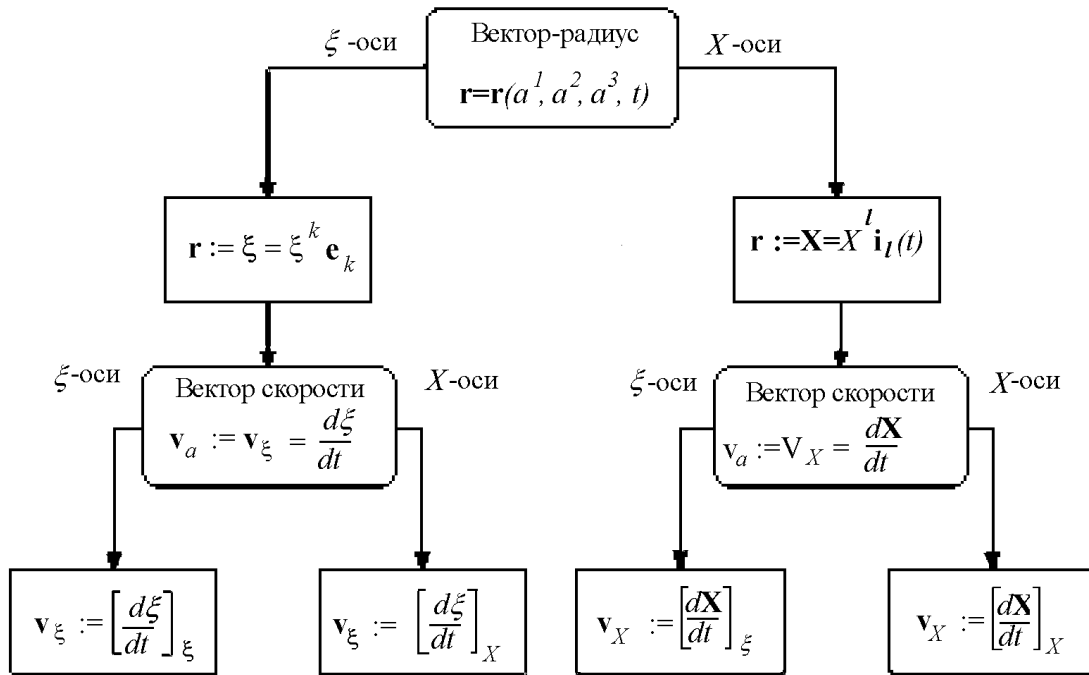


Рис. 1. Варианты координатного представления вектор-радиуса \mathbf{r} и абсолютной скорости $\mathbf{v}_a(\mathbf{r}, t)$ жидкой частицы. a^1, a^2, a^3 – переменные Лагранжа; \mathbf{e}_k – орты неподвижных осей; $\mathbf{i}_l(t)$ – орты подвижных осей

Итак, абсолютная скорость \mathbf{v}_a , определенная как производная $d\mathbf{r}/dt$, может иметь две основные формы: \mathbf{v}_ξ и \mathbf{V}_X (см. рис.1). Кроме того, возможны еще две дополнительные ее формы, \mathbf{V}_ξ и \mathbf{v}_X , получающиеся перепроектированием векторов \mathbf{v}_ξ и \mathbf{V}_X на X -оси и ξ -оси соответственно. Отсюда вытекает, что существуют, по крайней мере, два способа представления вектора абсолютной скорости в *подвижных* осях (\mathbf{V}_X и \mathbf{V}_ξ), а следовательно, можно по-разному трактовать понятие “абсолютное движение жидкости в подвижной системе координат”. Наиболее естественно считать таковым случай, когда и радиус-вектор \mathbf{r} жидкой частицы, и ее абсолютная скорость \mathbf{v}_a отнесены к подвижной системе координат, т.е. когда $\mathbf{r} := \mathbf{X}$, а $\mathbf{v}_a := \mathbf{V}_X$.

Направление проектирования вектор-радиуса \mathbf{r} еще не определяет, на какие оси нужно проектировать вектор скорости \mathbf{v}_a , – выбор этих осей диктуется только соображениями удобства и целесообразности. Дополнительные формы \mathbf{V}_ξ и \mathbf{v}_X сложнее основных, поскольку, как видно из (26) и (30), содержат множителями направляющие косинусы a_{kl} , которые отсутствуют в формулах (25) и (28).

1.5. Абсолютное ускорение \mathbf{w}_a

По определению, абсолютное ускорение жидкой частицы

$$\mathbf{w}_a = \frac{\partial \mathbf{v}_a(\mathbf{r}(\mathbf{a}, t), t)}{\partial t}.$$

Поэтому, поскольку имеется 2^2 представлений вектора \mathbf{v}_a (для варианта (14)), возможны 2^3 представлений ускорения \mathbf{w}_a , а значит, и форм уравнений движения жидкости. Ниже рассматривается случай, когда $\mathbf{v}_a := \mathbf{V}_X$.

Применяя (27) и полагая там

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{V}_X[\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), t],$$

найдем, что в данном случае

$$\mathbf{W}_X = \frac{d\mathbf{V}_X}{dt} = \frac{d'\mathbf{V}_X}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_X, \quad (31)$$

где \mathbf{W}_X – форма вектора абсолютного ускорения \mathbf{w}_a , соответствующая случаю $\mathbf{r} := \mathbf{X}$ и проектированию \mathbf{v}_a и \mathbf{w}_a на подвижные оси⁹. В (31), поскольку штрих обозначает дифференцирование в

⁹Переход от символа частного дифференцирования $\partial/\partial t$ к d/dt возможен, поскольку приравнивание $\mathbf{V}_X[\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), t]$ вектору $\mathbf{B}(t)$ означает, что вектор \mathbf{a} переменных Лагранжа рассматривается как параметр, а сама функция $\mathbf{V}_X[\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), t]$ – как функция только переменной t

подвижной системе координат, а вектор \mathbf{V}_X в этой системе координат определяется формулой (28), можно написать

$$\frac{d'\mathbf{V}_X}{dt} = [\ddot{X}^n + (\dot{\Omega}^l X^m + \Omega^l \dot{X}^m) \epsilon_{lmn}] \mathbf{i}_n(t). \quad (32)$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{X}^{**} = \ddot{X}^n \mathbf{i}_n(t), \quad \mathbf{X}^* = \dot{X}^n \mathbf{i}_n(t), \quad \mathbf{\Omega}^* = \dot{\Omega}^l \mathbf{i}_l(t).$$

(Звездочка над вектором обозначает, что: а) этот вектор задан в подвижных осях, б) при дифференцировании по t его разложения по ортам подвижной системы координат сами орты, зависящие от t , не дифференцируются.) Тогда, после подстановки (32), (28) в (31) и обратного перехода в полученном после этого выражении от символов Леви-Чивита к векторным произведениям, найдем следующее представление вектора абсолютного ускорения \mathbf{w}_a в проекциях на оси подвижной системы координат $OX^1X^2X^3$:

$$\mathbf{W}_X = \mathbf{\Omega}^* \times \mathbf{X} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{X}) + \mathbf{X}^{**} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{X}^*. \quad (33)$$

Выражение (33) имеет сильное структурное сходство со следующей классической формулой из динамики относительного движения точки:

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_0 + \dot{\omega} \times \mathbf{r}' + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}') + \mathbf{r}'^{**} + 2\omega \times \mathbf{r}'^*, \quad (34)$$

где \mathbf{w}_0 — ускорение начала O подвижной системы координат, \mathbf{r}' — вектор-радиус материальной точки относительно начала O подвижной системы координат, ω — угловая скорость.¹⁰ При всем сходстве выражений (33) и (34), между ними имеется принципиальное отличие: вектор-радиус $\mathbf{r} = \mathbf{X}$ не равен \mathbf{r}' . В силу этого, очевидно, $\mathbf{V}_X^{**} \neq \mathbf{r}'^{**}$ и $\mathbf{V}_X^* \neq \mathbf{r}'^*$. Впрочем, при совпадении O и O^* формулы (33) и (34) дают одно и то же значение абсолютного ускорения жидкой частицы и, следовательно, приводят к одинаковым гидродинамическим уравнениям в подвижных осях. (Другой, менее тривиальный случай взаимного расположения точек O^* и O и соответствующие этому случаю уравнения, описаны ниже.) В общем же случае начала O , не совпадающего с O^* , эти формулы приводят к различным гидродинамическим уравнениям в подвижных осях.

¹⁰См., например, [13] (стр.101). Здесь, как и в первоисточнике, все векторы, хотя и задаются в подвижных осях, представлены строчными буквами.

1.6. Градиент ∇

Оператор градиента ∇ , фигурирующий во всех формах уравнений движения жидкости, при переходе к подвижной системе координат также претерпевает изменения. Вообще говоря, градиент некоторой скалярной функции по пространственным переменным, является не вектором, а ковектором, т.е. при замене переменных преобразуется по закону, отличному от закона преобразования обычного вектора (см., например, [14, с. 30]). Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть $\varphi(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ — произвольная скалярная функция. Обозначив через ∇_ξ и ∇_X градиенты по старым ξ^1, ξ^2, ξ^3 и новым X^1, X^2, X^3 переменным соответственно, найдем связь между ними для функции φ . Для этого произведем замену переменных по формулам

$$\xi^k = \xi^k(X^1, X^2, X^3, t), \quad k = 1, 2, 3, \quad (35)$$

и обозначим функцию φ в новых переменных через Φ , т.е. положим

$$\varphi(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) \Big|_{\xi^k = \xi^k(X^1, X^2, X^3, t)} = \Phi(X^1, X^2, X^3, t).$$

Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial X^l} = \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \xi^k} \Big|_{\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)} \cdot \frac{\partial \xi^k(\mathbf{X}, t)}{\partial X^l}, \quad (36)$$

$$l = 1, 2, 3.$$

(Для сокращения записи применены обозначения $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, $\mathbf{X} = (X^1, X^2, X^3)$.) Формула (36) является общей, поскольку справедлива для любой замены переменных (35).

Пусть теперь переменные ξ^k и X^l связаны зависимостью (22). Тогда, используя для вычисления производных $\partial \xi^k(\mathbf{X}, t) / \partial X^l$ эту зависимость, находим из (36), что наборы частных производных от различных, но связанных между собой функций $\Phi(\mathbf{X}, t)$ и $\varphi(\boldsymbol{\xi}, t)$, удовлетворяют следующему матричному соотношению:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial X^1} \\ \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial X^2} \\ \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial X^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \xi^3} \end{bmatrix}.$$

Здесь справа производные $\partial \varphi(\boldsymbol{\xi}, t) / \partial \xi^k$ нужно брать в точке $\boldsymbol{\xi} = A\mathbf{X}$.

Последнее равенство можно, очевидно, переписать в виде

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial X^l} = a_{kl}(t) \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \xi^k} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{A}\mathbf{X}}. \quad (37)$$

Формула (37) является другой формой записи второго из соотношений (16), если в нем положить

$$B(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial X^1} \\ \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial X^2} \\ \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial X^3} \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \xi^3} \end{bmatrix} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{A}\mathbf{X}}$$

Это обстоятельство делает естественным следующее определение символического оператора градиента ¹¹:

$$\nabla = \begin{cases} \nabla_{\xi} := \frac{\partial}{\partial \xi^k} \mathbf{e}_k & \text{в } \xi\text{-осях,} \\ \nabla_X := \frac{\partial}{\partial X^l} \mathbf{i}_l(t) & \text{в } X\text{-осях.} \end{cases}$$

Применяя этот оператор к функции φ , получаем такое уточнение понятия градиента в неподвижной и подвижной системах координат:

$$\nabla \varphi = \begin{cases} \nabla_{\xi} \varphi(\boldsymbol{\xi}, t) := \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \xi^k} \mathbf{e}_k & \text{в } \xi\text{-осях,} \\ \nabla_X \Phi(\mathbf{X}, t) := \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial X^l} \mathbf{i}_l(t) & \text{в } X\text{-осях.} \end{cases} \quad (38)$$

Тем самым в формуле, предшествующей (37), вектор–столбец частных производных $\partial \varphi(\boldsymbol{\xi}, t) / \partial \xi^k$ отнесен к неподвижным осям, а частных производных $\partial \Phi(\mathbf{X}, t) / \partial X^l$ — к подвижным. Теперь связь градиентов скалярной функции от векторного аргумента можно записать в следующем матричном виде:

$$\tilde{\nabla}_X \Phi(\mathbf{X}, t) = A^T \tilde{\nabla}_{\xi} \varphi(\boldsymbol{\xi}, t) \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{A}\mathbf{X}}, \quad (39)$$

где

$$\Phi(\mathbf{X}, t) = \varphi(\boldsymbol{\xi}, t) \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{A}\mathbf{X}},$$

а знак $\tilde{\nabla}$ с индексом X или ξ обозначает вектор–столбец, состоящий из трех частных производных по X^l или по ξ^k от соответствующей функции.

¹¹По аналогии с вариантом (14) представления обычного вектора.

Можно сказать, что формула (39) связывает градиенты от различных, но зависящих друг от друга функций φ и Φ .

Покажем, что в первой и второй строках формулы (38) стоит один и тот же вектор. Переходя в (38) от векторов к вектор–столбцам, имеем в силу (37):

$$\tilde{\nabla}_X \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial X^l} \mathbf{i}_l(t) = \left[a_{kl} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^k} \right] \mathbf{i}_l(t) = \left[a_{kl} \mathbf{i}_l(t) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^k}.$$

Но

$$a_{kl} \mathbf{i}_l(t) = \mathbf{e}_k. \quad (40)$$

Это следует из равенств

$$\begin{aligned} a_{kl} \mathbf{i}_l(t) &= a_{k1} \mathbf{i}_1(t) + a_{k2} \mathbf{i}_2(t) + a_{k3} \mathbf{i}_3(t) = \\ &= a_{k1} (a_{m1} \mathbf{e}_m) + a_{k2} (a_{m2} \mathbf{e}_m) + a_{k3} (a_{m3} \mathbf{e}_m) = \\ &= (a_{k1} a_{m1} + a_{k2} a_{m2} + a_{k3} a_{m3}) \mathbf{e}_m = \delta_{km} \mathbf{e}_m = \mathbf{e}_k, \end{aligned}$$

где δ_{km} — символ Кронекера. (Использована первая из формул (11) для вектор–столбцов ортов $\mathbf{i}_l(t)$ и взаимная ортогональность строк матрицы A .)

Учитывая (40), получаем матричное равенство

$$\tilde{\nabla}_X \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial X^l} \mathbf{i}_l(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^k} \mathbf{e}_k = \tilde{\nabla}_{\xi} \varphi,$$

или, заменяя вектор–столбцы $\mathbf{i}_l(t)$ и \mathbf{e}_k соответствующими ортами,

$$\tilde{\nabla}_X \Phi := \frac{\partial \Phi}{\partial X^l} \mathbf{i}_l(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^k} \mathbf{e}_k =: \tilde{\nabla}_{\xi} \varphi. \quad (41)$$

Таким образом, новый градиент $\nabla_X \Phi(\mathbf{X}, t)$, представленный в виде разложения по новому базису $\mathbf{i}_l(t)$ (подвижной системы координат), равен старому градиенту $\nabla_{\xi} \varphi(\boldsymbol{\xi}, t)$, представленному в виде разложения по старому базису \mathbf{e}_k (неподвижной системы координат), что и требовалось доказать.

Заметим, что в общем случае замены систем координат по формуле (35) компоненты градиента преобразуются не так, как компоненты вектора: для вектора столбец из его старых компонент равен произведению матрицы Якоби J на столбец из его новых компонент, а для градиента столбец из его старых компонент равен произведению матрицы $(J^T)^{-1}$ на столбец из его новых компонент. В рассматриваемом конкретном случае, т.е. при линейной замене $\boldsymbol{\xi} = A(t)\mathbf{X}$, матрица Якоби

$$J = A(t),$$

но тогда, в силу ортогональности матрицы $A(t)$,

$$(J^T)^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A.$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае перехода от неподвижной системы координат к подвижной ковектор градиента преобразуется по закону преобразования вектора.

Замечание. Старый градиент $\nabla_{\xi}\varphi(\xi, t)$ в формуле (41) должен вычисляться в точке $\xi = A\mathbf{X}$. Кроме того, вектор–столбцы, соответствующие старому и новому представлениям градиента, не равны (см. (37)).

Рассмотрим теперь градиент давления ∇p . Положим, используя принятую систему обозначений из строчных и прописных букв,

$$\varphi(\xi, t) = p(\xi, t), \quad \Phi(\mathbf{X}, t) = P(\mathbf{X}, t),$$

где p и P — давление как функция неподвижных (ξ^1, ξ^2, ξ^3) и подвижных (X^1, X^2, X^3) координат соответственно. Производя эту замену в (41), получаем следующую связь двух форм градиента давления:

$$\nabla_X P(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\xi} p(\xi, t) \Big|_{\xi=A\mathbf{X}}. \quad (42)$$

Забегая несколько вперед, отметим, что в классических уравнениях (1) — (3), строго говоря, $\nabla P \neq \nabla_X P$.

1.7. Вектор массовых сил \mathbf{f}

Вектор массовых сил $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ в зависимости от направления проектирования векторов \mathbf{r} и \mathbf{f} может иметь, как и вектор \mathbf{v}_a , четыре формы.

Пример. Пусть \mathbf{f} является силой тяготения Земли, действующей на частицу жидкости (океана или атмосферы) единичной массы. Кроме того, положим, что неподвижная система координат связана с Землей и имеет начало O^* в ее центре, а подвижная размещена на некотором подвижном объекте (например, на борту искусственного спутника Земли). Известно, что сила тяготения — векторная функция векторного аргумента, определяемая формулой (см. [11, с. 201])

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\gamma M_0 \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

где γ — постоянная тяготения; M_0 — масса Земли; \mathbf{r} — вектор–радиус центра жидкой частицы относительно центра O^* Земли; r — длина вектора \mathbf{r} . Рассмотрим возможные формы представления вектор–функции $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, которая является, ввиду присутствия величины r , нелинейной функцией координат вектора \mathbf{r} .

Если $\mathbf{r} := \xi$, то в проекциях на ξ –оси

$$[\mathbf{f}(\xi)]_{\xi} = f^k(\xi) \mathbf{e}_k,$$

где

$$f^k(\xi) = -\gamma M_0 \frac{\xi^k}{r^3(\xi)}, \quad r(\xi) = \sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2}.$$

Если теперь координаты вектора $\mathbf{f}(\xi)$ оставить без изменений, а орты \mathbf{e}_k взять в проекциях на орты \mathbf{I}_l подвижных осей, применив последнюю из формул (11), то получим вторую форму вектор–функции $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, а именно:

$$[\mathbf{f}(\xi)]_X = f^k(\xi) a_{kl}(t) \mathbf{I}_l = f^k(\xi) \mathbf{E}_k(t).$$

Можно поступить наоборот: заменить в $\mathbf{f}(\xi)$ старые координаты ξ^k на новые X^l по формуле (22), а орты \mathbf{e}_k оставить без изменений. Тогда получим третью форму вектор–функции $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, а именно:

$$[\mathbf{f}(\mathbf{X})]_{\xi} = F^l(\mathbf{X}) a_{kl}(t) \mathbf{e}_k = F^l(\mathbf{X}) \mathbf{i}_l(t),$$

где

$$F^l(\mathbf{X}) = -\gamma M_0 \frac{X^l}{r^3(\mathbf{X})},$$

$$r(\mathbf{X}) = \sqrt{(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2}.$$

(Использованы первая из формул (11) и свойство инвариантности длины вектора в любой системе координат.)

Наконец, выполнив одновременно предыдущие замены и координат, и ортов вектора $\mathbf{f}(\xi)$, приходим к четвертой форме вектор–функции $\mathbf{f}(\mathbf{r})$:

$$[\mathbf{f}(\mathbf{X})]_X = -\gamma M_0 \frac{(a_{kl}(t) X^l)}{r^3(\mathbf{X})} (a_{kl}(t) \mathbf{I}_l) = F^l(\mathbf{X}) \mathbf{I}_l,$$

где последнее равенство получено с учетом ортогональности столбцов матрицы A .

Таким образом, из примера видно, что, меняя направления проектирования вектор–аргумента и вектор–функции от этого аргумента, можно получить четыре координатных представления вектор–функции $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ массовых сил.

Четыре формы вектора массовых сил соответствуют четырем системам базисных векторов (12) и (13) неподвижной и подвижной систем координат.

В дальнейшем будут использоваться следующие две формы вектора $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \mathbf{f}(\xi, t) := f^k(\xi, t) \mathbf{e}_k & \text{в } \xi\text{-осях,} \\ \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) := F^l(\mathbf{X}, t) \mathbf{i}_l(t) & \text{в } X\text{-осях.} \end{cases} \quad (43)$$

Здесь связь координат $f^k(\xi)$ и $F^l(\mathbf{X})$ устанавливается по формулам (16), где для вектор–столбцов b ,

В нужно положить

$$b = \begin{bmatrix} f^1(\boldsymbol{\xi}, t) \\ f^2(\boldsymbol{\xi}, t) \\ f^3(\boldsymbol{\xi}, t) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} F^1(\mathbf{X}, t) \\ F^2(\mathbf{X}, t) \\ F^3(\mathbf{X}, t) \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$f^k(\boldsymbol{\xi}, t) \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{A}\mathbf{X}} = a_{kl}(t)F^l(\mathbf{X}, t),$$

$$F^l(\mathbf{X}, t) = a_{kl}(t)f^k(\boldsymbol{\xi}, t) \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{A}\mathbf{X}}. \quad (44)$$

Замечание. Из цепочки равенств для вектор-столбцов

$$F = F^l i_l = a_{kl} f^k i_l = f^k e_k = f$$

(здесь использованы соотношения (40), (43), и (44)) вытекает следующее равенство для соответствующих векторов:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, t) \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{A}\mathbf{X}}. \quad (45)$$

Соотношения (44) и (45) определяют алгоритм замены *зависимых и независимых* переменных в *координатной* форме уравнений движения жидкости (8)¹². В частности, для замены вектора массовых сил \mathbf{f} при переходе от неподвижной системы координат к подвижной необходимо подставить выражения старых координат $\boldsymbol{\xi}$ через новые координаты \mathbf{X} в каждую из компонент $f^k(\boldsymbol{\xi}, t)$ вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ в неподвижных осях (это соответствует замене векторного аргумента, т. е. независимых переменных), а затем вычислить проекции $F^l(\mathbf{X})$ этой вектор-функции на подвижные оси по второй из формул (44) (это соответствует замене значений векторной функции, т. е. зависимых переменных).

2. НОВОЕ УРАВНЕНИЕ АБСОЛЮТНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Абсолютным движением жидкости в подвижных осях будем называть движение, которое описывается векторами $\mathbf{r} := \mathbf{X}$, $\mathbf{v}_a := \mathbf{V}_X$, $\mathbf{w}_a := \mathbf{W}_X$. В этом случае вектор \mathbf{r} положения жидкой частицы отсчитывается от неподвижной точки O^* , т. е. является абсолютным, соответствующие ему скорость и ускорение также являются абсолютными (в отличие от относительных) и, кроме того, перечисленные векторы берутся в проекциях на подвижные X -оси. Выведем соответствующее уравнение движения.

¹²В случае, когда эти уравнения перепроектируются на оси базиса $\{i_l(t)\}$.

Исходим из дифференциальной формы закона количества движения идеальной жидкости, вытекающей из второго закона Ньютона для жидкой частицы (см., например, [15, с. 6]):

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

В случае неподвижной системы координат оно уточняется следующим образом:

$$\mathbf{w}_a(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, t) - \frac{1}{\rho(\boldsymbol{\xi}, t)} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} p(\boldsymbol{\xi}, t). \quad (46)$$

Его стандартная векторная форма, описывающая абсолютное движение жидкости в *неподвижной* системе координат, имеет, как известно, вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}_a(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t} + [\mathbf{v}_a(\boldsymbol{\xi}, t) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}] \mathbf{v}_a(\boldsymbol{\xi}, t) =$$

$$= \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, t) - \frac{1}{\rho(\boldsymbol{\xi}, t)} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} p(\boldsymbol{\xi}, t), \quad (47)$$

с искомыми функциями $\mathbf{v}_a(\boldsymbol{\xi}, t)$, $p(\boldsymbol{\xi}, t)$ и $\rho(\boldsymbol{\xi}, t)$.

Производя в уравнении (46) замену переменных $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ и используя формулы (33), (45), (42), получим соотношение

$$\mathbf{X} + \boldsymbol{\Omega}^* \times \mathbf{X} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}^* =$$

$$= \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) - \frac{1}{\rho(\mathbf{X}, t)} \nabla_X P(\mathbf{X}, t). \quad (48)$$

В такой форме уравнение содержит неизвестные вектор-радиус $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$ и функции $P = P[\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), t]$, $\rho = \rho[\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), t]$ (здесь $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)$), причем P не только зависит от искомым переменных \mathbf{X} , но и дифференцируется по этим переменным. Примечательно, что \mathbf{X} дифференцируется только по времени, а P — только по пространственным переменным. Это — специфическое уравнение, в общем случае нелинейное и довольно сложное¹³.

Преобразуем это уравнение, введя аналоги \mathbf{U} относительной скорости и \mathbf{W}_Ω переносного¹⁴ ускорения жидкой частицы по формулам

$$\mathbf{U}(\mathbf{a}, t) := \mathbf{X}^*(\mathbf{a}, t),$$

¹³Перейдя в уравнении (48) от производных по пространственным переменным X^l к производным по лагранжевым переменным a^k и выполнив соответствующие преобразования (см., например, [9, с. 85]), можно получить лагранжеву форму уравнения, отнесенного к подвижным осям.

¹⁴Классическая формула для вектора \mathbf{w}_e переносного ускорения имеет вид (в подвижных осях): $\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$, где $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — угловые скорость и ускорение соответственно.

$$\mathbf{W}_\Omega := \overset{*}{\Omega} \times \mathbf{X} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{X}). \quad (49)$$

Тогда (48) примет вид

$$\overset{*}{\mathbf{U}}(\mathbf{a}, t) + 2\Omega(t) \times \mathbf{U}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{F}[\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), t] - \frac{1}{\rho[\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), t]} \nabla_X P[\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), t] - \mathbf{W}_\Omega[\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), t]. \quad (50)$$

Исключим в выражении для \mathbf{U} переменные Лагранжа a^1, a^2, a^3 . Для этого заметим, что вектор-радиус жидкой частицы, определяемый формулой (21), является функцией переменных Лагранжа, так что для его проекций X^l на подвижные оси можно написать

$$\begin{cases} X^1 = X^1(a^1, a^2, a^3, t), \\ X^2 = X^2(a^1, a^2, a^3, t), \\ X^3 = X^3(a^1, a^2, a^3, t). \end{cases}$$

Рассматривая эти равенства как систему уравнений относительно a^1, a^2, a^3 , представим ее решение в виде

$$\begin{cases} a^1 = a^1(X^1, X^2, X^3, t), \\ a^2 = a^2(X^1, X^2, X^3, t), \\ a^3 = a^3(X^1, X^2, X^3, t). \end{cases} \quad (51)$$

Заменив параметры a^1, a^2, a^3 в функции $\mathbf{U} = \mathbf{U}(a^1, a^2, a^3, t)$ с помощью (51), получим новую искомую функцию $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ в уравнении (50):

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) := \mathbf{U}(\mathbf{a}, t) \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)}. \quad (52)$$

Таким образом, имеем два представления относительной производной $\overset{*}{\mathbf{X}}$ абсолютного вектор-радиуса \mathbf{X} : как функции лагранжевых координат $\overset{*}{\mathbf{X}}(\mathbf{a}, t) (= \mathbf{U}(\mathbf{a}, t))$ и как функции эйлеровых координат $\overset{*}{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, t) (= \mathbf{V}(\mathbf{X}, t))$. Из (52) видно, что это различные, хотя и связанные между собой, функции.

Имеет место и обратное соотношение, а именно:

$$\mathbf{U}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{a}, t)}.$$

Продифференцируем это равенство по t , представив векторы \mathbf{U}, \mathbf{V} в виде разложений

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{a}, t) &= U^l(\mathbf{a}, t) \mathbf{i}_l(t), & \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) &= V^l(\mathbf{X}, t) \mathbf{i}_l(t) \\ & & (l &= 1, 2, 3), \end{aligned}$$

и использовав правило дифференцирования сложной функции¹⁵. Тогда найдем, что коэффициенты U^l и V^l этих разложений связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^l(\mathbf{a}, t)}{\partial t} &= \frac{\partial V^l[\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), t]}{\partial t} + \\ &+ \left[\frac{\partial V^l(\mathbf{X}, t)}{\partial X^k} \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{a}, t)} \cdot \frac{\partial X^k(\mathbf{a}, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Возвращаясь снова к векторной форме и замечая, что

$$\frac{\partial X^k(\mathbf{a}, t)}{\partial t} \mathbf{i}_l(t) = \overset{*}{\mathbf{X}}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{a}, t),$$

приходим к следующему выражению для относительной производной вектора \mathbf{U} :

$$\begin{aligned} \overset{*}{\mathbf{U}}(\mathbf{a}, t) &= \left[\mathbf{U}(\mathbf{a}, t) \cdot \nabla_X \right] \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{a}, t)} + \\ &+ \overset{*}{\mathbf{V}}[\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), t]. \end{aligned}$$

Отсюда, поскольку (в силу определения решения $\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$)

$$\mathbf{X}(\mathbf{a}, t) \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)} = \mathbf{X},$$

находим, используя (52), что

$$\begin{aligned} \overset{*}{\mathbf{U}}(\mathbf{a}, t) \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)} &= \\ &= \left[\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla_X \right] \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) + \overset{*}{\mathbf{V}}(\mathbf{X}, t). \end{aligned} \quad (53)$$

Наконец, производя замены (53) и (52) в (50), получаем следующее уравнение в переменных Эйлера (\mathbf{X}, t):

$$\begin{aligned} \overset{*}{\mathbf{V}}(\mathbf{X}, t) + \left[\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla_X \right] \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) + 2\Omega \times \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) &= \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) - \frac{1}{\rho(\mathbf{X}, t)} \nabla_X P(\mathbf{X}, t) - \mathbf{W}_\Omega(\mathbf{X}, t). \end{aligned} \quad (54)$$

Замечание. В уравнении (54) плотность $\rho(\mathbf{X}, t) := \rho[\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), t] \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)}$ по аналогии с (52).

Опуская теперь аргументы (\mathbf{X}, t), замечая, что

$$\overset{*}{\mathbf{V}} = \frac{\partial' \mathbf{V}}{\partial t},$$

и исключая векторный градиент с помощью известного тождества

¹⁵Поскольку рассматривается относительная производная, т.е. производная со звездочкой $\overset{*}{\mathbf{X}}(\mathbf{a}, t)$, орты $\mathbf{i}_l(t)$ не дифференцируются, а производная от вектора считается равной вектору из производных от его компонент.

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{V}^2\right) - \mathbf{V} \times \text{rot}\mathbf{V}^{16},$$

перепишем (54) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial'\mathbf{V}}{\partial t} + \nabla_X\left(\frac{1}{2}\mathbf{V}^2\right) - \mathbf{V} \times \text{rot}_X\mathbf{V} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = \\ = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho(\mathbf{X}, t)}\nabla_X P - \mathbf{W}_\Omega. \end{aligned} \quad (55)$$

Уравнение (55) — новая форма уравнения движения жидкости в подвижных осях. Это — эйлера форма уравнения, поскольку в нем вектор \mathbf{X} положения жидкой частицы является не искомой функцией, а аргументом. Внешне оно отличается от уравнения (2) относительного движения жидкости лишь членом \mathbf{W}_Ω и искомой функцией $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$. Новая искомая функция $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ связана с абсолютной скоростью $\mathbf{V}_a := \mathbf{V}_X$ жидкости соотношением

$$\mathbf{V}_a(\mathbf{X}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{X}. \quad (56)$$

(Оно выводится из формулы (28), представленной в виде

$$\mathbf{V}_X(\mathbf{a}, t) = \mathbf{X}^*(\mathbf{a}, t) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{X}(\mathbf{a}, t),$$

с последующей заменой $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$ и применением (49), (52).) Из (56) видно, что \mathbf{V} не равна относительной скорости жидкости \mathbf{V}_r из уравнения (2). По этой причине слагаемое $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}$ в уравнении (55) не является привычным ускорением Кориолиса. Кинематически вектор \mathbf{V} определяет скорость конца абсолютного вектор–радиуса $\mathbf{r} := \mathbf{X}$ относительно подвижных осей (в проекциях на эти оси).

Произведем в уравнении (54) замену \mathbf{V} на \mathbf{V}_a . Из (56) получаем выражение

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{V}_a(\mathbf{X}, t) - \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{X}.$$

Отсюда следует, что относительная частная производная (при фиксированном \mathbf{X} , т.к. в (54) это аргумент) определяется формулой

$$\frac{\partial'\mathbf{V}}{\partial t} = \frac{\partial'\mathbf{V}_a}{\partial t} - \boldsymbol{\Omega}^* \times \mathbf{X}.$$

Подставляя это и предыдущее выражения в (54), учитывая формулу (49) для \mathbf{W}_Ω , заменяя градиент суммы суммой градиентов ([15, с. 160, формула 1]) и замечая, что

$$[\mathbf{V} \cdot \nabla_X][\boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{X}] = \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{V},$$

¹⁶См. [13, с. 177, формула 10] или, например, [15, с. 160; 16, с. 23].

после соответствующих преобразований получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial'\mathbf{V}_a}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla_X)\mathbf{V}_a + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_a = \\ = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) - \frac{1}{\rho(\mathbf{X}, t)}\nabla_X P(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{V}_a = \mathbf{V}_a(\mathbf{X}, t). \end{aligned} \quad (57)$$

Это — еще одна новая форма уравнения движения жидкости, которая, как и (1), (3), может быть названа “уравнением абсолютного движения жидкости в подвижных осях”. Во всех трех случаях вектор–функция \mathbf{V}_a , т. е. абсолютная скорость, является искомой.

Особенностью формы (57) оказывается то, что в ней, в отличие от формы (1), векторный градиент искомой функции \mathbf{V}_a берется не по вектору относительной скорости $\mathbf{V}_r = \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_e$, а по разности векторов $\mathbf{V} = \mathbf{V}_a - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}$. Векторы \mathbf{V}_r и \mathbf{V} равны, если точки O и O^* совпадают (в этом случае $\mathbf{r}' = \mathbf{X}$ и, как следствие, $\mathbf{V}_e = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}$), а тогда уравнения (57) и (1) идентичны. В общем же случае, когда \mathbf{V} и \mathbf{V}_r не равны, уравнения (1) и (57) находятся в видимом противоречии между собой. Ниже будет показано, что это противоречие — кажущееся.

3. ВЗАИМОСВЯЗЬ РАЗЛИЧНЫХ ФОРМ УРАВНЕНИЙ

3.1. Замены независимых переменных

Ранее переход от неподвижной системы координат к подвижной осуществлялся, в частности, по формулам (22). Эти соотношения можно классифицировать как линейную *однородную* замену независимых переменных задачи (ξ^1, ξ^2, ξ^3) на новые переменные (X^1, X^2, X^3) . Геометрически такая замена переменных означает простое перепроектирование абсолютного вектор–радиуса \mathbf{r} жидкой частицы из одной системы координат в другую. Существует и иной подход к замене независимых переменных, связанный с введением в рассмотрение *относительного* вектор–радиуса жидкой частицы. Рассмотрим этот подход подробнее.

Пусть абсолютный вектор–радиус $\mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$ разложен в сумму двух векторов вида

$$\mathbf{r}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}'(\mathbf{a}, t), \quad (58)$$

где \mathbf{r}_0 — вектор–радиус начала O подвижной системы координат относительно начала O^* неподвижной системы координат; \mathbf{r}' — вектор–радиус

жидкой частицы относительно начала O (короче, относительный вектор–радиус).

Замечание. Векторы \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}' в (58) не равноценны: \mathbf{r}_0 является общим для всех частиц жидкости, а \mathbf{r}' для каждой частицы свой, о чем напоминает вектор \mathbf{a} переменных Лагранжа среди его аргументов. Иначе говоря, формула (58) определяет сдвиг 3-мерного векторного пространства $\{\mathbf{r}'\}$ на вектор $\mathbf{r}_0(t)$.

Каждый из слагаемых векторов допускает двойственное представление, а именно:

$$\mathbf{r}_0(t) = \begin{cases} \xi_0(t) := \xi_0^k(t)\mathbf{e}_k & \text{в } \xi\text{-осях,} \\ \mathbf{X}_0(t) := X_0^l(t)\mathbf{i}_l(t) & \text{в } X\text{-осях,} \end{cases}$$

$$\mathbf{r}'(\mathbf{a}, t) = \begin{cases} \mathbf{y}(\mathbf{a}, t) := y^k(\mathbf{a}, t)\mathbf{e}_k & \text{в } \xi\text{-осях,} \\ \mathbf{Y}(\mathbf{a}, t) := Y^l(t)\mathbf{i}_l(\mathbf{a}, t) & \text{в } X\text{-осях,} \end{cases}$$

где ξ_0^k , X_0^l и y^k , Y^l – проекции векторов \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}' на неподвижные и подвижные оси соответственно.

В зависимости от того, на какие оси проектируются слагаемые векторы, возможны, по аналогии с предыдущим, следующие восемь комбинаций их координат¹⁷:

- 1) $\xi^k = \xi_0^k + y^k$, 2) $\xi^k = \xi_0^k + a_{kl}Y^l$,
- 3) $\xi^k = a_{kl}X_0^l + y^k$, 4) $\xi^k = a_{kl}(X_0^l + Y^l)$,
- 5) $X^l = X_0^l + Y^l$, 6) $X^l = X_0^l + a_{kl}y^k$,
- 7) $X^l = a_{kl}\xi_0^k + Y^l$, 8) $X^l = a_{kl}(\xi_0^k + y^k)$.

Обычно не оговаривается и считается само собой разумеющимся, что все векторы берутся в проекциях на оси одной и той же системы координат: если векторы \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}' проектируются на ξ -оси, то и вектор \mathbf{r} проектируется на эти же оси, а если \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}' проектируются на X -оси, то в этом же направлении проектируется и вектор \mathbf{r} (см. первую и пятую из приведенных комбинаций). При таком задании рассматриваемых векторов вместо (21) получаем следующие разложения абсолютного вектора \mathbf{r} по ортам рассматриваемых систем координат (зависимость от \mathbf{a} подразумевается):

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \xi^k(t)\mathbf{e}_k = [\xi_0^k(t) + y^k(t)]\mathbf{e}_k & \text{в } \xi\text{-осях,} \\ X^l(t)\mathbf{i}_l(t) = [X_0^l(t) + Y^l(t)]\mathbf{i}_l(t) & \text{в } X\text{-осях.} \end{cases} \quad (59)$$

Аналогами формул (22) тогда будут соотношения

$$\xi^k(\mathbf{a}, t) = a_{kl}(t)[X_0^l(t) + Y^l(\mathbf{a}, t)], \quad (60)$$

¹⁷Смысл обозначений через строчные и прописные буквы см. во “Введении”.

$$X^l(\mathbf{a}, t) = a_{kl}(t)[\xi_0^k(t) + y^k(\mathbf{a}, t)], \quad (61)$$

где $\xi_0^k(t)$, $X_0^l(t)$ – известные функции времени, описывающие движение начала O подвижной системы координат. Эти формулы соответствуют четвертой и восьмой из приведенных комбинаций. В отличие от соотношений (22), где “старыми” выступали переменные ξ^k , а “новыми” – X^l , здесь “старыми” являются ξ^k и X^l , а “новыми” по отношению к ним выступают переменные Y^l и y^k соответственно.

Из (60), (61) видно, что переход от старых координат ξ^k , X^l жидкой частицы к ее новым координатам Y^l , y^k можно трактовать как линейные *неоднородные* замены переменных со свободными членами

$$\xi_0^k(t) = a_{kl}(t)X_0^l(t), \quad X_0^l(t) = a_{kl}(t)\xi_0^k(t),$$

которые, по предыдущему, определяют проекции вектор–радиуса \mathbf{r}_0 точки O относительно точки O^* на неподвижные и подвижные оси соответственно.

Заметим, что при условии

$$\xi_0 = AX_0$$

из очевидного равенства

$$\xi_0 + y = A(X_0 + Y)$$

следует, что

$$y = AY,$$

т.е. проекции относительного вектор–радиуса \mathbf{r}' на неподвижные и подвижные оси связаны все-таки *однородной* (линейной) зависимостью.

Замечание. Если однородные замены переменных (22) геометрически означают перепроектирование абсолютного вектор–радиуса \mathbf{r} (две формы его представления), то неоднородные замены (60), (61) обозначают перепроектирование \mathbf{r} с предварительным его разложением в сумму $\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$ (две формы его представления из восьми возможных).

3.2. Абсолютное ускорение частицы при неоднородной замене переменных

Выведем формулу для абсолютного ускорения $\mathbf{w}_a := \mathbf{W}_X$, когда используется разложение $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$. В случае, когда ускорение берется в виде \mathbf{W}_X , векторы \mathbf{r} , \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}' проектируются на X -оси. Поэтому в соответствии со второй из формул (59) полагаем

$$\mathbf{r}(t) := \mathbf{X}(t) = [\mathbf{X}_0(t) + \mathbf{Y}(t)] = [X_0^l(t) + Y^l(t)]\mathbf{i}_l(t).$$

Отсюда для *относительных* производных вектора $\mathbf{X}(t)$ получаются выражения

$$\dot{\mathbf{X}}^* = (\dot{X}_0^l + \dot{Y}^l)\mathbf{i}_l(t) = (\dot{\mathbf{X}}_0^* + \dot{\mathbf{Y}}^*),$$

$$\ddot{\mathbf{X}}^{**} = (\ddot{X}_0^l + \ddot{Y}^l)\mathbf{i}_l(t) = (\ddot{\mathbf{X}}_0^{**} + \ddot{\mathbf{Y}}^{**}).$$

(Орты $\mathbf{i}_l(t)$ не дифференцируются по t .)

Подставив эти выражения в (33), найдем следующую формулу для абсолютного ускорения жидкой частицы:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_X = & \ddot{\mathbf{X}}_0^{**} + \ddot{\mathbf{Y}}^{**} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}^* \times (\mathbf{X}_0 + \mathbf{Y}) + \\ & + \boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{X}_0 + \mathbf{Y})] + 2\dot{\boldsymbol{\Omega}}^* \times (\dot{\mathbf{X}}_0^* + \dot{\mathbf{Y}}^*). \end{aligned} \quad (62)$$

Если здесь положить $\mathbf{Y}(t) \equiv \mathbf{0}$, что соответствует состоянию покоя жидкости относительно подвижной системы координат, получим векторную величину

$$\mathbf{W}_0 := \ddot{\mathbf{X}}_0^{**} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}^* \times \mathbf{X}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}_0) + 2\dot{\boldsymbol{\Omega}}^* \times \dot{\mathbf{X}}_0^*. \quad (63)$$

Покажем, что вектор \mathbf{W}_0 представляет собой абсолютное ускорение начала O подвижной системы координат в проекциях на подвижные оси. Для этого представим его в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0 = & (\ddot{\mathbf{X}}_0^{**} + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{X}}_0^*) + (\dot{\boldsymbol{\Omega}}^* \times \mathbf{X}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{X}}_0^*) + \\ & + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}_0). \end{aligned} \quad (64)$$

Применим дважды формулу связи абсолютной и относительной производных (27), положив там сначала

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{X}}_0^*,$$

а затем

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}_0.$$

Тогда для суммы первой группы слагаемых в (64) можно написать

$$\ddot{\mathbf{X}}_0^{**} + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{X}}_0^* = \frac{d'}{dt} \dot{\mathbf{X}}_0^* + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{X}}_0^* = \left[\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{X}}_0^* \right]_X,$$

а для суммы остальных слагаемых

$$\begin{aligned} & \dot{\boldsymbol{\Omega}}^* \times \mathbf{X}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{X}}_0^* + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}_0) = \\ & = \frac{d'}{dt} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}_0) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}_0) = \left[\frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}_0) \right]_X. \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения, перепишем (64) в виде

$$\mathbf{W}_0 = \left[\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{X}}_0^* + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}_0) \right]_X.$$

Но вектор

$$\mathbf{V}_0 := \dot{\mathbf{X}}_0^* + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}_0 \quad (65)$$

представляет собой, очевидно, абсолютную скорость начала подвижной системы координат, причем в проекциях на подвижные оси. Отсюда следует, что вектор \mathbf{W}_0 из (63) является абсолютным ускорением начала O в проекциях на подвижные оси.

Рассмотрим теперь общий случай, когда жидкость находится в движении относительно подвижной системы координат, т.е. положим, что вектор-функция $\mathbf{Y}(\mathbf{a}, t)$ отлична от тождественного нуля. Тогда, выделив в (62) ускорение \mathbf{W}_0 , получим следующее выражение для абсолютного ускорения жидкой частицы:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_X = & \mathbf{W}_0 + \dot{\boldsymbol{\Omega}}^* \times \mathbf{Y} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Y}) + \\ & + \ddot{\mathbf{Y}}^{**} + 2\dot{\boldsymbol{\Omega}}^* \times \dot{\mathbf{Y}}^*. \end{aligned} \quad (66)$$

Сравним формулы (33) и (66), полученные в результате *однородной* и *неоднородной* замен независимой переменной \mathbf{r} соответственно. Создается впечатление, что формула (66) – это обобщение формулы (33), поскольку в частном случае $\mathbf{X}_0 \equiv \mathbf{0}$, т.е. при неподвижной точке O , ускорение $\mathbf{W}_0 \equiv \mathbf{0}$ (в силу (64)) и вектор-радиус $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ (в силу второго из соотношений (59)), а следовательно, (66) превращается в (33). Однако, на самом деле, более общей является формула (33), так как она включает как частный случай представление $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{Y}$, в том числе и при $\mathbf{X}_0 \equiv \mathbf{0}$. При выводе формулы (33) никаких ограничений на движение начала O не накладывалось.

Замечание. Из сравнения выражений (66) и (34) следует, что классическая формула для абсолютного ускорения жидкой частицы в подвижных осях является результатом *неоднородной* замены координат вектора \mathbf{r} .

3.3. Уравнение относительного движения жидкости и уравнение Нариманова–Докучаева

Установим связь классического уравнения относительного движения жидкости и уравнения Нариманова–Докучаева с новыми уравнениями. Анализ выполним двумя способами – на основе лагранжева подхода (т.е. исходя из уравнения движения жидкой частицы (48)) и на основе эйлера подхода (т.е. исходя из уравнения поля скоростей (57)).

3.3.1. Преобразование уравнения движения частицы

Исходим из уравнения (48) абсолютного движения жидкой частицы (отмеченной переменными

Лагранжа \mathbf{a}) и неоднородной линейной замены векторного аргумента по формуле (58). Далее рассматривается представление $\mathbf{X}(\mathbf{a}, t) := \mathbf{X}_0(t) + \mathbf{Y}(\mathbf{a}, t)$ (см. комбинацию 5) возможного представления абсолютного вектор–радиуса $\mathbf{r}(t)$ в п. 3.1.).

Заменив в уравнении (48) левую часть на (66) и преобразовав соответствующим образом правую часть, придем к уравнению

$$\mathbf{W}_0 + \overset{*}{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{Y} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Y}) + \overset{**}{\dot{\mathbf{Y}}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \overset{*}{\dot{\mathbf{Y}}} = \mathbf{F}_*(\mathbf{Y}, t) - \frac{1}{\rho_*(\mathbf{Y}, t)} \nabla_Y P_*(\mathbf{Y}, t), \quad (67)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_*(\mathbf{Y}, t) &= \mathbf{F}[(\mathbf{X}_0 + \mathbf{Y}), t] = F^l[(\mathbf{X}_0 + \mathbf{Y}), t] \mathbf{i}_l(t), \\ P_*(\mathbf{Y}, t) &= P[(\mathbf{X}_0 + \mathbf{Y}), t], \\ \rho_*(\mathbf{Y}, t) &= \rho[(\mathbf{X}_0 + \mathbf{Y}), t], \end{aligned}$$

т. е. функции \mathbf{F} , P и ρ после замены \mathbf{X} на \mathbf{Y} . Заметим, что здесь формула замены градиента несколько отличается от (39), а именно, должно быть

$$\nabla_Y P_*(\mathbf{Y}, t) = \nabla_X P(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{Y}}. \quad (68)$$

Это следует из очевидных соотношений

$$\frac{\partial P_*(\mathbf{Y}, t)}{\partial Y^l} = \frac{\partial P(\mathbf{X}, t)}{\partial X^k} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{Y}} \cdot \frac{\partial X^k}{\partial Y^l}$$

и

$$\frac{\partial X^k}{\partial Y^l} = \frac{\partial (X_0^k + Y^k)}{\partial Y^l} = \delta_{kl}.$$

Уравнение (67) является, по существу, функционально-дифференциальным уравнением *относительного* движения жидкой частицы, поскольку содержит в качестве неизвестных функций относительный вектор–радиус $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(a^1, a^2, a^3, t)$, давление $P_*(\mathbf{Y}, t)$ и плотность $\rho_*(\mathbf{Y}, t)$. Исключим в нем переменные Лагранжа (a^1, a^2, a^3) .

Обозначим относительную скорость жидкости через

$$\mathbf{V}_r(\mathbf{a}, t) := \overset{*}{\dot{\mathbf{Y}}}(\mathbf{a}, t),$$

и введем вектор \mathbf{W}_e переносного ускорения жидкой частицы

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_e(\mathbf{a}, t) &:= \mathbf{W}_0(t) + \overset{*}{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{Y}(\mathbf{a}, t) + \\ &+ \boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Y}(\mathbf{a}, t)], \end{aligned} \quad (69)$$

где вектор $\mathbf{W}_0(t)$ ускорения точки O связан с параметрами $\boldsymbol{\Omega}(t)$, $\overset{*}{\boldsymbol{\Omega}}(t)$ углового и $\mathbf{X}_0(t)$, $\overset{*}{\mathbf{X}}_0(t)$,

$\overset{**}{\mathbf{X}}_0(t)$ поступательного движений подвижной системы координат формулой (64) ¹⁸. Тогда (67) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_r^*(\mathbf{a}, t) + 2\boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{V}_r(\mathbf{a}, t) &= \mathbf{F}_*[\mathbf{Y}(\mathbf{a}, t), t] - \\ - \frac{1}{\rho_*(\mathbf{Y}, t)} \nabla_Y P_*[\mathbf{Y}(\mathbf{a}, t), t] - \mathbf{W}_e[\mathbf{Y}(\mathbf{a}, t), t]. \end{aligned} \quad (70)$$

Это уравнение имеет структуру функционально-дифференциального уравнения (50). Все рассуждения, относящиеся к переменным Лагранжа и к переходу от уравнения (50) к уравнению (53), остаются в силе и для рассматриваемого случая относительных движений жидкости.

Осуществим в (70) переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера, что позволит превратить вектор–радиус \mathbf{Y} из искомой функции в независимую переменную и приведет к новой искомой функции $\mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t) := \overset{*}{\dot{\mathbf{Y}}}(\mathbf{Y}, t)$, определяющей поле относительной скорости жидкости. Рассмотрим подробней преобразование относительной производной $\overset{*}{\mathbf{V}}_r(\mathbf{a}, t)$.

Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{Y}, t)$ является решением уравнения

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{a}, t).$$

Для сокращения письма введем временное обозначение для производной по времени от \mathbf{Y} , а именно:

$$\mathbf{U}(\mathbf{a}, t) := \overset{*}{\dot{\mathbf{Y}}}(\mathbf{a}, t) (= \mathbf{V}_r(\mathbf{a}, t)). \quad (71)$$

Заменив здесь вектор переменных Лагранжа \mathbf{a} его выражением через относительный вектор–радиус \mathbf{Y} , получим новую искомую функцию в уравнении (70):

$$\mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t) = \mathbf{U}[\mathbf{a}(\mathbf{Y}, t), t]. \quad (72)$$

Так как отображения

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{a}, t), \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{Y}, t)$$

взаимно обратны, то

$$\mathbf{a}(\mathbf{Y}, t) \Big|_{\mathbf{Y}=\mathbf{Y}(\mathbf{a}, t)} = \mathbf{a}.$$

В силу этого имеет место обратное к (72) соотношение

$$\mathbf{U}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{V}_r[\mathbf{Y}(\mathbf{a}, t), t].$$

Продифференцируем это равенство по t , представив векторы \mathbf{U} , \mathbf{V}_r в виде следующих разложений

¹⁸ Вектор \mathbf{W}_0 определяет ускорение поступательного движения, $\overset{*}{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{Y}$ — вращательное ускорение и $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Y})$ — центробежное ускорение (см. [11, с. 75])

по базисным векторам подвижной системы координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{a}, t) &= U^l(\mathbf{a}, t) \mathbf{i}_l(t), \\ \mathbf{V}_r[\mathbf{Y}(\mathbf{a}, t), t] &= V_r^l[\mathbf{Y}(\mathbf{a}, t), t] \mathbf{i}_l(t), \\ &(l = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Тогда, используя правило дифференцирования сложных функций (орты не дифференцируются, т. к. ищутся относительные производные рассматриваемых векторов), найдем, что коэффициенты U^l и V_r^l этих разложений связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^l(\mathbf{a}, t)}{\partial t} &= \frac{\partial V_r^l[\mathbf{Y}(\mathbf{a}, t), t]}{\partial t} + \\ &+ \left[\frac{\partial V_r^l(\mathbf{Y}, t)}{\partial Y^k} \right]_{\mathbf{Y}=\mathbf{Y}(\mathbf{a}, t)} \cdot \frac{\partial Y^k(\mathbf{a}, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Возвращаясь снова к векторной форме и замечая, что

$$\frac{\partial Y^k(\mathbf{a}, t)}{\partial t} \mathbf{i}_l(t) = \dot{\mathbf{Y}}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{a}, t),$$

приходим к следующему выражению для относительной производной вектора \mathbf{U} :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{a}, t) &= \left[\mathbf{U}(\mathbf{a}, t) \cdot \nabla_Y \right] \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t) \Big|_{\mathbf{Y}=\mathbf{Y}(\mathbf{a}, t)} + \\ &+ \dot{\mathbf{V}}_r[\mathbf{Y}(\mathbf{a}, t), t]. \end{aligned} \quad (73)$$

Заменим здесь \mathbf{a} на решение $\mathbf{a}(\mathbf{Y}, t)$. Тогда, в силу (72),

$$\mathbf{U}(\mathbf{a}, t) \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{Y}, t)} = \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t).$$

Кроме того, в силу определения решения $\mathbf{a}(\mathbf{Y}, t)$, имеем

$$\mathbf{Y}(\mathbf{a}, t) \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{Y}, t)} = \mathbf{Y}, \quad (74)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_r[\mathbf{Y}(\mathbf{a}, t), t] \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{Y}, t)} &= \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t), \\ \dot{\mathbf{V}}_r[\mathbf{Y}(\mathbf{a}, t), t] \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{Y}, t)} &= \dot{\mathbf{V}}_r(\mathbf{Y}, t). \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения и обозначения (71), из равенства (73) находим окончательное выражение:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{a}, t) \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{Y}, t)} &= \dot{\mathbf{V}}_r(\mathbf{a}, t) \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{Y}, t)} = \\ &= \left[\mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t) \cdot \nabla_Y \right] \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t) + \dot{\mathbf{V}}_r(\mathbf{Y}, t). \end{aligned} \quad (75)$$

Здесь векторный градиент от вектора относительной скорости \mathbf{V}_r берется по вектору

$$\mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t) = \dot{\mathbf{Y}}(\mathbf{a}, t) \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{Y}, t)}.$$

В этом, в частности, заключается специфика рассматриваемого случая по сравнению со случаем (53).

Замена в (70) относительной производной по формуле (75) и использование (74) при замене вектора \mathbf{a} на вектор-функцию $\mathbf{a}(\mathbf{Y}, t)$ в остальных членах этого уравнения приводит к следующему искомому уравнению относительного движения жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial' \mathbf{V}_r}{\partial t} + (\mathbf{V}_r \cdot \nabla_Y) \mathbf{V}_r + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_r + \mathbf{W}_e(\mathbf{Y}, t) = \\ = \mathbf{F}_*(\mathbf{Y}, t) - \frac{1}{\rho_*(\mathbf{Y}, t)} \nabla_Y P_*(\mathbf{Y}, t), \quad \mathbf{V}_r = \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t). \end{aligned} \quad (76)$$

Здесь $\partial' \mathbf{V}_r / \partial t = \dot{\mathbf{V}}_r^*(\mathbf{Y}, t)$.

Если в уравнении (76) выполнить тождественное преобразование по формуле

$$(\mathbf{V}_r \cdot \nabla_Y) \mathbf{V}_r = \nabla_Y \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_r^2 \right) - \mathbf{V}_r \times \mathbf{rot}_Y \mathbf{V}_r,$$

то получим уравнение относительного движения жидкости в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial' \mathbf{V}_r}{\partial t} + \nabla_Y \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_r^2 \right) - \mathbf{V}_r \times \mathbf{rot}_Y \mathbf{V}_r + 2\boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{V}_r = \\ = \mathbf{F}_*(\mathbf{Y}, t) - \frac{1}{\rho_*(\mathbf{Y}, t)} \nabla_Y P_*(\mathbf{Y}, t) - \mathbf{W}_e(\mathbf{Y}, t), \end{aligned} \quad (77)$$

где $\mathbf{V}_r = \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t)$. Уравнение (77) является уточненной записью классического уравнения (2) с явным указанием аргументов искомых и заданных функций, а также переменных, по которым действуют дифференциальные операторы ∇ и \mathbf{rot} .

Итак, классическое уравнение относительного движения жидкости (см. (77) и (2)) связано с новым уравнением абсолютного движения частицы жидкости в подвижных осях (48) *неоднородной* линейной заменой $\mathbf{X}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{X}_0(t) + \mathbf{Y}(\mathbf{a}, t)$ независимой переменной и последующей нелинейной заменой $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{Y}, t)$ лагранжевых переменных.

3.3.2. Преобразование уравнения поля скоростей

Исходим из (нового) уравнения поля абсолютных скоростей жидкости (57) и замены векторного аргумента в нем по формуле

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{Y}, t), \quad \mathbf{X}(\mathbf{Y}, t) := \mathbf{X}_0(t) + \mathbf{Y}. \quad (78)$$

Здесь, в отличие от предыдущей замены (58), вектор-радиус \mathbf{Y} определяет относительные координаты точки поля (а не жидкой частицы) и остается постоянным в любой момент времени. Тогда абсолютный вектор-радиус \mathbf{X} этой точки поля

будет переменной величиной и функцией относительного вектор–радиуса \mathbf{Y} .

Замена независимой переменной автоматически приводит к новым искомым и заданным функциям в уравнении. Новой искомой функцией будет

$$\mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t) := \mathbf{V}_a(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)+\mathbf{Y}}.^{19}$$

Новыми заданными функциями будут

$$P_*(\mathbf{Y}, t) := P(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)+\mathbf{Y}},$$

$$\mathbf{F}_*(\mathbf{Y}, t) := \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)+\mathbf{Y}},$$

$$\rho_*(\mathbf{Y}, t) := \rho(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)+\mathbf{Y}}.$$

Заменим теперь производные в уравнении (57). Относительная производная от старой функции представима в виде

$$\frac{\partial' \mathbf{V}_a(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial'}{\partial t} [V_a^l(\mathbf{X}, t) \mathbf{i}_l(t)] = \frac{\partial V_a^l(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \mathbf{i}_l(t).$$

(Орты $\mathbf{i}_l(t)$ не дифференцируются.) Тогда, после замены (78) в исходных искомых функциях $V_a^l(\mathbf{X}, t)$, по формуле дифференцирования сложной функции находим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_a^l[\mathbf{X}_0(t) + \mathbf{Y}, t]}{\partial t} &= \frac{\partial V_a^l(\mathbf{X}, t)}{\partial X^k} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)+\mathbf{Y}} \cdot \frac{\partial X^k}{\partial t} + \\ &+ \frac{\partial V_a^l(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)+\mathbf{Y}} \quad (l, k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Здесь член слева обозначает частное дифференцирование по времени сложной функции $V_a^l[\mathbf{X}_0(t) + \mathbf{Y}, t]$ при фиксированном \mathbf{Y} , а последний член справа — значение частной производной от функции $V_a^l(\mathbf{X}, t)$ в точке $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0(t) + \mathbf{Y}$.

Поскольку при $\mathbf{Y} = \text{const}$

$$\frac{\partial X^l}{\partial t} = \frac{\partial [X_0^l(t) + Y^l]}{\partial t} = \frac{dX_0^l(t)}{dt}$$

и, очевидно,

$$\frac{\partial V_*^l(\mathbf{Y}, t)}{\partial t} = \frac{\partial V_a^l[\mathbf{X}_0(t) + \mathbf{Y}, t]}{\partial t},$$

для производной по времени от каждой из компонент старой векторной функции \mathbf{V}_a в точке $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0(t) + \mathbf{Y}$ имеем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_a^l(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)+\mathbf{Y}} &= \frac{\partial V_*^l(\mathbf{Y}, t)}{\partial t} - \\ - [\nabla_X V_a^l(\mathbf{X}, t)] \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)+\mathbf{Y}} \cdot \mathbf{X}_0^*(t), \end{aligned}$$

¹⁹Новая вектор–функция $\mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t)$ физически означает абсолютную скорость жидкости.

где вектор–столбец

$$\mathbf{X}_0^*(t) = \begin{bmatrix} \frac{dX_0^1(t)}{dt} \\ \frac{dX_0^2(t)}{dt} \\ \frac{dX_0^3(t)}{dt} \end{bmatrix}.$$

Принимая теперь, что градиент от вектора равен вектору из градиентов его компонент, переходя от отдельных компонент к векторам и вводя символический оператор

$$\mathbf{X}_0^*(t) \cdot \nabla_X,$$

получаем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\partial' \mathbf{V}_a(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)+\mathbf{Y}} &= \frac{\partial' \mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t)}{\partial t} - \\ - [\mathbf{X}_0^*(t) \cdot \nabla_X] \mathbf{V}_a(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)+\mathbf{Y}}. \end{aligned} \quad (79)$$

Далее, по аналогии с (68), для градиента скалярной функции $V_a^l(\mathbf{X}, t)$ справедливо равенство

$$\nabla_Y V_*^l(\mathbf{Y}, t) = \nabla_X V_a^l(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0+\mathbf{Y}}.$$

Оно равносильно векторному равенству

$$\nabla_Y \mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t) = \nabla_X \mathbf{V}_a(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0+\mathbf{Y}}.$$

Учитывая это в соотношении (79), приходим к следующей окончательной формуле для значения относительной производной в точке $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0(t) + \mathbf{Y}$ от старой искомой функции $\mathbf{V}_a(\mathbf{X}, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial' \mathbf{V}_a(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)+\mathbf{Y}} &= \frac{\partial' \mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t)}{\partial t} - \\ - [\mathbf{X}_0^*(t) \cdot \nabla_Y] \mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t). \end{aligned} \quad (80)$$

Полученные выражения позволяют представить уравнение (57) в новом виде. Подставив (80) в это уравнение и учитывая видоизменения как производных по пространственным переменным, так и всех функций, входящих в него, приходим к следующему уравнению с независимой пространственной переменной \mathbf{Y} и искомой функцией $\mathbf{V}_* = \mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t)$:

$$\frac{\partial' \mathbf{V}_*}{\partial t} + \left[[\mathbf{U}(\mathbf{Y}, t) - \mathbf{X}_0^*(t)] \cdot \nabla_Y \right] \mathbf{V}_* + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_* =$$

$$= \mathbf{F}_*(\mathbf{Y}, t) - \frac{1}{\rho_*(\mathbf{Y}, t)} \nabla_Y P_*(\mathbf{Y}, t), \quad (81)$$

где временно обозначено

$$\mathbf{U}(\mathbf{Y}, t) := \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)+\mathbf{Y}}.$$

Упростим выражение множителя при градиенте в левой части (81). Из (56) находим выражение

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{V}_a(\mathbf{X}, t) - \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{X}.$$

Поэтому, учитывая связь $\mathbf{V}_a(\mathbf{X}, t)$ с $\mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t)$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)+\mathbf{Y}} &= \mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t) - \\ &- \boldsymbol{\Omega}(t) \times [\mathbf{X}_0(t) + \mathbf{Y}] = \mathbf{U}(\mathbf{Y}, t). \end{aligned}$$

Но тогда искомым множителем при градиенте будет следующим:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{Y}, t) - \mathbf{X}_0^*(t) &= \mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t) - \mathbf{V}_0(t) - \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{Y} = \\ &= \mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t) - \mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t) = \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t), \end{aligned} \quad (82)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0(t) &= \mathbf{X}_0^*(t) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{X}_0(t), \\ \mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t) &= \mathbf{V}_0(t) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{Y}.^{20} \end{aligned}$$

Подстановка (82) в (81) приводит к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial' \mathbf{V}_*}{\partial t} + (\mathbf{V}_r \cdot \nabla_Y) \mathbf{V}_* + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_* &= \mathbf{F}_*(\mathbf{Y}, t) - \\ - \frac{1}{\rho_*(\mathbf{Y}, t)} \nabla_Y P_*(\mathbf{Y}, t), \quad \mathbf{V}_* &= \mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t). \end{aligned} \quad (83)$$

Сравнение уравнений (83) и (1) показывает, что они совпадают (с точностью до обозначений), т. е. получилось уравнение Нариманова–Докучаева.

Наконец, перейдем от уравнения Нариманова–Докучаева к уравнению относительного движения. Заменим в (83) искомую переменную $\mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t)$ новой искомой переменной $\mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t)$ по формуле

$$\mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t) = \mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t) + \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t).$$

При этом оператор слева в (83) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial' \mathbf{V}_*}{\partial t} + (\mathbf{V}_r \cdot \nabla_Y) \mathbf{V}_* + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_* &= \\ &= \frac{\partial'}{\partial t} [\mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t) + \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t)] + \end{aligned}$$

²⁰Физически векторы $\mathbf{V}_0(t)$, $\mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t)$, $\mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t)$ означают абсолютную скорость начала O подвижной системы координат (см. (65)), переносную и относительную скорости жидкости соответственно.

$$\begin{aligned} &+ (\mathbf{V}_r \cdot \nabla_Y) [\mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t) + \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t)] + \\ &+ \boldsymbol{\Omega} \times [\mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t) + \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t)] = \\ &= \frac{\partial' \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t)}{\partial t} + (\mathbf{V}_r \cdot \nabla_Y) \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t) + \\ &+ \frac{\partial' \mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t) + \\ &+ (\mathbf{V}_r \cdot \nabla_Y) \mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t). \end{aligned} \quad (84)$$

Здесь, очевидно, группа слагаемых

$$\frac{\partial' \mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t) = \mathbf{W}_e(\mathbf{Y}, t), \quad (85)$$

т.е. представляет переносное ускорение жидкости (см. также (69)). Кроме того,

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_r \cdot \nabla_Y) \mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t) &= (\mathbf{V}_r \cdot \nabla_Y) [\mathbf{V}_0(t) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{Y}] = \\ &= (\mathbf{V}_r \cdot \nabla_Y) (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Y}). \end{aligned} \quad (86)$$

Непосредственное вычисление дает выражение

$$\begin{aligned} &(\mathbf{V}_r \cdot \nabla_Y) (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Y}) = \\ &= (\mathbf{V}_r \cdot \nabla_Y) \begin{bmatrix} \Omega^2 Y^3 - \Omega^3 Y^2 \\ \Omega^3 Y^1 - \Omega^1 Y^3 \\ \Omega^1 Y^2 - \Omega^2 Y^1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Omega^2 V_r^3 - \Omega^3 V_r^2 \\ \Omega^3 V_r^1 - \Omega^1 V_r^3 \\ \Omega^1 V_r^2 - \Omega^2 V_r^1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t). \end{aligned} \quad (87)$$

С учетом (85)–(87) оператор (84) представляем в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial' \mathbf{V}_*}{\partial t} + (\mathbf{V}_r \cdot \nabla_Y) \mathbf{V}_* + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_* = \\ &= \frac{\partial' \mathbf{V}_r}{\partial t} + (\mathbf{V}_r \cdot \nabla_Y) \mathbf{V}_r + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_r + \mathbf{W}_e(\mathbf{Y}, t). \end{aligned}$$

Но тогда уравнение (83) переходит в уравнение

$$\begin{aligned} &\frac{\partial' \mathbf{V}_r}{\partial t} + (\mathbf{V}_r \cdot \nabla_Y) \mathbf{V}_r + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_r = \mathbf{F}_*(\mathbf{Y}, t) - \\ &- \frac{1}{\rho_*(\mathbf{Y}, t)} \nabla_Y P_*(\mathbf{Y}, t) - \mathbf{W}_e, \quad \mathbf{V}_r = \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t), \end{aligned} \quad (88)$$

совпадающее (с точностью до известного тождественного преобразования конвективного члена) с (77), что и требовалось.

Итак, классическое уравнение относительного движения жидкости (см. ((2) и его уточнение (77))

связано с новым эйлеровым уравнением поля абсолютных скоростей жидкости (57) *неоднородной* линейной заменой $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0(t) + \mathbf{Y}$ (при $\mathbf{Y} = \text{const}$) независимой переменной и последующей заменой $\mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t) = \mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t) + \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t)$ зависимой переменной.

Вернемся к вопросу о противоречии между уравнением Нариманова-Докучаева (1) и новым уравнением (57). Уравнения (83) и (1) совпадают (с точностью до обозначений). Отсюда следует, что новое уравнение (57) связано с уравнением Нариманова-Докучаева (1) преобразованием сдвига (т. е. неоднородной линейной заменой переменных) вида $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0(t) + \mathbf{Y}$. Таким образом, противоречие между новым (57) и классическим (1) уравнениями является кажущимся и объясняется тем, что в них в качестве пространственных переменных используются различные векторы: в первом случае – это абсолютный вектор-радиус \mathbf{X} , а во втором – относительный вектор-радиус \mathbf{Y} . Соответственно, и искомые функции в этих уравнениях различны: в уравнении (57) это вектор-функция абсолютной скорости жидкости $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_a(\mathbf{X}, t)$ и $P(\mathbf{X}, t)$, $\rho(\mathbf{X}, t)$, а в (1) – вектор-функция $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t)$ и $P = P_*(\mathbf{Y}, t)$, $\rho = \rho_*(\mathbf{Y}, t)$. Вектор-функция $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t)$ по физическому смыслу также является абсолютной скоростью жидкости в проекциях на подвижные оси, но, естественно, отличается от $\mathbf{V}_a(\mathbf{X}, t)$ аналитической структурой своих компонент по пространственным переменным Y^1, Y^2, Y^3 и времени t .

Вывод: классическое уравнение (1) и новое уравнение (57) связаны между собой преобразованием сдвига пространственных переменных.

3.4. Относительно-абсолютные уравнения движения жидкости

Ранее были рассмотрены преобразования гидродинамических уравнений, связанные с различными заменами (независимых и зависимых) переменных. На этом пути получено классическое уравнение относительного движения (2), а также новое уравнение абсолютного движения (57). В отличие от них, уравнение (1) будем классифицировать как относительно-абсолютное, поскольку в нем независимой пространственной переменной служит *относительный* вектор-радиус \mathbf{Y} , а искомыми – *абсолютная* скорость $\mathbf{V}_a := \mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t)$ и функция $P := P_*(\mathbf{Y}, t)$ (см. эквивалентное ему уравнение (83)).

Покажем теперь, что классическое уравнение “абсолютного движения жидкости в подви-

жной системе координат” (3) также является относительно-абсолютным. Для этого рассмотрим более точную запись (77) уравнения относительного движения (2) и преобразуем его.

Произведем в (77) замену зависимой переменной $\mathbf{V}_r = \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t)$ по формуле

$$\mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t) = \mathbf{V}_a(\mathbf{Y}, t) - \mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t),$$

где вектор переносной скорости \mathbf{V}_e определяется последним из соотношений (82) и в проекциях на подвижные оси задается вектор-столбцом

$$\mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t) = \begin{bmatrix} V_0^1(t) + \Omega^2 Y^3 - \Omega^3 Y^2 \\ V_0^2(t) + \Omega^3 Y^1 - \Omega^1 Y^3 \\ V_0^3(t) + \Omega^1 Y^2 - \Omega^2 Y^1 \end{bmatrix}. \quad (89)$$

В результате получим равенство

$$\begin{aligned} & \frac{\partial' \mathbf{V}_a}{\partial t} + \nabla_Y \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_a^2 - \mathbf{V}_a \cdot \mathbf{V}_e \right) - \\ & - (\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_e) \times \text{rot}_Y \mathbf{V}_a + 2\Omega \times \mathbf{V}_a - \frac{\partial' \mathbf{V}_e}{\partial t} + \\ & + \nabla_Y \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_e^2 \right) + (\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_e) \times \text{rot}_Y \mathbf{V}_e - 2\Omega \times \mathbf{V}_e = \\ & = \mathbf{F}_*(\mathbf{Y}, t) - \frac{1}{\rho} \nabla_Y P_*(\mathbf{Y}, t) - \mathbf{W}_e(\mathbf{Y}, t). \quad (90) \end{aligned}$$

Непосредственным вычислением, используя (89), находим, что

$$\begin{aligned} \nabla_Y \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_e^2(\mathbf{Y}, t) \right) &= \frac{1}{2} \nabla_Y \left[(V_0^1(t) + \Omega^2 Y^3 - \Omega^3 Y^2)^2 + \right. \\ & \left. + (V_0^2(t) + \Omega^3 Y^1 - \Omega^1 Y^3)^2 + \right. \\ & \left. + (V_0^3(t) + \Omega^1 Y^2 - \Omega^2 Y^1)^2 \right] = -\Omega \times \mathbf{V}_e. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получается выражение для вихря:

$$\text{rot}_Y \mathbf{V}_e = 2\Omega. \quad (91)$$

Учитывая в соотношении (90) последние два выражения и применяя формулу связи абсолютной и относительной производных (27) (в ней полагаем $\mathbf{B}(\mathbf{t}) = \mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t)$), найдем, что группа слагаемых

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial' \mathbf{V}_e}{\partial t} + \nabla_Y \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_e^2 \right) - \mathbf{V}_e \times \text{rot}_Y \mathbf{V}_e - 2\Omega \times \mathbf{V}_e = \\ & = - \frac{\partial' \mathbf{V}_e}{\partial t} - \Omega \times \mathbf{V}_e = - \frac{\partial \mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t)}{\partial t} = -\mathbf{W}_e(\mathbf{Y}, t). \quad (92) \end{aligned}$$

Замечая, наконец, что в силу (91)

$$2\Omega \times \mathbf{V}_a + \mathbf{V}_a \times \text{rot}_Y \mathbf{V}_e = \mathbf{0},$$

и используя (92), приведем равенство (90) к окончательному виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial' \mathbf{V}_a}{\partial t} + \nabla_Y \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_a^2 - \mathbf{V}_a \cdot \mathbf{V}_e \right) - (\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_e) \times \mathbf{rot}_Y \mathbf{V}_a = \\ = \mathbf{F}_*(\mathbf{Y}, t) - \frac{1}{\rho_*(\mathbf{Y}, t)} \nabla_Y P_*(\mathbf{Y}, t). \end{aligned} \quad (93)$$

Уравнение (93) полностью совпадает с классическим уравнением (3), уточняя его в части переменных, по которым действуют операторы ∇ и \mathbf{rot} и от которых зависят вектор массовых сил и давление.

Таким образом, так называемое “уравнение абсолютного движения жидкости в подвижной системе координат” (3) получается из уравнения (2) относительного движения жидкости заменой искомой функции $\mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t)$ (относительной скорости) на новую искомую функцию $\mathbf{V}_a(\mathbf{Y}, t)$ (абсолютную скорость) при сохранении в качестве аргумента относительного вектор–радиуса \mathbf{Y} .

Замечание. В работе [2, с. 57] уравнение (93) получено другим способом, а именно, с использованием физических соображений при исключении переносного ускорения $\mathbf{W}_e(\mathbf{Y}, t)$. Еще один способ вывода этого уравнения (из уравнения (1)) указан Г.С. Наримановым и Л.В. Докучаевым в [3, с. 19].

4. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ, ОТНЕСЕННЫХ К ПОДВИЖНЫМ ОСЯМ

Предыдущий анализ показал, что возможны различные формы гидродинамических уравнений, отнесенных к подвижным осям. В приложениях представляется целесообразной следующая естественная классификация этих уравнений.

AA–класс уравнений. Основным в этом классе является уравнение абсолютного движения жидкости (57). (Буква *A* — аббревиатура от английского слова Absolute — абсолютный.) Первая буква *A* в обозначении класса означает, что в уравнениях этого класса пространственной независимой переменной служит *абсолютный* вектор–радиус жидкой частицы, а вторая буква *A* — что искомой скоростью жидкости оказывается *абсолютная* скорость $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_a(\mathbf{X}, t)$. Уточняя тип уравнения (57), будем говорить, что оно является *XV_a*-уравнением, где символ *X* указывает на то, что независимой переменной есть абсолютный вектор–радиус $\mathbf{r} := \mathbf{X}$, а символ *V_a* указывает на искомую переменную в виде абсолютной скорости жидкости.

Замечание. Поскольку в уравнении (57) “промежуточная” неизвестная функция $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ может быть исключена с помощью простой замены

$\mathbf{V} = \mathbf{V}_a - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}$, она не учитывается при его классификации.

AR–класс уравнений. К этому классу относится уравнение (55) (а также эквивалентное ему уравнение (54)). Первая буква в обозначении класса, по-прежнему, означает, что в уравнениях этого класса пространственной независимой переменной служит *абсолютный* вектор–радиус жидкой частицы. Буква *R* (*R* — аббревиатура от английского слова Relative — относительный) означает, что искомой скоростью является *относительная* скорость изменения некоторого вектора. В уравнении (55) такой искомой величиной оказывается вектор $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$, т.е. скорость изменения абсолютного вектора $\mathbf{X}(t)$ относительно осей подвижной системы координат. Уточняя тип уравнения (55), будем говорить, что оно есть *XV*-уравнение.

RR–класс уравнений. Содержит в качестве основного уравнение относительного движения жидкости (76) (и эквивалентное ему уравнение (77)). Первая буква *R* означает, что пространственной независимой переменной служит *относительный* вектор–радиус жидкой частицы \mathbf{r}' . Вторая буква *R* указывает на то, что искомой скоростью является *относительная* скорость жидкости $\mathbf{V}_r = \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t)$. Элементы этого класса целесообразно называть, учитывая принятые обозначения, *YV_r*-уравнениями, где \mathbf{Y} — *относительная* пространственная переменная, \mathbf{V}_r — *искомая относительная* скорость.

RA–класс уравнений. К этому классу относится уравнение (93) (т.е. (3)) относительно абсолютного движения жидкости. В нем независимой пространственной переменной является *относительный* вектор–радиус \mathbf{Y} , а искомой скоростью — *абсолютная* скорость $\mathbf{V}_a := \mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t)$. Более точно элементы этого класса можно классифицировать как *YV_a*-уравнения. Уравнение Нариманова–Докучаева (1) также относится к *RA*-классу.

Замечание. Поскольку в уравнении (1) “промежуточная” неизвестная функция $\mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t)$ может быть исключена с помощью простой замены $\mathbf{V}_r = \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_e$, она не учитывается при его классификации.

Таким образом, из основных уравнений теории относительного движения жидкости, приведенных во “Введении”, уравнения (1) и (3) относятся к *RA*-классу, а (2) — к *RR*-классу.

Замечание. Описанная классификация учитывает свойства независимых и зависимых переменных в уравнениях, т.е. другими словами, она использует критерий “вектор положения–вектор скорости”. Давление *P* и плотность ρ являются

скалярными функциями и потому не используются в этой классификации. “Дополнительные” искомые функции, которые могут быть исключены из уравнений с помощью простых замен переменных, также не влияют на принадлежность этих уравнений к тому или иному классу.

Уравнения внутри одного класса делятся на подклассы 1-го уровня по признаку формы представления в них субстанциональной производной или конвективного члена, что отражается дифференциальными операторами

$$\frac{D\mathbf{a}}{Dt}, \quad (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \times \text{rot}\mathbf{b},$$

где \mathbf{a} , \mathbf{b} — различные виды вектора скорости жидкости. Получаются подклассы уравнений, имеющих формы, аналогичные формам Эйлера или Громеки–Ламба уравнений гидродинамики в неподвижных осях. Примером могут служить уравнения (2) и (6), относящиеся, как будет ясно из дальнейшего, к RR -классу, но отличающиеся формой представления субстанциональной производной.

Уравнения внутри подклассов 1-го уровня отличаются друг от друга значениями входящих в них известных параметров: 1) массовых сил (определяются вектором \mathbf{F}) и 2) движения подвижной системы координат (определяются величинами $\mathbf{X}_0(t)$, $a_{kl}(t)$, $\mathbf{\Omega}(t)$ и соответствующими производными по времени). По признаку совпадения свойств некоторых из этих параметров элементы одного класса можно объединять в подклассы следующего, 2-го, уровня.

Например, классические уравнения (3) составляют важный подкласс RA -класса. Основными признаками элементов этого подкласса являются потенциальность вектора массовых сил \mathbf{F} , постоянство параметра ρ и, как следствие, существование интеграла Лагранжа–Коши. Будем говорить, что уравнения с отмеченными свойствами принадлежат RAi -подклассу. Буква i (аббревиатура английского слова *integrable* — интегрируемый) указывает на фундаментальное свойство интегрируемости уравнений этого класса.

Пример. Проанализируем упоминавшееся во Введении уравнение (5) работы [4], относящееся к случаю колебаний жидкости в поступательно перемещающемся баке, и установим класс, к которому оно принадлежит. Это уравнение выведено из общего уравнения Эйлера в неподвижных осях (47)²¹ в предположении что жидкость: 1) невязкая, 2) несжимаемая, 3) имеет постоянную плотность $\rho = \text{const}$. Кроме того, считалось, что: 4)

²¹ Анализ выполняется при физических допущениях упомянутой работы, но в обозначениях настоящей работы.

массовая сила сводится к силе тяжести \mathbf{g} , направленной в отрицательном направлении оси $O^*\xi^3$, так что

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{g} = (0, 0, -g);$$

5) абсолютное движение жидкости потенциально с потенциалом скорости $\Phi(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$, так что

$$\mathbf{v}_a(\boldsymbol{\xi}, t) = \nabla_\xi \Phi(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t).^{22}$$

При этих предположениях, в силу тождества

$$\begin{aligned} & (\mathbf{v}_a(\boldsymbol{\xi}, t) \cdot \nabla_\xi) \mathbf{v}_a(\boldsymbol{\xi}, t) = \\ & = \nabla_\xi \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_a^2(\boldsymbol{\xi}, t) \right) - \mathbf{v}_a(\boldsymbol{\xi}, t) \times \text{rot}_\xi \mathbf{v}_a(\boldsymbol{\xi}, t), \end{aligned}$$

известного свойства отсутствия вихрей у потенциальных течений, т. е. равенства

$$\text{rot}_\xi \mathbf{v}_a(\boldsymbol{\xi}, t) = 0,$$

и непосредственно проверяемого соотношения

$$\mathbf{g} = -\nabla_\xi (g\xi^3) \quad (\nabla_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi^k} \mathbf{e}_k, \quad k = 1, 2, 3),$$

из (47) получено следующее уравнение абсолютного движения жидкости, отнесенное к *неподвижным* осям:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \nabla_\xi \Phi(\boldsymbol{\xi}, t) + \nabla_\xi \left(\frac{1}{2} \nabla_\xi \Phi(\boldsymbol{\xi}, t) \cdot \nabla_\xi \Phi(\boldsymbol{\xi}, t) \right) = \\ & = -\nabla_\xi (g\xi^3) - \frac{1}{\rho} \nabla_\xi p(\boldsymbol{\xi}, t). \end{aligned} \quad (94)$$

Как известно, это уравнение допускает интеграл Коши–Лагранжа вида

$$\frac{p(\boldsymbol{\xi}, t)}{\rho} + \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\nabla_\xi \Phi(\boldsymbol{\xi}, t) \right)^2 + g\xi^3 = F(t),$$

где $F(t)$ — произвольная функция времени. Искомыми здесь cpm потенциал абсолютной скорости $\Phi(\boldsymbol{\xi}, t)$ и давление $p(\boldsymbol{\xi}, t)$, а вектор положения является абсолютным, т. е. $\mathbf{r} := \boldsymbol{\xi}$.

Далее вводится в рассмотрение жестко связанная с баком подвижная система координат $O X^1 X^2 X^3$ с осями, параллельными соответствующим осям неподвижной системы координат $O^* \xi^1 \xi^2 \xi^3$. (Основным мотивом введения подвижной системы координат является упрощение формулировки краевых условий на стенках бака и

²² В [4] введены почти не используемая в современной гидромеханике левые системы координат, а потенциал скорости жидкости взят со знаком минус, что также нетрадиционно.

на свободной поверхности жидкости.) Таким образом, используется подход Жуковского, при котором замена пространственных переменных производится не в уравнении движения, а в его интеграле.

Связь абсолютных ξ^k и относительных Y^l координат вектора положения жидкой частицы определяется формулой (см. п. 3.1, комбинация 4))

$$\xi^k = a_{kl}(X_0^l + Y^l),$$

где $X_0^l(t)$ — проекции на подвижные оси абсолютного вектор–радиуса точки O , а матрица из направляющих косинусов a_{kl} является единичной в силу параллельности осей координат. В связи с такой заменой изменяется и искомая функция, превращаясь в функцию

$$\Phi_*(\mathbf{Y}, t) = \Phi(\xi, t) \Big|_{\xi=\mathbf{x}_0(t)+\mathbf{Y}}.$$

Аналогичные изменения претерпевает также функция давления:

$$P_*(\mathbf{Y}, t) = p(\xi, t) \Big|_{\xi=\mathbf{x}_0(t)+\mathbf{Y}}. \quad (95)$$

Производные по времени от новой $\Phi_*(\mathbf{Y}, t)$ и старой $\Phi(\xi, t)$ функций связаны соотношением

$$\frac{\partial \Phi_*(\mathbf{Y}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(\xi, t)}{\partial \xi^k} \Big|_{\xi=\mathbf{x}_0(t)+\mathbf{Y}} \cdot \frac{d\xi^k(t)}{dt} + \frac{\partial \Phi(\xi, t)}{\partial t} \Big|_{\xi=\mathbf{x}_0(t)+\mathbf{Y}}$$

или, короче,

$$\frac{\partial \Phi_*(\mathbf{Y}, t)}{\partial t} = \left(\nabla_\xi \Phi(\xi, t) \cdot \mathbf{V}_0(t) + \frac{\partial \Phi(\xi, t)}{\partial t} \right) \Big|_{\xi=\mathbf{x}_0(t)+\mathbf{Y}} \quad (96)$$

где

$$\mathbf{V}_0(t) = \dot{\xi}^k \mathbf{e}_k = \dot{X}_0^l(t) \mathbf{i}_l(t)$$

— вектор абсолютной скорости точки O , проекции которого на неподвижные и подвижные оси, как и следовало ожидать, совпадают. (В этом можно непосредственно убедиться, продифференцировав по t выражение для ξ^k через $X_0^l(t)$ и Y^l .) Кроме того, имеет место связь градиентов (по аналогии с (68))

$$\nabla_Y \Phi_*(\mathbf{Y}, t) = \nabla_\xi \Phi(\xi, t) \Big|_{\xi=\mathbf{x}_0(t)+\mathbf{Y}}. \quad (97)$$

Заметим, что $\nabla_\xi \Phi(\xi, t)$ представляет абсолютную скорость жидкости в проекциях на ξ -оси, т. е. $\mathbf{v}_a := \mathbf{v}_\xi = \nabla_\xi \Phi(\xi, t)$, а $\nabla_Y \Phi_*(\mathbf{Y}, t)$ — абсолютную скорость жидкости в проекциях на X -оси, т. е. $\mathbf{v}_a := \mathbf{V}_X = \nabla_Y \Phi_*(\mathbf{Y}, t)$ (см. схему рис. 1)

С учетом формул (95) — (97) интеграл Коши–Лагранжа после замены $\xi = \mathbf{X}_0(t) + \mathbf{Y}$ представляется в виде

$$\frac{P_*(\mathbf{Y}, t)}{\rho} + \frac{\partial \Phi_*(\mathbf{Y}, t)}{\partial t} - \nabla_Y \Phi_*(\mathbf{Y}, t) \cdot \mathbf{V}_0(t) + \frac{1}{2} \left(\nabla_Y \Phi_*(\mathbf{Y}, t) \right)^2 + g\xi^3 = F(t), \quad (98)$$

где необходимо положить

$$\xi^3 = X_0^3(t) + Y^3.$$

Уравнение (98) относится к RA -классу, поскольку в нем независимой пространственной переменной служит *относительный* вектор–радиус \mathbf{Y} , а искомой скоростью — *абсолютная* скорость $\mathbf{v}_a := \nabla_Y \Phi_*(\mathbf{Y}, t)$. Более того, его можно отнести к RAi -подклассу, поскольку оно является первым интегралом уравнения (93) (т.е. (3)) из этого подкласса.

При введении подвижной системы координат абсолютная скорость жидкой частицы может быть заменена (если это необходимо) ее относительной скоростью. В рассматриваемом случае поступательного движения бака и потенциального течения жидкости имеет место равенство (см. формулы (4) и (97))

$$\nabla_Y \Phi_*(\mathbf{Y}, t) = \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t) + \mathbf{V}_0(t). \quad (99)$$

Замена (99) в (98) приводит к уравнению

$$\frac{P_*(\mathbf{Y}, t)}{\rho} - \frac{1}{2} \mathbf{V}_r^2(\mathbf{Y}, t) + g\xi^3 + \frac{\partial \Phi_*(\mathbf{Y}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{V}_0^2(t) = F(t), \quad (100)$$

совпадающему с точностью до обозначений²³ и знаков при двух членах (при производной по времени и при квадрате относительной скорости) с анализируемым уравнением (5) работы [4]. Но это уравнение содержит три неизвестные величины (потенциал абсолютной скорости $\Phi_*(\mathbf{Y}, t)$, вектор относительной скорости $\mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t)$ и давление $P_*(\mathbf{Y}, t)$) вместо двух неизвестных величин ($\Phi_*(\mathbf{Y}, t)$ и $P_*(\mathbf{Y}, t)$) в уравнении (98) из RAi -подкласса. Преобразованное уравнение (100) оказалось сложнее исходного уравнения (98).

По предлагаемой классификации уравнение (5) относится к RAi -подклассу, поскольку “лишняя” неизвестная переменная (вектор относительной скорости $\mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t)$) может быть исключена.

²³Обозначениям настоящей работы $P_*(\mathbf{Y}, t)$, $\mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t)$, $\Phi_*(\mathbf{Y}, t)$, $F(t)$, (Y^1, Y^2, Y^3) , (ξ^1, ξ^2, ξ^3) соответствуют обозначения P , \mathbf{q}_{rel} , $-\Phi$, $C(t)$, $(x, -y, z)$, $(X', -Y', Z')$ работы [4].

Заметим, что столь скрупулезный анализ был предпринят по причине крайней важности исходных общих уравнений модели, с одной стороны, и необходимости проверки технических деталей, с другой стороны.²⁴ Уравнение оказалось правильным, упростив форму исходного уравнения (98), но увеличив при этом число неизвестных задачи.

Наконец, уравнения внутри одного подкласса могут отличаться формой представления пространственных координат (декартовы, цилиндрические, сферические, эллипсоидальные и др. координаты).

5. СЛУЧАИ СОВПАДЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ

Все гидродинамические уравнения, отнесенные к подвижным осям, зависят от параметров движения этих осей. При этом для некоторых случаев таких движений уравнения определенных классов могут совпадать. Ранее отмечалось, например, что в том частном случае, когда начало O в любой момент времени находится в неподвижной точке O^* , уравнения абсолютного и относительного движений жидкости (т. е. уравнения AA- и RR-классов) совпадают. Возникает вопрос: существуют ли другие случаи движений подвижной системы координат, для которых уравнения различных классов совпадают. Оказывается справедливым следующее общее утверждение:

если начало O подвижной системы координат все время движется на одном и том же расстоянии от неподвижной точки O^ и проекции его вектор-радиуса $\mathbf{r}_0(t)$ на оси этой системы координат постоянны, то при любых угловых движениях этой системы координат XV -уравнение (55) совпадает с YV_r -уравнением (76) с точностью до преобразования сдвига вектора пространственных независимых переменных.*

Приведем примеры практических задач, в которых выполнены условия этого утверждения.

Пример 1. Пусть начало O движется по поверхности земной сферы. Оси X -системы координат направлены следующим образом: OX^1 — по касательной к параллели, OX^2 — по касательной к меридиану, OX^3 — вдоль радиуса O^*O Земли (рис. 2).

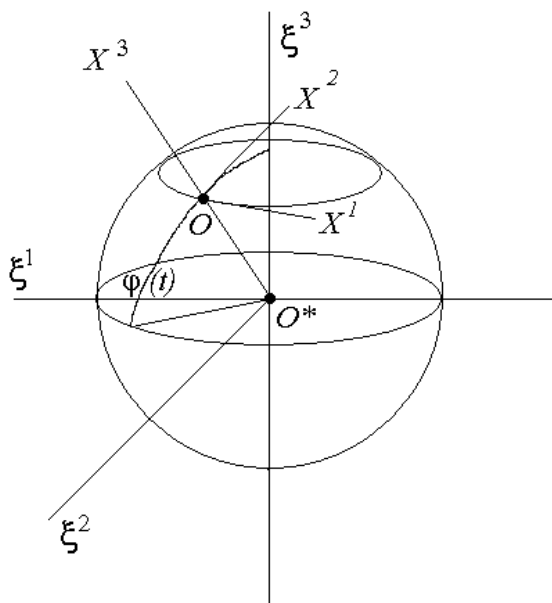


Рис. 2. Случай подвижной системы координат $OX^1X^2X^3$ на поверхности Земли

Если принять, что земная сфера вращается, а точка O покоится на ней (как, например, в некоторых задачах динамики атмосферы или океана), то вектор-радиус $\mathbf{r}_0(t)$ точки O в проекциях на подвижные оси имеет вид

$$X_0^1 = X_0^2 = 0, \quad X_0^3 = R,$$

где R — радиус Земли. Эти соотношения являются следствием того, что ориентация вектор-радиуса $\mathbf{r}_0(t)$ в любой момент времени совпадает с ориентацией оси OX^3 подвижной системы координат.

Если, наоборот, земная сфера покоится, а точка O движется по ее поверхности (как, например, в задачах о колебаниях жидкости в подвижных цистернах, танкерах или на борту летательных аппаратов), то по-прежнему и по той же причине координаты (X_0^1, X_0^2, X_0^3) будут удовлетворять предыдущим соотношениям.

В обоих случаях проекции вектор-радиуса $\mathbf{r}_0(t)$ на подвижные оси постоянны. Заметим, что при этом абсолютная скорость $\mathbf{v}_0(t)$ начала O подвижной системы координат в проекциях на подвижные оси отлична от нуля. Это вытекает из известной формулы связи между линейной скоростью начала O и угловой скоростью Ω подвижной системы координат [17] (стр.20):

$$\Omega^1 = -\frac{V_N(t)}{R}, \quad \Omega^2 = \frac{V_E(t)}{R}, \quad \Omega^3 = \Omega^2 \operatorname{tg} \varphi(t),$$

²⁴Например, в связи с заменами пространственных переменных и искомым функциям не ясно, почему в [4] интеграл Коши-Лагранжа, отнесенный к неподвижной и подвижной системам координат, содержит одну и ту же функцию Φ (см. уравнения (1.7a) и (1.7b) цитируемой монографии). Также вызывает вопросы сохранение переменной Z' в уравнении (1.7b).

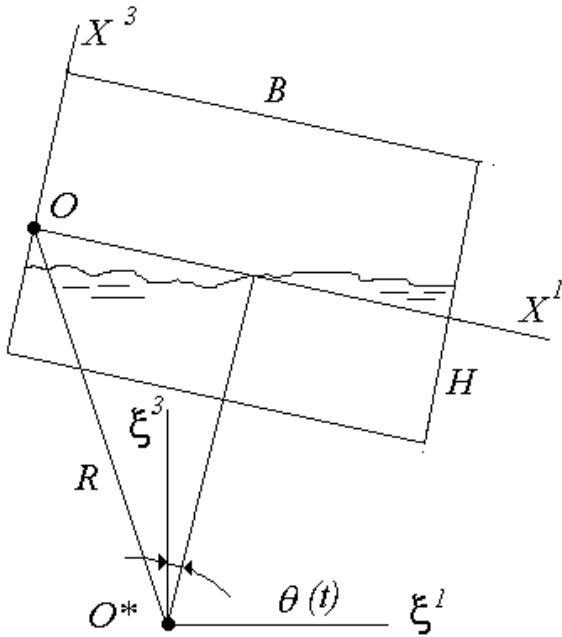


Рис. 3. Подвижная система координат $OX^1X^2X^3$ в случае качающегося бака (оси OX^2 и $O^*\xi^2$ перпендикулярны плоскости чертежа и направлены за чертеж)

где

$$V_E(t) = U \cos \varphi(t) + v_E(t), \quad V_N(t) = v_N(t),$$

— проекции абсолютной скорости начала O на подвижные оси; U — угловая скорость Земли, направленная вдоль оси $O^*\xi^3$; $v_N(t), v_E(t)$ — составляющие вдоль меридиана и параллели скорости движения начала O относительно Земли, $\varphi(t)$ — переменная географическая широта точки O .

Пример 2. Рассмотрим задачу о колебаниях жидкости со свободной поверхностью в прямоугольном баке квадратного сечения, совершающем плоские угловые колебания по углу $\theta(t)$ около неподвижной точки O^* в лабораторных условиях (см. рис. 3, изображающий механическую систему из работы [5]).

Пусть по некоторым соображениям начало O жестко связанной с баком системы координат $OX^1X^2X^3$ размещено на одном из боковых ребер бака. Тогда координаты начала O в подвижной системе координат определяются формулами

$$X_0^1 = -\frac{B}{2}, \quad X_0^2 = -\frac{B}{2}, \quad X_0^3 = R + H,$$

где B — длина стороны квадрата, лежащего в плоскости сечения бака, перпендикулярного оси OX^3 ; R — расстояние от центра вращения O^* до нижне-

го основания бака; H — уровень жидкости в состоянии покоя. Эти соотношения являются следствием того, что подвижная система координат жестко связана с баком, а ориентация относительно нее направленного отрезка O^*O остается неизменной в любой момент времени, хотя сам отрезок вращается около точки O^* в неподвижной системе координат. Таким образом, и в этом примере начало O подвижной системы координат все время движется на одном и том же расстоянии от неподвижной точки O^* , а проекции его вектор-радиуса $\mathbf{r}_0(t)$ на оси этой подвижной системы координат постоянны.

Доказательство сформулированного утверждения сводится к вычислению переносного ускорения \mathbf{W}_e в YV_r -уравнении (76) и вектора \mathbf{W}_Ω в XV -уравнении (55). При сделанных предположениях

$$\overset{*}{\mathbf{X}}_0(t) = 0, \quad \overset{**}{\mathbf{X}}_0(t) = 0.$$

Но тогда из (63) получается следующая формула для абсолютного ускорения начала подвижной системы координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0 &= \overset{**}{\mathbf{X}}_0 + \overset{*}{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{X}_0 + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{X}_0) + 2\mathbf{\Omega} \times \overset{*}{\mathbf{X}}_0 = \\ &= \overset{*}{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{X}_0 + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{X}_0). \end{aligned}$$

Учитывая это в (69), находим выражение для переносного ускорения жидкой частицы, а именно:

$$\mathbf{W}_e = \overset{*}{\mathbf{\Omega}} \times (\mathbf{X}_0 + \mathbf{Y}) + \mathbf{\Omega} \times [\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{X}_0 + \mathbf{Y})]. \quad (101)$$

Подставляя выражение (101) в (76) и полагая, что

$$\mathbf{X}_0(t) + \mathbf{Y} := \mathbf{Z}(\mathbf{Y}, t),$$

получаем уравнение относительного движения (76) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial' \mathbf{V}_r}{\partial t} + (\mathbf{V}_r \cdot \nabla_Y) \mathbf{V}_r + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}_r + \overset{*}{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{Z} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{Z}) = \\ = \mathbf{F}_*(\mathbf{Y}, t) - \frac{1}{\rho_*(\mathbf{Y}, t)} \nabla_Y P_*(\mathbf{Y}, t), \end{aligned} \quad (102)$$

где

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t), \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\mathbf{Y}, t).$$

Рассмотрим теперь XV -уравнение (55). В нем

$$\mathbf{W}_\Omega = \overset{*}{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{X} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{X})$$

в силу второго из соотношений (49), а

$$\nabla_X \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) - \mathbf{V} \times \text{rot}_X \mathbf{V} = (\mathbf{V} \cdot \nabla_X) \mathbf{V}$$

в силу известного тождества. Поэтому при сформулированных в утверждении условиях абсолютно-относительное уравнение (55) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla_X) \mathbf{V} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega}^* \times \mathbf{X} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}) = \\ = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) - \frac{1}{\rho(\mathbf{X}, t)} \nabla_X P(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t). \end{aligned} \quad (103)$$

Уравнения (102) и (103) имеют одинаковую структуру, но отличаются пространственными независимыми переменными, искомыми и заданными функциями. Заметим, что в уравнении (102) функция $\mathbf{Z}(\mathbf{Y}, t)$ относится к числу заданных.

Для завершения доказательства установим соотношение, связывающее искомые функции $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ и $\mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t)$. По определению

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t) &= \mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t) - \mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t), \\ \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{V}_a(\mathbf{X}, t) - \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{X}, \\ \mathbf{X} &= \mathbf{X}_0(t) + \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t) = \mathbf{V}_a(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)+\mathbf{Y}},$$

из предпоследнего равенства находим выражение

$$\mathbf{V}_*(\mathbf{Y}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)+\mathbf{Y}} + \boldsymbol{\Omega}(t) \times [\mathbf{X}_0(t) + \mathbf{Y}].$$

Подставляя его в формулу для \mathbf{V}_r и учитывая, что переносная скорость

$$\mathbf{V}_e(\mathbf{Y}, t) = \mathbf{V}_0(t) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{Y},$$

получаем искомое соотношение, а именно:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t) &= \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)+\mathbf{Y}} + \\ &+ \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{X}_0(t) - \mathbf{V}_0(t). \end{aligned} \quad (104)$$

Формула (104) связывает $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ и $\mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t)$ в общем случае. Из нее, в частности, следует, что при совпадении точек O^* и O , когда $\mathbf{X}_0(t) \equiv 0$ и $\mathbf{V}_0(t) \equiv 0$, имеет место равенство

$$\mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{Y}} = \mathbf{V}(\mathbf{Y}, t), \quad (105)$$

т.е. в этом частном случае относительная скорость жидкости равна относительной производной от ее абсолютного вектор-радиуса (разумеется, все векторы берутся в проекциях на подвижные оси).

В условиях доказываемого утверждения, когда $\mathbf{X}_0(t) = \mathbf{X}_0 = \text{const}$, очевидно,

$$\mathbf{V}_0(t) = \mathbf{X}_0^* (t) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{X}_0(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{X}_0.$$

Но тогда, из соотношения (104) получается аналогичное (105) соотношение

$$\mathbf{V}_r(\mathbf{Y}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0+\mathbf{Y}}. \quad (106)$$

Отсюда видно, что искомые функции уравнений (102) и (103) не совпадают, но связаны преобразованием сдвига пространственных переменных.

Если теперь в уравнении (103) аргументы \mathbf{X} всех функций заменить на $\mathbf{X}_0 + \mathbf{Y}$, воспользоваться равенством (106), а также учесть формулы связи функций \mathbf{F} , ρ , P и \mathbf{F}_* , ρ_* , P_* (см. п. 3.3.1), то получим уравнение (102) (в котором $\mathbf{Z} = \mathbf{X}$).²⁵ Произвольность угловых движений системы отсчета следует из произвольности вектора ее угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}(t)$, на который никаких ограничений не налагалось. Доказательство завершено.

Обращаясь к уравнению (6) и выражая полную производную через локальную и субстанциональную производные, видим, что оно совпадает с также “смешанным” уравнением (102), и, следовательно, верно.²⁶ Отсюда, кроме того, следует, что искомая вектор-функция \mathbf{v}_r уравнения (6) является функцией не абсолютного вектор-радиуса \mathbf{r} , а относительного вектор-радиуса \mathbf{r}' .

Заметим, что в условиях утверждения начало подвижной системы координат может иметь сложные траектории в неподвижном пространстве, несмотря на постоянство вектора $\mathbf{X}_0(t)$.

ВЫВОДЫ

В работе проанализирован и обобщен опыт использования общих дифференциальных уравнений динамики идеальной жидкости в прикладных задачах теории относительного движения жидкости. Предложена классификация известных форм этих уравнений и найдены их новые формы. Руководящими явились идеи двойственного представления векторов при наличии двух систем координат и необязательности разложения $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0(t) + \mathbf{Y}$ абсолютного вектор-радиуса жидкой частицы при переходе в подвижную систему отсчета. Исходным уравнением всех построений явилось новое уравнение (48). Цепочка замен лагранжевых и зависи-

²⁵В частной производной по времени от функции $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ можно непосредственно заменить “фиксированный” аргумент \mathbf{X} на $\mathbf{X}_0 + \mathbf{Y}$. Равенства же градиентов ∇_X и ∇_Y для давлений P и P_* , а также для компонент векторов \mathbf{V} и \mathbf{V}_r следуют из формулы (68) и аналогичных соотношений.

²⁶Соответствие обозначений в оригинале [5] и в настоящей статье очевидно, нужно только приравнять \mathbf{r} из оригинала вектору $\mathbf{X}(\mathbf{Y}, t)$.

мых переменных

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{X}, t) \longrightarrow \mathbf{V}_a = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}$$

привела к также новому уравнению абсолютного движения в подвижных осях (57), аналогичному уравнению Нариманова–Докучаева (1). Попутно получены ранее не встречавшиеся уравнения (54) и (55), связанные друг с другом известным тождественным преобразованием конвективного члена и имеющие, в отличие от (57), структуру уравнения относительного движения. Указаны последовательности замен зависимых и независимых переменных, выводящие новое уравнение (48) на классические уравнения относительного (2) и абсолютного (3) движений жидкости. На практике эти замены позволяют пересчитывать характеристики движения жидкости в подвижных осях при необходимости согласования данных, полученных на основе уравнений из различных классов. В терминах параметров движения систем координат сформулированы достаточно общие условия совпадения (с точностью до преобразования сдвига пространственных переменных) нового XV -уравнения (55) и классического YV_r -уравнения (2). На примерах показано, что эти условия выполняются как в задачах динамики жидкости относительно вращающейся или невращающейся Земли, так и в задаче о волновых движениях жидкости в совершающем угловые колебания баке в лабораторных условиях. Проанализированы, классифицированы и уточнены исходные уравнения нестандартного вида некоторых из современных прикладных работ.

Полученные результаты могут быть использованы при экспертизе существующих и разработке новых моделей динамики относительного движения жидкости.

1. Ламб Г. Гидродинамика.– М., Л.: ОГИЗ, 1947.– 928 с.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика.– М.: ГИТТЛ, 1955, ч. 1.– 556 с.
3. Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью.– М.: Машиностроение, 1977.– 208 с.
4. Ibrahim R.A. Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications.– Cambridge University Press: 2005.– 970 с.
5. La Rocca M., Sciortino G., Boniforti M.A. A fully nonlinear model for sloshing in a rotating container // Fluid Dynamics Research.– 2000.– 27.– P. 23-52.
6. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости.– М.: Мир, 1973.– 757 с.
7. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей.– Л.: Гидрометеиздат, 1975.– 304 с.
8. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью: Собр. соч. М.,Л.: ГИТТЛ, 1949. – т. 2. – С. 152–309.
9. Милл-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика.– М.: Мир, 1964.– 655 с.
10. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость.– М.: Машиностроение, 1977.– 208 с.
11. Лурье А.И. Аналитическая механика.– М.: ФМ, 1961.– 824 с.
12. Kinematics and Dynamics of Multy-body Systems: Eds.: J. Angeles, A. Kecskemethy.– CISM Courses and Lectures, No.360, – 1995.– 342 с.
13. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления.– М.: Наука, 1965.– 426 с.
14. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения.– М.: Наука, 1986.– 759 с.
15. Chorin A.J., Marsden J.E. A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics.– Springer: 1998.– 169 p.
16. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1978.– 736 с.
17. Булгаков Б.В. Прикладная теория гироскопов.– М.: ГИТТЛ, 1955.– 355 с.