

УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВИХРЕВЫХ КОЛЕЦ В БЕСКОНЕЧНОЙ ТРУБЕ, ЗАПОЛНЕННОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

А. А. ГУРЖИЙ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев, Украина**Получено 12.06.2008*

Рассматривается задача о взаимодействии системы осесимметричных вихревых колец с малым круговым поперечным сечением (вихревые кольца Дайсона) в бесконечной прямолинейной трубе с круговым поперечным сечением, которая заполнена идеальной несжимаемой жидкостью. В основу численно-аналитического решения положен метод дискретных особенностей, адаптированный к осесимметричным задачам. Для удовлетворения граничных условий на внутренней поверхности вводится либо последовательность мнимых вихревых нитей, либо мнимый вихревой слой. Распределение интенсивности мнимых вихревых структур определяется из условий либо равенства нулю радиальной компоненты скорости течения, либо равенства константе значения функции тока. Для выявления наилучшего решения вводится «функция невыполнения» граничного условия по скорости, анализируется ее максимальное и среднее значения на внутренней поверхности трубы. Исследования показали, что наилучшей с точки зрения локального выполнения граничного условия по скорости и по продолжительности вычислений является метод решения, основанный на введении эквидистантной системы мнимых вихревых нитей одинакового радиуса с граничным условием для функции тока. Приводятся уравнения движения для системы тонких вихревых колец. Гамильтонова форма уравнений движения совпадает с уравнениями для коаксиальных вихревых колец в безграничном пространстве с гамильтонианом, учитывающим влияние границ. Показано, что эти уравнения обладают двумя инвариантами движения, которые соответствуют закону сохранения импульса движения вдоль оси трубы и закону сохранения кинетической энергии движения вихревых колец.

Розглядається задача про взаємодію системи вісесиметричних вихрових кілець з малим круговим поперечним перетином (вихрові кільця Дайсона) в нескінченній прямолинійній трубі з круговим поперечним перетином, яка заповнена ідеальною нестискуваною рідиною. Для чисельно-аналітичного розв'язку застосовано метод дискретних особливостей, адаптований до вісесиметричних задач. Для задоволення граничних умов на внутрішній поверхні вводиться або послідовність уявних вихрових ниток, або уявний вихровий шар. Розподіл інтенсивності уявних вихрових структур визначається з умов або рівності нулю радіальної компоненти швидкості течії, або рівності константі значення функції току. Для виявлення найкращого розв'язку вводиться «функція невиконання» граничної умови по швидкості, аналізується її максимальне та середнє значення на внутрішній поверхні труби. Дослідження показали, що найкращим з погляду локального виконання граничної умови по швидкості і за тривалістю обчислень є метод розв'язку, заснований на введенні еквідистантної системи уявних вихрових ниток однакового радіуса з граничними умовами для функції току. Приводяться рівняння руху для системи тонких вихрових кілець. Гамільтоніанова форма рівнянь руху співпадає з рівняннями для коаксіальних вихрових кілець в безмежному просторі з гамільтоніаном, що враховує вплив меж. Показано, що ці рівняння мають два інваріанти руху, які відповідають закону збереження імпульсу руху уздовж осі труби і закону збереження кінетичної енергії руху вихрових кілець.

The problem on interaction of the system of axisymmetrical vortex rings with the small circular cross section (Dyson's vortex rings) in an unbounded rectilinear pipe with the circular cross section, which is filled by an ideal incompressible fluid, is considered. The method of discrete singularities is proposed for numeral-analytical solution, which adapted to the axisymmetrical problems. To satisfy boundary conditions on an internal surface one introduces either the sequence of imaginary vortex filaments or imaginary vortex layer. Distributing of intensity of imaginary vortex structures is determined from either equalities to the zero the radial velocity components of flow or equality to the constant the value of stream function. To detect the best solution one introduce "failure function" of boundary condition on velocity and analyses its maximal and average values on an internal surface of the pipe. Researches shows that the solution based on an introduction the system of imaginary vortex filaments of identical radius with boundary condition for stream function is the best both from point of local satisfaction of boundary condition for velocity and from counting time interval. The equations of motion of the system of thin vortex rings are given. Hamiltonian form of equations of motion coincides with equation for coaxial vortex rings in unbounded space with hamiltonian, which takes into account the influence of boundaries. It is shown that these equations have two invariants of motion, which correspond to the momentum conservation law along the axis of the pipe and kinetic energy conservation law of vortex rings.

ВВЕДЕНИЕ

В современной гидромеханике при моделировании различных вихревых течений активно применяется метод изображений. Теоретическое обоснование этого метода применительно к вихревым течениям идеальной несжимаемой жидкости было указано еще в работе Г.Гельмгольца [1] и

нашло достаточно широкое применение в предвоенные годы при изучении особенностей обтекания крыльев [2-6]. Впоследствии метод изображений в вихревой динамике применялся для моделирования широкого класса течений, что позволяет сегодня отнести его к классическим методам гидромеханики. Подробное его описание и обоснование для различных приложений можно найти, например, в наиболее доступных сегодня монографиях

[7–11] и зарубежных изданиях [12, 13].

Несмотря на широкое применение метода изображений при изучении плоских вихревых течений, его использование в осесимметричном случае оказывается ограниченным. Среди наиболее распространенных решений следует отметить взаимодействие тонкого осесимметричного вихревого кольца с плоской стенкой, расположенной перпендикулярно к плоскости вихря, и движение вихревой нити около (или внутри) сферической поверхности в приближении идеальной несжимаемой жидкости (смотри подробности в [10, Гл.4] или в [9, S164]). При этом каждому действительному вихревому кольцу в соответствие ставится мнимая вихревая нить, параметры которой зависят от параметров действительного кольца и расстояния до твердой поверхности. В результате общее число уравнений, описывающих динамику осесимметричных колец не увеличивается, а граничное условие непротекания жидкости через твердую поверхность выполняется точно.

Анализ литературы показывает, что в настоящее время для численного решения задач вихревой динамики со сложной геометрией поверхностей активно используются подходы [6, 14–17], основанные на введении последовательности мнимых вихревых структур (или системы источников и стоков жидкости на твердой поверхности) для каждого из действительных вихрей в рассматриваемой гидродинамической системе. При этом интенсивности мнимых вихрей определяются из значений функции тока в определенной системе контрольных точек (точек коллокаций) на твердой поверхности [16]. Такой подход в литературе получил название *метод источников* [6] или *метод дискретных вихрей* [14, 15].

Несмотря на широкое применение метода дискретных вихрей при решении прикладных задач вычислительной гидромеханики, указанный выше метод дискретных особенностей вносит существенную погрешность при определении поля скорости в области, прилегающей к границе. Наличие сингулярных вихрей (или источников) на поверхности приводит к появлению разрыва в касательной компоненте скорости на самой поверхности и значительных вычислительных ошибок при изучении процессов тепло- и массопереноса, которые наиболее активно проявляются возле поверхностей. Этот недостаток существенно сужает область применимости метода дискретных вихрей при формировании моделей вихревых течений.

Вероятно, именно по этой причине в настоящее время в современной литературе отсутствует численно-аналитическое решение задачи о взаи-

модействии системы тонких коаксиальных вихревых колец в бесконечной прямолинейной трубе с круговым поперечным сечением, которая заполнена идеальной несжимаемой жидкостью. В большинстве случаев аналогичные задачи о взаимодействии вихревых колец с твердыми поверхностями решались либо с использованием методов прямого численного моделирования [18–21], либо на основе данных экспериментальных исследований [22–25]. Такие решения позволяют проследить не только за процессом генерации вихревых структур в непосредственной близости к поверхности, но и выявить некоторые особенности их взаимодействия. Однако анализ численных результатов (или экспериментальных данных) оказывается в этом случае достаточно сложным и, как результат, некоторые случаи взаимодействия вихрей оказываются незамеченными. С этих позиций численно-аналитические методы исследования динамики осесимметричных вихревых колец с твердыми поверхностями имеют неоспоримое преимущество.

В настоящей работе предлагается новое решение задачи о движении системы осесимметричных колец в бесконечной трубе с круговым поперечным сечением, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Основной идеей подхода является дальнейшее развитие метода дискретных вихрей применительно к осесимметричным течениям с использованием преимуществ метода изображения и метода дискретных вихрей. Для того, чтобы обобщить эти подходы на цилиндрическую поверхность, в работе применяется суперпозиция системы мнимых коаксиальных вихревых нитей или осесимметричный непрерывный вихревой слой, смещенные от твердой поверхности на фиксированное расстояние. Интенсивности мнимых вихревых структур подбираются такими, чтобы граничное условие на поверхности выполнялось наилучшим образом.

1. КОАКСИАЛЬНЫЕ ВИХРЕВЫЕ КОЛЬЦА В БЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЕ

Одинокое вихревое кольцо в идеальной безграничной несжимаемой жидкости с полем завихренности, сконцентрированным в бесконечно тонкой нити, наводит поле скорости, функция тока которого определяется выражением [2, 9]

$$\Psi(r, z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \sqrt{R_v r} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) \mathbf{K}(k) - \frac{2}{k} \mathbf{E}(k) \right], \quad (1)$$

$$k^2 = \frac{4R_v r}{(R_v + r)^2 + (Z_v - z)^2},$$

где Γ – интенсивность вихревой нити; R_v, Z_v – радиус и осевое положение вихря в цилиндрической системе координат с осью oz , перпендикулярной к плоскости вихревой нити. В приведенном выражении $\mathbf{K}(k), \mathbf{E}(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Выражение (1) совпадает с распределением поля функции тока [2, 10], наведенным торроидальным вихревым кольцом с малым круговым поперечным сечением радиуса a_v на расстояниях $\rho = [(R_v - r)^2 + (Z_v - z)^2]^{1/2} \gg a_v$ (модель вихревого кольца Дайсона [26]).

Функция тока, наведенная системой N коаксиальных вихревых колец, определяется суперпозицией вкладов каждого кольца:

$$\begin{aligned} \Psi(r, z) &= \sum_{j=1}^N \Psi_j(r, z) = \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi} \sqrt{R_j r} \left[\left(\frac{2}{k_j} - k_j \right) \mathbf{K}(k_j) - \frac{2}{k_j} \mathbf{E}(k_j) \right], \\ k_j^2 &= \frac{4R_j r}{(R_j + r)^2 + (Z_j - z)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь Γ_j – интенсивность j -го вихревого кольца; R_j и Z_j – радиус и осевое положение вихря с индексом j соответственно.

Используя связь между функцией тока и компонентами поля скорости течения

$$U_r(r, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad U_z(r, z) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (3)$$

находим выражения для компонент поля скорости, наведенного системой N тонких коаксиальных вихревых колец в идеальной безграничной несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} U_r(r, z) &= \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j (z - Z_j)}{2\pi r R_{max}^{(j)}} \times \\ &\times \left[\mathbf{K}(k_j) - \mathbf{E}(k_j) - \frac{2R_j r}{[R_{min}^{(j)}]^2} \mathbf{E}(k_j) \right], \\ U_z(r, z) &= \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi R_{max}^{(j)}} \times \\ &\times \left[\mathbf{K}(k_j) - \mathbf{E}(k_j) + \frac{2R_j (R_j - r)}{[R_{min}^{(j)}]^2} \mathbf{E}(k_j) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad [R_{max}^{(j)}]^2 &= (R_j + r)^2 + (Z_j - z)^2, \\ [R_{min}^{(j)}]^2 &= (R_j - r)^2 + (Z_j - z)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Если в текущую точку с координатами (r, z) поместить тонкое осесимметричное вихревое кольцо (R_i, Z_i) , то слагаемое $j = i$ в сумме (2) необходимо заменить значением функции тока $\Psi^*(R_i, Z_i)$, которое наводит i -ое вихревое кольцо само на себя. Подробности представления функции тока внутри торрообразного вихревого кольца можно найти в [9, 10, 12, 26]. В конечном итоге уравнения движения системы N тонких осесимметричных вихревых колец в безграничной идеальной жидкости могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \frac{dR_i}{dt} &= -\frac{1}{\Gamma_i R_i} \frac{\partial U}{\partial Z_i}, \\ \frac{dZ_i}{dt} &= \frac{\Gamma_i}{4\pi R_i} \left(\ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\Gamma_i R_i} \frac{\partial U}{\partial R_i}, \\ a_i R_i &= \text{const}_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad U &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{2\pi} \sqrt{R_i R_j} \times \\ &\times \left[\left(\frac{2}{k_{ij}} - k_{ij} \right) \mathbf{K}(k_{ij}) - \frac{2}{k_{ij}} \mathbf{E}(k_{ij}) \right], \\ k_{ij}^2 &= \frac{4R_i R_j}{(R_i + R_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2} \end{aligned} \quad (7)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} R_i(0) &= R_i^0, \quad Z_i(0) = Z_i^0, \\ a_i(0) &= n_i^0 R_i^0, \quad n_i^0 \ll 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Последнее уравнение в (6) выражает закон сохранения объема вихревого кольца, что является следствием теоремы Гельмгольца о завихренности [2, 9, 11].

2. КОАКСИАЛЬНЫЕ ВИХРЕВЫЕ КОЛЬЦА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ТРУБЕ

Если течение идеальной жидкости развивается в области, ограниченной цилиндрической поверхностью радиуса R_0 , то на решение накладываем граничное условие

$$\Psi(R_0, z) = \text{const} \quad (9)$$

$$\text{или} \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{r=R_0} = 0, \quad (10)$$

которое должно выполняться в любой точке, ограничивающей течение поверхности.

Можно выделить, по крайней мере, четыре подхода к формированию решения задачи о движении системы осесимметричных вихревых колец внутри круговой цилиндрической поверхности. Два

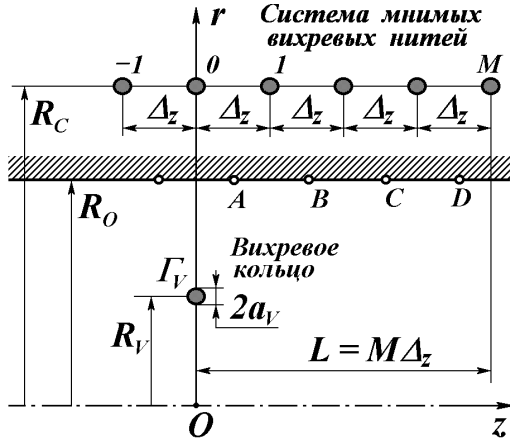


Рис. 1. Схематическое изображение пространственного положения вихрей и последовательности контрольных точек при анализе выполнения граничного условия для скорости

из них основаны на выполнении граничного условия для функции тока (9) системой мнимых вихревых нитей или непрерывным мнимым вихревым слоем. Два других подхода основаны на выполнении граничного условия для скорости (10) упомянутых выше системы вихревых нитей или вихревого слоя. Рассмотрим каждое из этих решений для одиночного вихревого кольца отдельно.

2.1. Выполнение граничного условия для скорости системой вихревых нитей

Рассмотрим течение идеальной несжимаемой жидкости внутри бесконечной цилиндрической поверхности радиуса R_0 . Пусть тонкое вихревое кольцо радиуса R_v , $R_v < R_0$, с малым круговым поперечным сечением a_v , $a_v \ll R_v$, и интенсивностью Γ_v расположено в начале цилиндрической системы координат (r, z) , как показано на рис. 1.

Для выполнения граничного условия (10) введем систему $2M + 1$ мнимых вихревых нитей радиуса $R_c = \text{const}$ ($R_c > R_0$) и интенсивностями Γ_m , $m = 1, \dots, 2M + 1$, которые удалены друг от друга на одинаковое расстояние Δ_z в осевом направлении. На рис. 1 показана система M вихревых нитей, расположенных правее плоскости симметрии $z = 0$. Аналогичная система мнимых вихрей располагается с другой стороны этой плоскости. Необходимо подобрать значения интенсивностей Γ_m нитей, вклад которых удовлетворял бы граничному условию для скорости (10) в присутствии действительного вихревого кольца. Количество мнимых вихревых нитей в слое $(2M + 1)$, радиус ви-

хревых нитей R_c и расстояние Δ_z между ними в слое являются параметрами задачи.

Для определения значений интенсивностей Γ_m мнимых вихревых нитей задаем систему контрольных точек на поверхности трубы [16], которые обозначены на рис. 1 буквами A, B и т.д. Их осевые координаты имеют значения

$$Z_n = Z_0 + n\Delta_z, \quad n = -M, \dots, M, \quad (11)$$

где $Z_0 = \Delta_z/2$ – начальное смещение вихревого слоя.

В контрольных точках накладываем условие равенства нулю суммы значений наведенных радиальных компонент скоростей как со стороны действительного кольца, так и со стороны системы мнимых вихревых нитей. Получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$[A_{nm}] \Gamma_m = B_n, \quad n, m = -M, \dots, M, \quad (12)$$

где

$$[A_{nm}] = \frac{Z_m - Z_n}{R_{max}^{(nm)}} \times \left[K(k_{nm}) - E(k_{nm}) - \frac{2R_c R_0}{[R_{min}^{(nm)}]^2} E(k_{nm}) \right],$$

$$B_n = \frac{Z_n}{R_{max}^{(n)}} \left[K(k_n) - E(k_n) - \frac{2R_c R_v}{[R_{min}^{(n)}]^2} E(k_n) \right],$$

$$[R_{max}^{(n)}]^2 = (R_0 + R_v)^2 + Z_n^2,$$

$$[R_{min}^{(n)}]^2 = (R_0 - R_v)^2 + Z_n^2, \quad (13)$$

$$[R_{max}^{(nm)}]^2 = (R_0 + R_c)^2 + (Z_m - Z_n)^2,$$

$$[R_{min}^{(nm)}]^2 = (R_0 - R_c)^2 + (Z_m - Z_n)^2,$$

$$k_{nm}^2 = \frac{4R_0 R_c}{[R_{max}^{(nm)}]^2}, \quad k_n^2 = \frac{4R_0 R_v}{[R_{max}^{(n)}]^2}.$$

Исследования показывают, что линейная алгебраическая система (12) имеет доминирующую диагональ, поскольку наибольший вклад в поле скорости вносят близлежащие к контрольной точке мнимые вихревые нити. Численное решение таких систем алгебраических уравнений не встречает существенных трудностей [27, 28].

Таким образом, выражения для компонент скоростей одиночного тонкого вихревого кольца, находящегося внутри бесконечного цилиндра, имеют вид

$$U_r = 0, \quad (14)$$

$$U_z = \frac{\Gamma_v}{4\pi R_v} \left(\ln \frac{8R_v}{a_v} - \frac{1}{4} \right) + \sum_{m=-M}^M \frac{\Gamma_m}{2\pi [R_{max}^{(m)}]} \times$$

$$\times \left[\mathbf{K}(k_m) - \mathbf{E}(k_m) + \frac{2R_v(R_v - R_c)}{[R_{min}^{(m)}]^2} \mathbf{E}(k_m) \right], \quad (15)$$

где использованы следующие обозначения

$$\begin{aligned} [R_{max}^{(m)}]^2 &= (R_v + R_c)^2 + Z_m^2, \\ [R_{min}^{(m)}]^2 &= (R_v - R_c)^2 + Z_m^2, \\ k_m^2 &= \frac{4R_v R_c}{[R_{max}^{(m)}]^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Анализ выражения показывает, что движение одиночного вихревого кольца внутри бесконечно-го кругового цилиндра качественно не отличается от движения одиночного вихревого кольца в безграничном пространстве. Радиальная компонента скорости кольца (14) равна нулю, поскольку вклад со стороны мнимой вихревой нити с текущим индексом “ m ” равен по модулю, но противоположен по знаку вкладу со стороны вихря с индексом “ $-m$ ”. Вихрь с индексом “0” находится в плоскости действительного вихря, его вклад в радиальную скорость действительного вихря равен нулю. Выражение для осевой компоненты скорости (15) действительного вихревого кольца состоит из двух слагаемых, первое из которых представляет самоиндуцированную скорость тонкого вихревого кольца. Второе слагаемое представляет собой вклад со стороны системы мнимых вихревых нитей. Другими словами, это слагаемое учитывает влияние границы на движение одиночного вихревого кольца. Заметим, что по мере увеличения радиуса R_0 трубы или уменьшения радиуса R_v действительного вихревого кольца влияние границы уменьшается, и вклад второго слагаемого в осевую скорость вихревого кольца асимптотически стремится к нулю.

Для проведения количественного анализа точности выполнения граничного условия рассмотрим одиночное вихревое кольцо радиуса $R_v = 0.8$ и интенсивности $\Gamma_v = 1.0$ внутри бесконечной трубы радиуса $R_0 = 1.0$. Для выбранных значений $M = 7$, $\Delta_z = 0.3$ и $R_c = 1.2$ решение линейной системы алгебраических уравнений (12) дает значения интенсивностей Γ_m ($m = 0, \dots, M$) мнимых вихревых нитей, приведенные в таблице 1.

Точность выполнения граничного условия на внутренней поверхности трубы можно оценить при введении функции ошибки (“рассогласования” граничного условия) для радиальной компоненты скорости течения жидкости на поверхности трубы в виде

$$E(z) = \sum_{m=-M}^M \frac{\Gamma_m}{2\pi R_0} \frac{Z_m - z}{[R_{max}^{(m)}]_s} \times$$

Табл 1. Значения интенсивностей мнимых вихревых нитей при выполнении граничных условий для радиальной скорости

m	Положение, Z_m	Интенсивность, Γ_m
0	0.00	-0.78576
±1	±0.30	0.02224
±2	±0.60	0.01432
±3	±0.90	0.00896
±4	±1.20	0.00540
±5	±1.50	0.00317
±6	±1.80	0.00179
±7	±2.10	0.00096

$$\begin{aligned} &\times \left[\mathbf{K}(k_s^{(m)}) - \mathbf{E}(k_s^{(m)}) - \frac{2R_c R_0}{[R_{min}^{(m)}]_s^2} \mathbf{E}(k_s^{(m)}) \right] - \\ &- \frac{\Gamma_v}{2\pi R_0} \frac{z}{[R_{max}]_s} \times \\ &\times \left[\mathbf{K}(k_s) - \mathbf{E}(k_s) - \frac{2R_c R_0}{[R_{min}]_s^2} \mathbf{E}(k_s) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad [R_{max}]_s^2 &= (R_0 + R_c)^2 + (Z_m - z)^2, \\ [R_{min}]_s^2 &= (R_0 - R_c)^2 + (Z_m - z)^2, \\ [R_{max}]_s^2 &= (R_0 + R_v)^2 + z^2, \\ [R_{min}]_s^2 &= (R_0 - R_v)^2 + z^2, \\ [k_s^{(m)}]^2 &= \frac{4R_0 R_c}{[R_{max}]_s^2}, \quad k_s^2 = \frac{4R_0 R_v}{[R_{max}]_s^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Зависимость функций $\varepsilon(z)$ на внутренней поверхности трубы, равная отношению $E(z)$ к максимальному значению радиальной скорости U_{max} , наведенной действительным вихревым кольцом на поверхности (при $z = Z_v$), показана на рис. 2. Видно, что наибольшее рассогласование граничных условий по скорости наблюдается в области, близлежащей к действительному вихрю. Имеется некоторое повышение функции $\varepsilon(z)$ за пределами слоя мнимых вихревых нитей. Численный анализ показывает, что при уменьшении значений Δ_z граничное условие внутри вихревого слоя ($|z| < M\Delta_z$) выполняется лучше, а вне этого интервала значение функции $\varepsilon(z)$ существенно увеличивается. И наоборот, с увеличением Δ_z максимальная ошибка наблюдается внутри вихревого слоя, а не за его пределами. Можно заключить, что существует оптимальное значение Δ_z , при котором достигается наилучшее выполнение граничных условий.

Для проведения сравнительного анализа точности решения задачи с другими решениями введем количественные меры точности выполне-

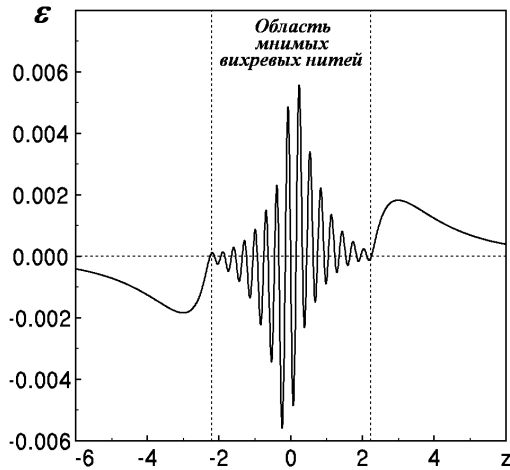


Рис. 2. Зависимость точности выполнения граничного условия $\varepsilon(z)$ для скорости системой мнимых вихревых нитей при $\Delta_z = 0.3$, $R_c = 1.2$, $M = 7$

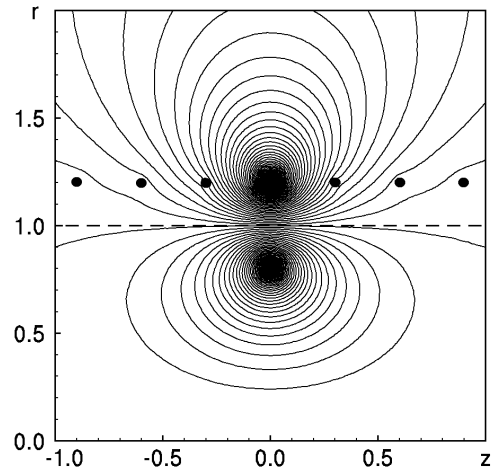


Рис. 3. Распределение функции тока в течении при выполнении граничного условия для скорости системой мнимых вихревых нитей, $\Delta_z = 0.3$, $M = 7$

ния граничных условий. Наиболее простой мерой является значение максимального рассогласования выполнения граничного условия $\varepsilon_{max} = \max\{|\varepsilon(z)|\}$ на участке $-L \leq z \leq L$, где $2L$ – длина фиксированного контрольного участка на внутренней поверхности трубы. Введем также среднеквадратичное значение функций $\varepsilon(z)$ на контрольном участке поверхности:

$$\varepsilon_{cp} = \left\{ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L [\varepsilon(z)]^2 dz \right\}^{1/2}. \quad (19)$$

Пусть $L = 6.0$. В этом случае $\varepsilon_{max} = 0.00558$, $\varepsilon_{cp} = 0.00141$.

Рис. 3 показывает распределение поля функции тока в области, близлежащей к действительному вихрю. Топологические уровни на рисунке нанесены с шагом $\Delta\Psi = 0.01$. Штриховая линия соответствует положению твердой границы, кружочками обозначены положения мнимых вихревых нитей. Видно, что линия $\Psi = 0$ близко подходит к поверхности трубы в области над действительным вихрем. Однако она постепенно удаляется от поверхности по мере удаления от вихревого кольца. Это свидетельствует о недостаточно точном решении гидродинамической задачи. Точность выполнения граничных условий может быть существенно улучшена при увеличении количества мнимых вихревых нитей и взаимном их сближении в вихревом слое.

Рис. 4 иллюстрирует зависимость максимальной ошибки ε_{max} (сплошная линия) и среднеквадратичной ε_{cp} (штриховая линия) от расстояния Δ_z между мнимыми вихревыми нитями для $M = 5, 7, 10$.

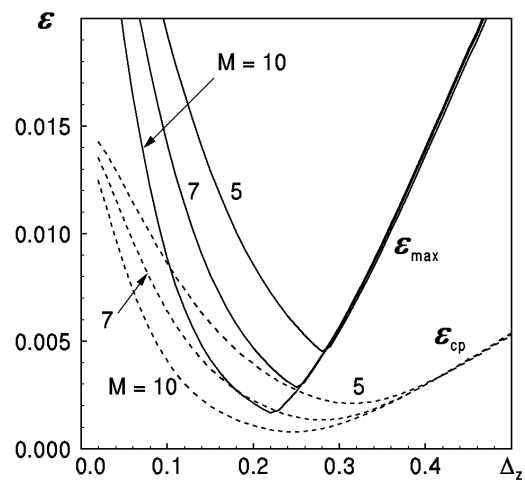


Рис. 4. Зависимость максимальной ε_{max} и среднеквадратичной ε_{cp} ошибок выполнения граничного условия для скорости от расстояния Δ_z между мнимыми вихрями при $M = 5, 7, 10$

точной ошибки ε_{cp} (штриховая линия) от расстояния Δ_z между мнимыми вихревыми нитями для $M = 5, 7$ и 10 . Для каждого значения M существует оптимальное значение Δ_z , при котором достигаются минимальные ошибки при выполнении граничного условия. Можно заметить, что при увеличении числа мнимых вихрей M в вихревом слое уменьшается оптимальное значение Δ_z .

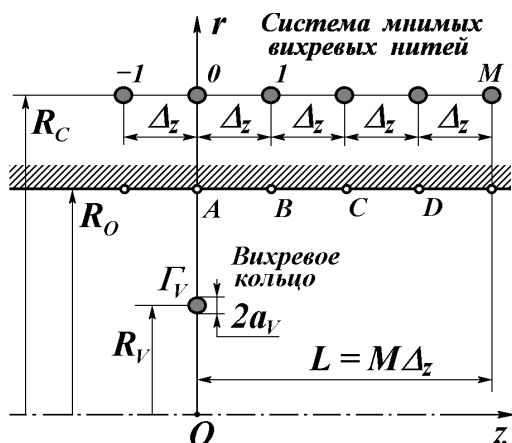


Рис. 5. Схематическое изображение пространственного положения вихрей и последовательности контрольных точек при анализе выполнения граничного условия для функции тока

2.2. Выполнение граничного условия для функции тока системой вихревых нитей

Рассмотрим теперь аналогичную задачу, но с граничными условиями для функции тока (9) на твердой поверхности. Пусть, как и ранее, цилиндрическая поверхность имеет круговое поперечное сечение радиуса R_0 , а вихревое кольцо радиуса R_v с интенсивностью Γ_v расположено в $Z_v = 0$ цилиндрической системы координат, как показано на рис. 5. Введем систему $2M + 1$ мнимых вихревых нитей одинакового радиуса R_c с разными интенсивностями Γ_m , которые удалены друг от друга на расстояние Δ_z в осевом направлении.

Для определения интенсивностей Γ_m мнимых вихрей выберем систему точек коллокации на поверхности цилиндра, которые обозначены на рис. 5 буквами A, B и т.д. с осевыми координатами (11) при $Z_0 = 0.0$. В этих точках накладываем условие равенства нулю значения функции тока, наведенной действительным вихревым кольцом и системой мнимых вихревых нитей, формирующих вихревой слой. Принимая во внимание симметрию задачи, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$[A_{nm}] \Gamma_m = B_n, \quad n, m = -M, \dots, M, \quad (20)$$

где

$$[A_{nm}] = \left[\left(\frac{2}{k_{nm}} - k_{nm} \right) K(k_{nm}) - \frac{2}{k_{nm}} E(k_{nm}) \right],$$

$$B_n = \sqrt{\frac{R_v}{R_c}} \left[\left(\frac{2}{k_n} - k_n \right) K(k_n) - \frac{2}{k_n} E(k_n) \right] \quad (21)$$

Табл. 2. Значения интенсивностей мнимых вихревых нитей при выполнении граничных условий для функции тока

m	Положение, Z_m	Интенсивность, Γ_m
0	0.00	-0.78430
± 1	± 0.30	0.02347
± 2	± 0.60	0.01533
± 3	± 0.90	0.01000
± 4	± 1.20	0.00642
± 5	± 1.50	0.00431
± 6	± 1.80	0.00251
± 7	± 2.10	0.00407

с обозначениями (13).

Очевидно, что в рассматриваемой задаче компоненты скорости одиночного тонкого вихревого кольца, находящегося внутри бесконечного цилиндра, вычисляются по формулам (14) и (15) с обозначениями (16).

Для проведения сравнительного анализа точности решения задачи рассмотрим вихревое кольцо с параметрами, указанными в предыдущей части. При решении системы алгебраических уравнений (20), (21) получаем значения интенсивностей мнимых вихревых колец, которые приведены в таблице 2. Сравнение значений показывает, что величины интенсивностей Γ_m мнимых вихревых нитей отличаются в обоих случаях только во втором третьем знаке после запятой.

Зависимость функции $\varepsilon(z)$ представлена на рис. 6. Видно, что наибольшая погрешность в выполнении граничных условий для радиальной компоненты скорости наблюдается как в области, близлежащей к действительному вихрю, так и в области, расположенной за пределами вихревого слоя. При этом максимальное значение радиальной скорости оказывается примерно одного порядка со значением, полученным при решении задачи с использованием граничного условия для скорости, рис. 2. Максимальная и среднеквадратичная ошибки выполнения граничных условий в рассматриваемой задаче принимают значения $\varepsilon_{max} = 0.00586$, $\varepsilon_{cp} = 0.00175$.

Распределение функции тока в области, близлежащей к действительному вихрю, показано на рис. 7 с топологическими уровнями $\Delta\Psi = 0.01$. Кружочками на рисунке обозначены положения действительного и мнимых вихревых колец. Вычисления проводились для параметров ($\Delta_z = 0.3$, $M = 7$), которые аналогичны случаю решения задачи с использованием граничного условия для скорости. На рисунке видно, что линия тока $\Psi = 0$

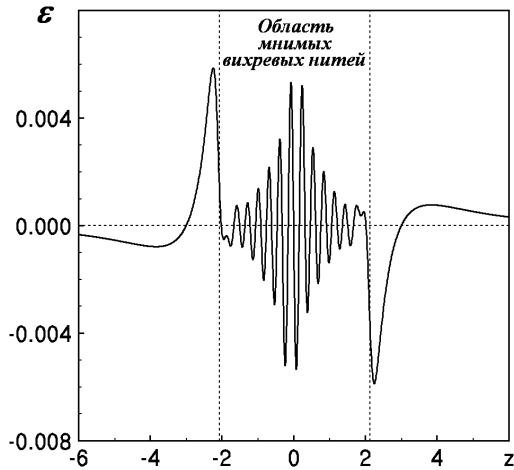


Рис. 6. Зависимость точности выполнения граничного условия $\text{varepsilon}(z)$ для функции тока системой мнимых вихревых нитей при $\Delta_z = 0.3$, $R_c = 1.2$, $M = 7$

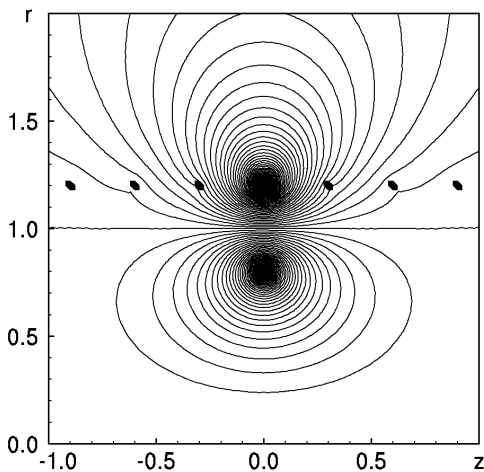


Рис. 7. Распределение функции тока в течении при выполнении граничного условия для функции тока системой мнимых вихревых нитей, $\Delta_z = 0.3$, $M = 7$

принадлежит поверхности трубы на достаточно большом осевом расстоянии от действительного вихря в отличие от случая, рассмотренного ранее.

Рис. 8 иллюстрирует зависимость максимальной ошибки ε_{\max} (сплошная линия) и среднеквадратичной ошибки $\varepsilon_{\text{ср}}$ (штриховая линия) при изменении расстояния между мнимыми вихревыми нитями в слое для аналогичного набора значений M , которые использовались на рис. 4. Видно, что функция ошибок имеет минимумы

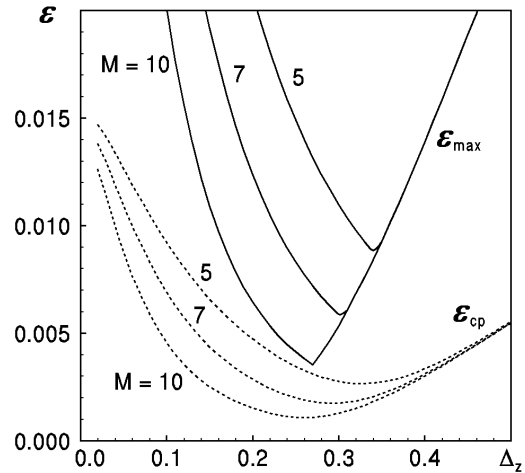


Рис. 8. Зависимость максимальной ε_{\max} и среднеквадратичной $\varepsilon_{\text{ср}}$ ошибок выполнения граничного условия для функции тока от расстояния Δ_z между мнимыми вихрями при $M = 5, 7, 10$

для каждого значения M . Сравнительный анализ рис. 8 и 4 позволяет сделать вывод о том, что приведенные выше решения имеют практически одинаковые оптимальные значения Δ_z , при которых выполнение граничного условия осуществляется с наименьшей вычислительной ошибкой.

2.3. Выполнение граничного условия для скорости непрерывным вихревым слоем

Рассмотрим течение идеальной несжимаемой жидкости внутри бесконечной прямолинейной трубы радиуса R_0 в цилиндрической системе координат, связанной с осью симметрии течения (рис. 9). Пусть вихревое кольцо радиуса R_v и интенсивности Γ_v находится в плоскости $z = 0$.

Для выполнения граничного условия рис. 10 введем непрерывный мнимый вихревой слой радиуса R_c и длиной $2L_c$. Из симметрии задачи следует, что распределение интенсивности $\Gamma(\xi)$ вихревого слоя, нормированное на единицу длины в осевом направлении, представляет собой четную функцию. Распределение интенсивности можно разложить в ряд Фурье, ограничившись первыми K слагаемыми ряда

$$\Gamma(\xi) = \frac{1}{2L_c} \sum_{k=1}^K A_k \cos \frac{\pi k \xi}{L_c}, \quad L_c \leq \xi \leq L_c. \quad (22)$$

Количество K слагаемых, длина вихревого слоя L_c и его радиус R_c являются параметрами зада-

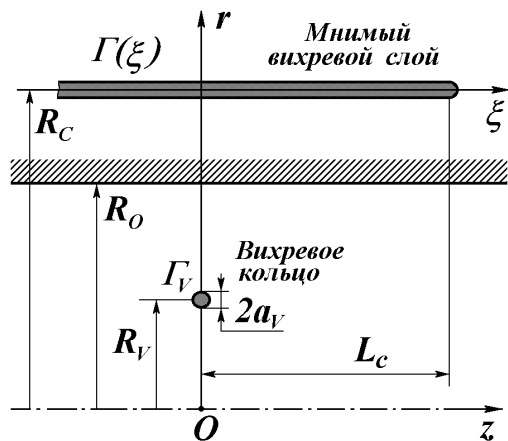


Рис. 9. Пространственное положение вихревого кольца и мнимого вихревого слоя при анализе выполнения граничного условия для скорости

чи. Их значение необходимо определить из требования наилучшего удовлетворения граничному условию на внутренней поверхности трубы.

Радиальную компоненту скорости, наведенную действительным вихревым кольцом в точке z на поверхности трубы, можно представить в виде

$$U_r^*(z) = -\Gamma_v F_v(z), \quad (23)$$

$$\text{где } F_v(z) = \frac{z}{2\pi R_0 [R_{max}]_s} \times \left[\mathbf{K}(k_s) - \mathbf{E}(k_s) - \frac{2R_v R_0}{[R_{min}]_s^2} \mathbf{E}(k_s) \right], \quad (24)$$

с обозначениями (18).

В то же время, радиальная компонента скорости, наведенная вихревым слоем в той же точке, определяется интегралом

$$U_r(z) = \int_{-L_c}^{L_c} \Gamma(\xi) F_c(z, \xi) d\xi = \frac{1}{2L_c} \sum_{k=1}^{-L_c} A_k \int_{-L_c}^{L_c} F_c(z, \xi) \cos \frac{\pi k \xi}{L_c} d\xi, \quad (25)$$

$$\text{где } F_c(z, \xi) = \frac{\xi - z}{2\pi R_0 [R_{max}]_c} \times \left[\mathbf{K}(k_c) - \mathbf{E}(k_c) - \frac{2R_v R_0}{[R_{min}]_c^2} \mathbf{E}(k_c) \right], \quad (26)$$

$$[R_{max}]_c^2 = (R_0 + R_c)^2 + (z - \xi)^2,$$

$$[R_{min}]_c^2 = (R_0 - R_c)^2 + (z - \xi)^2,$$

$$k_c^2 = \frac{4R_0 R_c}{[R_{max}]_c^2}.$$

Заметим, что функции $U_r(z)$ и $U_r^*(z)$ являются нечетными функциями своих аргументов.

Приравняв к нулю сумму радиальных скоростей, наведенных действительным вихревым кольцом (23) и мнимым вихревым слоем (25), получаем равенство

$$\frac{1}{2L_c} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_{-L_c}^{L_c} F_c(z, \xi) \cos \frac{\pi k \xi}{L_c} d\xi = \Gamma_v F_v(z). \quad (27)$$

Для определения неизвестных коэффициентов A_k умножим обе части выражения (27) на $\sin[\pi n z / L_c]$ и проинтегрируем в пределах $-L_c \leq z \leq L_c$. В результате получаем линейную алгебраическую систему уравнений

$$[\mathbf{A}_{nk}] \Gamma_k = \mathbf{B}_n, \quad n, k = 0, \dots, K, \quad (28)$$

$$\text{где } [\mathbf{A}_{nk}] = \frac{1}{2L_c} \int_{-L_c}^{L_c} \int_{-L_c}^{L_c} F_c(z, \xi) \times \cos \frac{\pi k \xi}{L_c} d\xi \sin \frac{\pi n z}{L_c} dz,$$

$$\mathbf{B}_n = \Gamma_v \int_{-L_c}^{L_c} F_v(z) \sin \frac{\pi n z}{L_c} dz. \quad (29)$$

Анализ показывает, что алгебраическая система (28) имеет преобладающие по модулю диагональные элементы. Численное решение таких систем уравнений может быть проведено с использованием стандартных вычислительных методов [27, 28].

Выражения для компонент скорости одиночного тонкого вихревого кольца, находящегося внутри бесконечной трубы постоянного сечения, можно представить в виде

$$U_r = 0, \quad (30)$$

$$U_z = \frac{\Gamma_v}{4\pi R_v} \left(\ln \frac{8R_v}{a_v} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2\pi L_c} \sum_{k=1}^K \int_{-L_c}^{L_c} A_k \cos \frac{2\pi \xi}{L_c} \left\{ \frac{1}{[R_{max}]^L} \left[\mathbf{K}(k_L) - \mathbf{E}(k_L) + \frac{2R_v(R_v - R_c)}{[R_{min}]^L} \mathbf{E}(k_L) \right] \right\} d\xi, \quad (31)$$

$$\text{где } [R_{max}]^L = (R_v + R_c)^2 + \xi^2,$$

$$[R_{min}]^L = (R_v - R_c)^2 + \xi^2,$$

$$k_L^2 = \frac{4R_v R_c}{[R_{max}]^L}. \quad (32)$$

Радиальная компонента скорости одиночного вихревого кольца равна нулю в силу симметрии

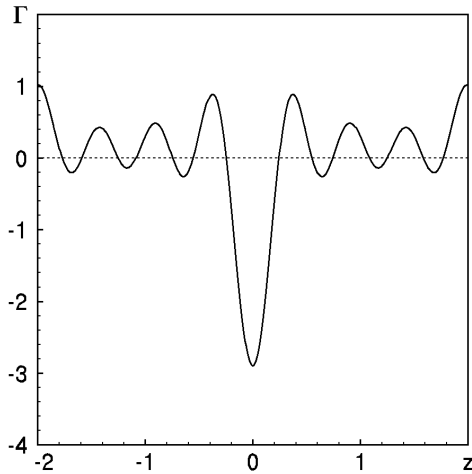


Рис. 10. Распределение интенсивности завихренности вдоль вихревого слоя при решении задачи с использованием граничного условия для скорости

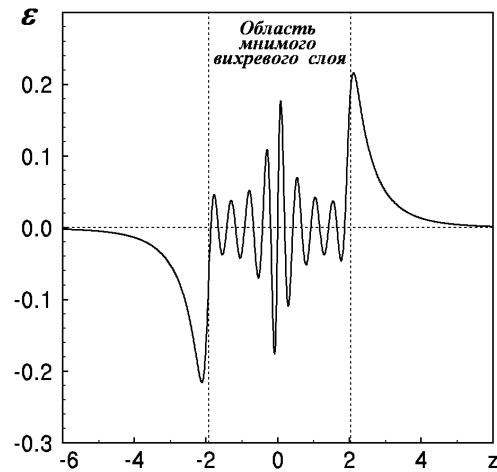


Рис. 11. Зависимость точности выполнения граничного условия $\varepsilon(z)$ для скорости мнимым вихревым слоем при $L_c = 2.0$, $R_c = 1.2$, $K = 7$

задачи. Первое слагаемое в (31) определяет самоиндуцированную скорость одиночного вихревого кольца, а второе слагаемое описывает влияние мнимого вихревого слоя.

Как и ранее, для проверки точности выполнения граничных условий на поверхности введем по аналогии с выражением (17) функцию ошибки $E(z)$ выполнения граничного условия в виде разности значений

$$E(z) = \Gamma_v F_v(z) - \frac{1}{2L_c} \sum_{k=1}^K A_k \int_{-L_c}^{L_c} F_c(z, \xi) \cos \frac{\pi k \xi}{L_c} d\xi. \quad (33)$$

Рассмотрим одиночное вихревое кольцо радиуса $R_v = 0.8$ с интенсивностью $\Gamma_v = 1.0$, которое находится внутри бесконечной круговой трубы радиуса $R_0 = 1.0$. Изменение интенсивности вдоль мнимого вихревого слоя для $R_c = 1.2$, $L_c = 2.0$ и $K = 7$ приведено на рис. 10. Распределение завихренности обладает симметрией и представляет собой знакопеременную функцию. Видно, что наибольшей по модулю интенсивностью завихренности обладает область вихревого слоя, которая ближе расположена к действительному вихрю.

Точность решения задачи можно количественно проанализировать из зависимости распределения функции ошибки $\varepsilon(z) = E(z)/U_{max}$ на поверхности границы (рис. 11), где U_{max} – максимальное значение скорости, наведенной вихревым кольцом

(4), на границе. Максимальная ошибка имеет место в области, близлежащей к действительному вихрю, и на краях вихревого слоя. Аналогичная особенность была отмечена в решении при использовании системы мнимых вихревых нитей.

Исследования показывают, что при удовлетворении граничных условий для скорости, значение функции тока на твердой поверхности выполняется с точностью до некоторой постоянной, которую в рамках рассматриваемого метода решения контролировать не удастся. Рис. 12 иллюстрирует распределение функции тока $\Psi(r, z)$ с топологическими уровнями, построенными с эквидистантным шагом $\Delta\Psi = 0.01$. На рисунке действительный вихрь обозначен кружком, а штриховой линией показана поверхность цилиндра. Следует обратить внимание на то, что функция тока имеет нулевое значение только на оси течения.

Рис. 13 иллюстрирует зависимость изменения максимального значения функции $\varepsilon(z)$ на интервале ($|z| \leq 6.0$) от ширины вихревого слоя L_c для различных значений K . Видно, что для любых значений K существует оптимальное значение L_c , при котором граничное условие для скорости выполняется наилучшим образом. При увеличении числа слагаемых K в разложении интенсивности вихревого слоя оптимальное значение L_s постепенно увеличивается.

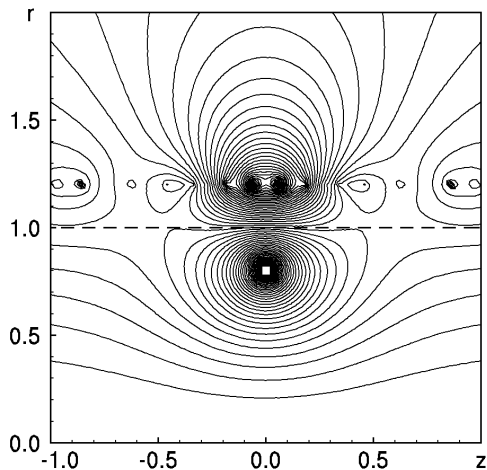


Рис. 12. Распределение функции тока при выполнении граничного условия для скорости мнимым вихревым слоем при $L_c = 2.0$, $R_c = 1.2$, $K = 7$

2.4. Выполнение граничного условия для функции тока вихревым слоем

Рассмотрим теперь задачу о движении тонкого осесимметричного вихревого кольца в бесконечной круговой трубе в принятых ранее обозначениях и применим граничное условие для функции тока на твердой поверхности. Для выполнения граничного условия (9) введем мнимый вихревой слой длиной $2L_c$ неизменного радиуса R_c . Распределение интенсивности $\Gamma(\xi)$ вихревого слоя представляем в виде тригонометрического ряда (22).

Вклад действительного вихревого кольца в значение функции тока в произвольной точке на поверхности трубы можно записать в виде

$$\Psi^*(z) = \Gamma_v G_v(z), \quad (34)$$

$$\text{где } G_v(z) = \sqrt{R_v R_0} \times \left[\left(\frac{2}{k_s} - k_s \right) \mathbf{K}(k_s) - \frac{2}{k_s} \mathbf{E}(k_s) \right] \quad (35)$$

с использованием введенных ранее обозначений (18).

В то же время, вклад в функцию тока со стороны мнимого вихревого слоя определяется интегралом

$$\Psi_r(z) = \frac{1}{2L_c} \int_{-L_c}^{L_c} \Gamma(\xi) G_c(z, \xi) d\xi =$$

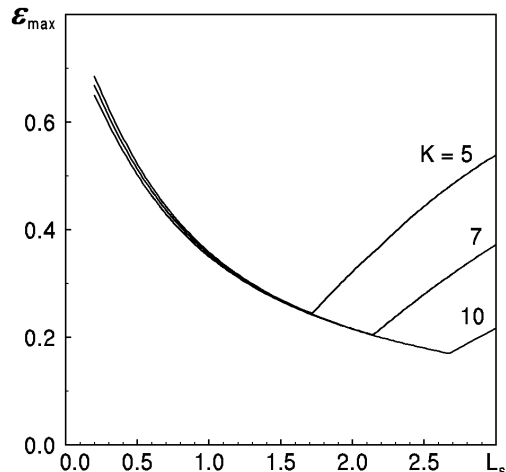


Рис. 13. Зависимость максимальной ε_{max} ошибки выполнения граничного условия для скорости от ширины вихревого слоя L_c для $K = 5, 7, 10$

$$= \frac{1}{2L_c} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_{-L_c}^{L_c} G_c(z, \xi) \cos \frac{\pi k \xi}{L_c} d\xi, \quad (36)$$

$$\text{где } G_c(z) = \sqrt{R_c R_0} \times \left[\left(\frac{2}{k_c} - k_c \right) \mathbf{K}(k_c) - \frac{2}{k_c} \mathbf{E}(k_c) \right] \quad (37)$$

с учетом обозначений (26).

В дальнейшем сумму значений функции тока (34) и (36) на поверхности приравняем к нулю. В результате получаем равенство

$$\frac{1}{2L_c} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_{-L_c}^{L_c} G_c(z, \xi) \cos \frac{\pi k \xi}{L_c} d\xi = -\Gamma_v G_v(z). \quad (38)$$

Для определения неизвестных коэффициентов A_k необходимо сформировать линейную алгебраическую систему уравнений. Поскольку распределение функции тока на поверхности цилиндра представляет собой четную функцию, домножим обе части равенства (38) на $\cos[\pi n z / L_c]$ и проинтегрируем в пределах $-L_c \leq z \leq L_c$. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$[\mathbf{A}_{nk}] \Gamma_k = \mathbf{B}_n, \quad n, k = 0, \dots, K, \quad (39)$$

$$\text{где } [\mathbf{A}_{nk}] = \frac{1}{2L_c} \int_{-L_c}^{L_c} \int_{-L_c}^{L_c} G_c(z, \xi) \times \cos \frac{\pi k \xi}{L_c} d\xi \cos \frac{\pi n z}{L_c} dz,$$

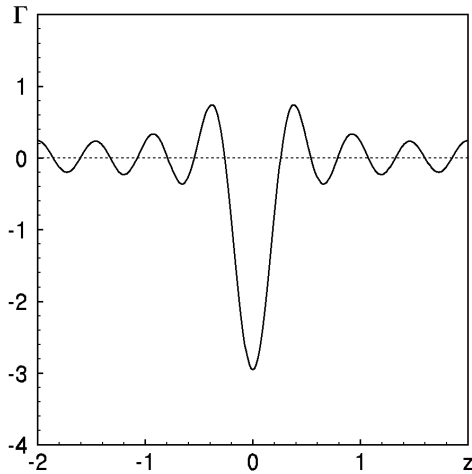


Рис. 14. Распределение интенсивности завихренности вдоль вихревого слоя при решении задачи с использованием граничного условия для функции тока

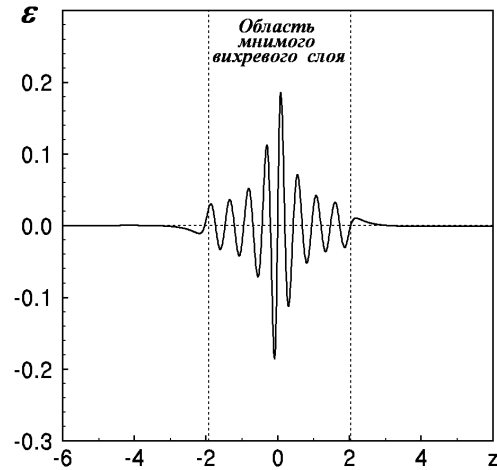


Рис. 15. Зависимость точности выполнения граничного условия $\varepsilon(z)$ для функции тока мнимым вихревым слоем при $L_c = 2.0$, $R_c = 1.2$, $K = 7$

$$B_n = \Gamma_v \int_{-L_c}^{L_c} G_v(z) \cos \frac{\pi n z}{L_c} dz. \quad (40)$$

Анализ значений элементов полученной системы алгебраических уравнений показывает, что (39) имеет доминирующие по модулю диагональные элементы. Значения осевой U_z и радиальной U_r скоростей одиночного тонкого вихревого кольца определяется выражениями (30) и (31) с обозначениями (32).

Для проведения сравнительного анализа точности решения гидродинамической задачи с полученными ранее другими решениями рассмотрим аналогичный пример со следующими параметрами: $R_v = 0.8$, $\Gamma_v = 1.0$, $R_0 = 1.0$. Пусть вихревой слой имеет $R_c = 1.2$ и $L_c = 2.0$. Рассмотрим решение, которое использует $K = 7$ слагаемых в ряде (22).

Распределение интенсивности завихренности вихревого слоя показано на рис. 14. Распределение завихренности обладает симметрией и представляет собой знакопеременную функцию. По мере удаления от плоскости $z = 0$ влияние действительного вихря уменьшается, в результате амплитуда пульсаций в распределении завихренности постепенно уменьшается. Сравнение результатов с рис. 10 показывает, что обе зависимости оказываются достаточно близкими в средней части вихревого слоя. Некоторые отличия в зависимостях наблюдаются на концах вихревого слоя: с увеличением z значение модуля завихренности $\Gamma(\xi)$ слоя на

рис. 14 уменьшается в отличие от рис. 10, на котором заметно некоторое увеличение интенсивности на краях вихревого слоя.

Точность выполнения граничного условия по скорости в рассматриваемой задаче можно проанализировать после вычисления функции ошибок $\varepsilon(z)$, показанной на рис. 15. Видно, что максимальная ошибка по скорости имеет место в области, близлежащей к действительному вихрю. По мере удаления от вихря значение радиальной скорости течения, в отличие от рассмотренного ранее случая (рис. 11), уже стремится к нулю.

Распределение функции тока в области, близлежащей к действительному вихрю, показано на рис. 16, который выполнен по аналогии с рис. 12. Топологические уровни на рисунке нанесены с шагом $\Delta\Psi = 0.01$. Кружочком на рисунке обозначено положение действительного вихревого кольца, а штриховой линией нанесена поверхность цилиндра. На рисунке видно, что линия $\Psi = 0$ принадлежит поверхности трубы на достаточно большом расстоянии от действительного вихря, в отличие от распределения функции тока, представленной на рис. 12.

Численный анализ точности решения рассматриваемой задачи показывает, что с увеличением количества слагаемых K (22) в разложении $\Gamma(\xi)$ распределения интенсивности мнимого вихревого слоя, точность выполнения граничных условий для скорости улучшается при равных прочих условиях. Эту тенденцию можно проследить на рис. 17, на котором показана зависимость измене-

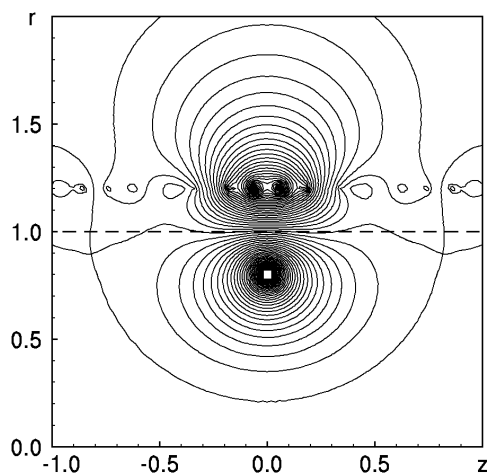


Рис. 16. Распределение функции тока при выполнении граничного условия для функции тока мнимым вихревым слоем при $L_c = 2.0$, $R_c = 1.2$, $K = 7$

ния максимального значения ε_{max} на контрольном интервале ($|z| \leq 6.0$) от протяженности вихревого слоя L_c . Из приведенных зависимостей видно, что для любого значения K наблюдается оптимальное значение длины L_c вихревого слоя, при котором достигаются минимальные локальные вычислительные ошибки. Сравнение этих результатов с аналогичными зависимостями на рис. 13, в которых использовалось граничное условие для радиальной компоненты скорости, показывает, что решение задачи с применением граничного условия для функции тока на внутренней поверхности цилиндра является более точным.

3. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ВЫПОЛНЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Каждое из четырех рассмотренных решений имеет по три свободных параметра. В решениях с системой мнимых вихревых нитей свободными параметрами являются количество M вихревых нитей, их радиус R_c и расстояние δ_z между вихрями. В решениях с вихревым слоем независимыми параметрами служат длина L_c вихревого слоя, его радиус R_c и количество K слагаемых, используемых в разложении Фурье распределения интенсивности завихренности вдоль вихревого слоя.

Исследования показывают, что в первом решении для заданного числа мнимых вихревых нитей существует оптимальное значение расстояния Δ_z

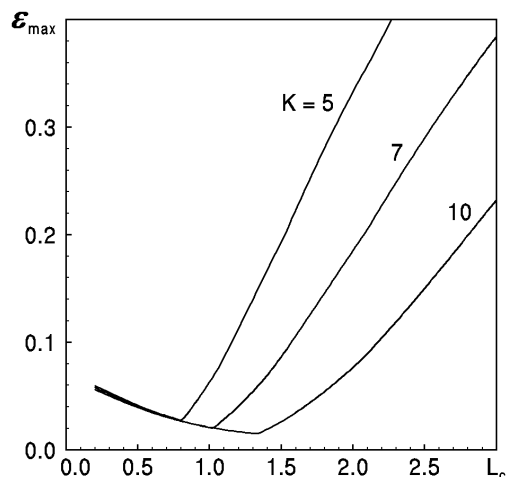


Рис. 17. Зависимость максимальной ошибки ε_{max} выполнения граничного условия для функции тока от ширины вихревого слоя L_c для $K = 5, 7, 10$

между вихрями, при котором достигается наилучшее выполнение граничных условий для радиальной компоненты скорости течения. Аналогичная ситуация имеет место для второй группы решений: для заданного числа K слагаемых в ряде Фурье разложения интенсивности завихренности в вихревом слое существует оптимальное значение длины L_c вихревого слоя, при котором наилучшим образом выполняется граничное условие.

Для контроля точности вычислений проводился анализ локального выполнения граничных условий. При этом использовались два критерия: максимальное и среднеквадратичное значения нормированной функции ошибки $\varepsilon(z)$ на достаточно большой протяженности L твердой поверхности в осевом направлении. Сравнение критериев выполнения граничных условий в достаточно широком диапазоне свободных параметров показывает, что решения, полученные с использованием граничных условий по скорости, не обеспечивают нулевое значение функции тока на внутренней поверхности в области, близлежащей к действительному вихрю (см. рис. 3 и 12). В то же время, решения, полученные с применением граничного условия для функции тока, обеспечивают хорошее выполнение граничных условий для функции тока (рис. 7 и 16). Количественный анализ локального выполнения граничного условия позволяет заключить, что решение, сформированное для функции тока с использованием последовательности дискретных мнимых вихревых нитей, формирует точное решение задачи о движении осесимметрично-

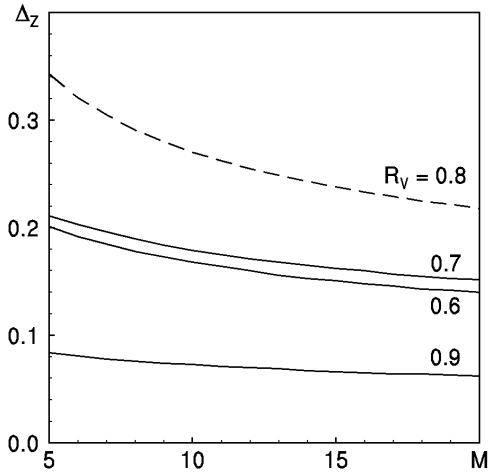


Рис. 18. Зависимость оптимального расстояния между вихрями Δz от числа вихревых нитей M для различных значений радиусов действительных вихревых колец R_v

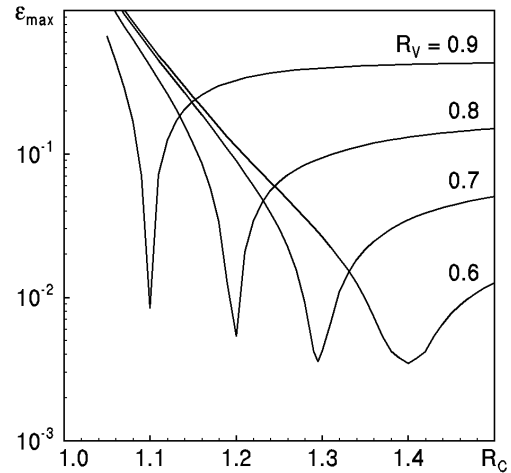


Рис. 19. Зависимость максимальной ошибки ε_{max} выполнения граничного условия для скорости от радиуса мнимых вихревых нитей при различных значениях радиусов действительных вихревых колец

го вихревого кольца внутри бесконечной цилиндрической поверхности.

Рис. 18 иллюстрирует зависимость оптимального расстояния между мнимыми нитями от числа вихрей M в вихревом слое при минимальной среднеквадратичной ошибке выполнения граничного условия для различных значений радиуса R_v действительного вихревого кольца при $R_c = 1.2$ и $K = 7$. Видно, что при увеличении числа вихрей в слое значение Δ_z уменьшается. Если действительный вихрь близко расположен к поверхности, необходимо при вычислениях выбирать малые значения Δ_z . В целом, можно заметить общую тенденцию: при увеличении радиуса действительного вихревого кольца значение оптимального расстояния между мнимыми вихрями в слое становится меньше. Однако в этой закономерности могут наблюдаться исключения ($R_v = 0.8$, штриховая линия на рис. 18), при которых наилучшее выполнение граничных условий достигается при достаточно большом Δ_z . Численные исследования показывают, что для достаточно большого числа вихрей в мнимом вихревом слое ($M > (20...25)$) оптимальное расстояние между вихрями практически не зависит от радиуса действительного вихревого кольца.

Рис. 19 демонстрирует зависимость минимального значения ε_{max} от радиуса R_c вихревого слоя для различных значений радиуса R_v действительного вихревого кольца при $\Delta_z = 0.25$ и $K = 7$. Видно, что для каждого значения R_v существует

такое значение R_c , при котором достигается наилучшее выполнение граничного условия для скорости. Чем ближе вихревое кольцо располагается к поверхности цилиндра, тем ближе следует располагать слой мнимых вихревых нитей. Однако амплитуда функций $\varepsilon(z)$ для широкого диапазона значений R_v оказывается небольшой по сравнению с величиной скорости, наводимой действительным вихревым кольцом на твердой поверхности.

На рис. 20 показана зависимость максимальной ошибки ε_{max} выполнения граничного условия от величины смещения Z_0 системы вихревых нитей (см. выражение (11)) для фиксированных значений параметров мнимого вихревого слоя: $R_c = 1.2$, $M = 9$ и $\Delta_z = 0.2$. Наилучшее выполнение граничного условия достигается в тот момент, когда осевые положения действительного вихря и одного из мнимых вихрей совпадают. Наибольшая ошибка выполнения граничного условия имеет место в тот момент, когда действительный вихрь находится посередине между мнимыми вихревыми нитями. Несмотря на то, что при этом максимальная ошибка увеличивается максимум на порядок, по абсолютному значению она не превышает 0.1% по отношению к максимальному значению наведенной скорости действительным вихревым кольцом на границе течения.

Анализ точности выполнения граничных условий позволяет сделать вывод о том, что фиксация пространственного положения мнимых вихревых нитей не оказывает существенного влияния

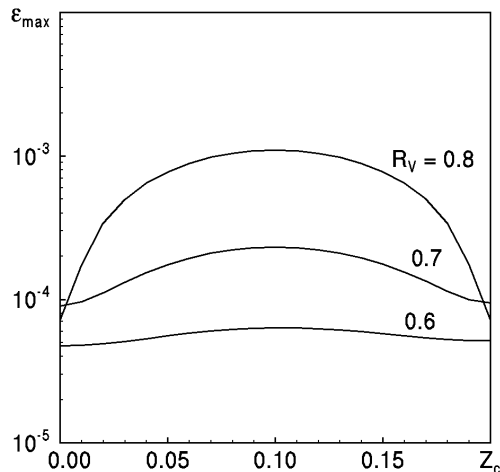


Рис. 20. Зависимость ε_{max} от осевого смещения Z_c вихревых нитей для различных значений радиусов действительных вихревых колец R_v

на точность выполнения граничных условий. При этом максимальная ошибка ε_{max} выполнения граничного условия для радиальной компоненты скорости течения остается приемлемой при решении задачи о движении осесимметричного вихревого кольца (или системы вихревых колец) внутри прямолинейной цилиндрической поверхности с круговым поперечным сечением.

4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВИХРЕВЫХ КОЛЕЦ В ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРУБЕ

Решение задачи о движении системы N коаксиальных вихревых колец в бесконечной круговой трубе, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, с использованием системы M неподвижных коаксиальных вихревых нитей с постоянными радиусами R_c и переменными интенсивностями Γ_m , может быть представлено в форме (6). При этом изменяется выражение для функции U , которая должна учитывать влияние мнимых вихревых нитей (или твердой поверхности). Таким образом, уравнения движения системы N тонких вихревых колец интенсивности Γ_i радиуса R_i , малым круговым поперечным сечением a_i ($a_i \ll R_i$) и осевым положением Z_i , $i = 1, \dots, N$, в цилиндрической системе координат (r, z) , связанной с осью симметрии трубы радиуса R_0 , представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения

первого порядка:

$$\frac{dR_\alpha}{dt} = -\frac{1}{\Gamma_\alpha R_\alpha} \frac{\partial U}{\partial Z_\alpha}, \quad (41)$$

$$\frac{dZ_\alpha}{dt} = \frac{\Gamma_\alpha}{4\pi R_\alpha} \left(\ln \frac{8R_\alpha}{a_\alpha} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\Gamma_\alpha R_\alpha} \frac{\partial U}{\partial R_\alpha}, \quad (42)$$

$$a_\alpha R_\alpha = \text{const}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (43)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} R_i(0) &= R_i^0, & Z_i(0) &= Z_i^0, \\ a_i(0) &= n_i^0 R_i^0, & n_i^0 &\ll 1, \end{aligned} \quad (44)$$

где $n_i = a_i/R_i$ – относительная толщина i -го вихревого кольца.

В приведенных выражениях

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{4\pi} \sqrt{R_i R_j} \times \\ &\times \left[\left(\frac{2}{k_{ij}} - k_{ij} \right) \mathbf{K}(k_{ij}) - \frac{2}{k_{ij}} \mathbf{E}(k_{ij}) \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{\Gamma_i \Gamma_m}{4\pi} \sqrt{R_c R_i} \times \\ &\times \left[\left(\frac{2}{k_m^{(i)}} - k_m^{(i)} \right) \mathbf{K}(k_m^{(i)}) - \frac{2}{k_m^{(i)}} \mathbf{E}(k_m^{(i)}) \right], \quad (45) \end{aligned}$$

$$\text{где } k_{ij}^2 = \frac{4R_i R_j}{[R_{max}^{(ij)}]^2}, \quad [k_m^{(i)}]^2 = \frac{4R_i R_c}{[R_{max,m}^{(i)}]^2},$$

$$[R_{max}^{(ij)}]^2 = (R_i + R_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2,$$

$$[R_{max,m}^{(i)}]^2 = (R_i + R_c)^2 + (Z_i - Z_m)^2,$$

$$Z_m = Z_c + m\Delta_z. \quad (46)$$

Здесь Γ_m – интенсивности мнимых вихревых нитей, которые определяются после решения линейной системы алгебраических уравнений (20) и (21); Z_c – ожидаемое среднеарифметическое осевое положение системы действительных вихревых колец.

В выражении (41) для радиальной составляющей слагаемые под знаком суммы представляют собой наведенное поле скорости со стороны действительных вихрей. Твердая поверхность не оказывает влияния на радиальную компоненту скорости в приближении идеальной жидкости. В выражении (42) для осевой компоненты скорости первое слагаемое представляет собой самоиндуцированную скорость тонкого вихревого кольца [10, 26, 29], а второе слагаемое описывает наведенную

компоненту скорости со стороны действительных и мнимых вихревых колец.

Идеальная жидкость не испытывает сопротивления своему движению со стороны прямолинейной поверхности. По этой причине для системы коаксиальных вихревых колец внутри бесконечного цилиндра с неизменным поперечным сечением должен выполняться закон сохранения импульса вдоль оси движения. Этот инвариант движения следует непосредственно из структуры функции U в выражении (45). Учитывая симметрию задачи, контурный интеграл от вектора скорости по поверхности цилиндра с возвращением на его поверхность по бесконечному радиусу равен нулю. Следовательно, суммарная интенсивность всех мнимых вихрей равна нулю. В этом случае функция U зависит лишь от разности $Z_i - Z_j$ и, следуя (41), получаем

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial Z_i} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i R_i \dot{R}_i = 0. \quad (47)$$

Из приведенного выражения непосредственно следует равенство

$$P = \sum_{i=1}^N \Gamma_i R_i^2 = \text{const}, \quad (48)$$

которое представляет собой инвариант движения системы вихревых колец с точностью до постоянного множителя [10, 30].

Второй инвариант движения, соответствующий закону сохранения кинетической энергии движения, можно получить, умножив уравнение (41) на $\Gamma_i R_i \dot{Z}_i$, а уравнение (42) – на $\Gamma_i R_i \dot{R}_i$. Определяем разность полученных выражений

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \Gamma_i^2 R_i \left(\ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\partial U}{\partial R_i} \dot{R}_i + \frac{\partial U}{\partial Z_i} \dot{Z}_i \right\} = 0. \quad (49)$$

Принимая во внимание условие сохранения объема завихренности (43) и отсутствие явной зависимости функции U от времени, получаем уравнение

$$W = \sum_{i=1}^N \Gamma_i^2 R_i \left(\ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{7}{4} \right) + U = \text{const}, \quad (50)$$

выражающее закон сохранения кинетической энергии колец. Слагаемое под знаком суммы в (50) определяет энергию изолированных колец, а функция U – энергию, связанную с взаимодействием действительных вихревых колец между собой, и энергию, наведенную со стороны мнимых

вихревых нитей (или твердой поверхности) на действительные вихревые кольца. Нетрудно показать, что функция U при $R_i \rightarrow 0$ или при $R_c \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к выражению (7) для безграничной жидкости.

ВЫВОДЫ

Во многих прикладных задачах, связанных с анализом процесса переноса скалярных полей (примесей, температуры, солености и др.) вихревыми течениями в трубах, выдвигаются требования непрерывности и гладкости решения задач, особенно в областях, в которых эффекты переноса проявляются наиболее интенсивно. Такими областями в большинстве гидродинамических течений являются области, прилегающие к вихрям и ограничивающим поверхностям.

Именно это требование ограничивает применение других известных методов решения рассматриваемой задачи. Например, интегральный метод, основанный на построении функции Грина [31], обеспечивает интегральное выполнение граничного условия. В результате получается решение, в котором имеются большие локальные ошибки при выполнении граничных условий. Однако в решении интеграл по поверхности от радиальной компоненты скорости равен нулю. В результате при анализе процессов переноса течениями появляются вычислительные ошибки в областях, прилегающих к границам. Вероятно, по этой же причине не нашел должного применения в этих задачах метод локальных дискретных особенностей [14], который хорошо описывает поле скорости вдали от поверхностей и вносит бесконечные скорости в точках коллокации на границах.

В работе рассмотрены четыре решения задачи о движении одиночного тонкого осесимметричного вихревого кольца внутри бесконечной цилиндрической полости, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Задача была решена адаптированным методом дискретных вихрей, который предусматривает введение в рассматриваемое течение системы дополнительных мнимых вихревых нитей (или мнимого вихревого слоя), удаленных от поверхности на некоторое расстояние, для удовлетворения граничного условия либо для функции тока (9), либо для радиальной компоненты (10) скорости течения. Анализ и сравнение точности выполнения граничного условия на контрольном участке поверхности показал, что решение, основанное на введении системы мнимых вихревых нитей, позволяет сформировать решение, которое обладает высокой точностью выполнения

граничного условия во всех точках контрольного участка твердой поверхности.

Большое значение при формировании решений имеет продолжительность вычислений. Решение задачи для системы дискретных вихрей требует компьютерного времени примерно на два порядка меньше, чем решение для вихревого слоя. Это вызвано тем, что в задаче с мнимым вихревым слоем формируется и решается линейная алгебраическая система, каждый элемент которой представляет собой интеграл от функции, содержащей полные эллиптические интегралы. В задаче с дискретной системой вихревых нитей интегрирование не проводится.

Таким образом, с позиций наилучшего выполнения граничных условий и минимизации необходимого процессорного времени для численного решения задачи наилучшим решением рассматриваемой задачи является подход, использующий систему фиксированных осесимметричных вихревых нитей и граничные условия для функции тока на ограничивающей течение поверхности.

Решение задачи методом дискретных вихрей позволило представить уравнения движения системы точечных вихрей в бесконечной трубе, заполненной идеальной жидкостью, в гамильтоновой форме (по аналогии со случаем движения колец в безграничной среде), из которой непосредственно следуют закон сохранения импульса вдоль оси движения и закон сохранения кинетической энергии движения жидкости.

1. Helmholtz H. Integrale der hydrodynamischen gleichungen welche den wirbelbewegungen entsprechen // J. Reine angew. Math.– 1858.– 55.– P. 25-55.
2. Вилля Г. Теория вихрей.– М.,Л.: Гостехиздат, 1936.– 266 с.
3. Голубев В.В. Теория крыла аэроплана конечного размаха.– М.: Гос.науч.-тех.издат, 1931.– 350 с.
4. Прандтль Л., Титъенс О. Гидро- и аэромеханика. Т.1.– М.,Л.: Гостехиздат, 1932.– 224 с.
5. Жуковский Н.Е. Теоретические основы воздухоплавания / Собр.соч. Т.6.– М.,Л.: Гостехиздат, 1950.– 623 с.
6. Милович А.Я. Теория динамического взаимодействия тел и жидкости.– М.,Л.: Госэнергиздат, 1940.– 240 с.
7. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости.– М.: Мир, 1973.– 758 с.
8. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Т.1.– М.: Физматгиз, 1963.– 583 с.
9. Ламб Г. Гидродинамика.– М.,Л.: Гостехиздат, 1947.– 928 с.
10. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур.– Киев: Наукова думка, 1993.– 279 с.
11. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика.– М.: Мир, 1964.– 655 с.
12. Saffman P.G. Vortex Dynamics.– Cambridge: Cambridge University Press, 1992.– 311 p.
13. Truesdell C. The kinematics of vorticity.– Bloomington: Indiana Univ, 1954.– 232 p.
14. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.– М.: Наука, 1985.– 253 с.
15. Веретенцев А.Н., Рудяк В.Я., Яненко Н.Н. О построении дискретных вихревых моделей течений идеальной несжимаемой жидкости // Журн. вычис. математики и мат.физики.– 1986.– Т.26, N.1.– С. 103-113.
16. Горелов Д.Н. К выбору контрольных точек в методе дискретных вихрей // Прикл. механика и техн.физика.– 1990.– N.1.– С. 167-170.
17. Cottet G.-H., Konmoutsakos P.D. Vortex methods: theory and practice.– Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2000.– 314 p.
18. Владимиров В.А., Рыбак Л.Я. Импульс и циркуляция вихревых колец // Учен. запис. ЦАГИ.– 1978.– Т.6. N5.– С. 111-115.
19. Liu C.H. Vortex simulation of unsteady shear flow induced by a vortex ring // Computers and Fluids.– 2002.– 31.– P. 183-207.
20. Orlandi P., Verzicco R. Vortex rings impinging on walls: axisymmetric and three-dimensional simulations // J. Fluid Mech.– 1993.– 256.– P. 615-646.
21. Swearingen J.D., Crouch J.D., Handler R.A. Dynamics and stability of a vortex ring impacting a solid boundary // J. Fluid Mech.– 1995.– 297.– P. 1-28.
22. Владимиров В.А., Тарасов В.Ф. Формирование вихревых колец // Изв. Сиб. отд-ния АН СССР.– 1980.– N3.– С. 2-11.
23. Roberts P.L. A numerical and experimental study of transition processes in an obstructed channel flow // J. Fluid Mech.– 1994.– 260.– P. 185-209.
24. Yamada H., Kohsaka T., Yamabe H., Matsui T. Flow field produced by vortex ring near a plane wall // J. Phys. Soc. Japan.– 1985.– 51, N5.– P. 1663-1670.
25. Jang I.-S., Chiba H., Watanabe S. Impact of a vortex ring on a wall in high Reynolds number region // J. Phys. Soc. Japan.– 1996.– 65, N.4.– P. 955-959.
26. Dyson F.W. The potential of an anchor ring // Phil. Trans. Roy. Soc. London.– 1893.– 184.– P. 43-95.
27. Форсайт Дж., Малкольм М., Коулер К. Машинные методы математических вычислений.– М.: Мир, 1980.– 210 с.
28. Atkinson K.E. An introduction to numerical analysis.– New York: Wiley, 1978.– 488 с.
29. Hicks W.M. On the mutual threading of vortex rings // Proc. Roy. Soc. London.– 1922.– A102.– P. 111-131.
30. Гуржий А.А., Константинов М.Ю., Мелешко В.В. Взаимодействие коаксиальных вихревых колец в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.– 1988.– N2.– С. 78-84.
31. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1966.– 724 с.