

УДК 532

УСТОЙЧИВОСТЬ ГРАНИЦЫ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В ПОДВИЖНОЙ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

А. В. БАСТЕЕВ*, А. В. ДАШКОВ**,
О. В. КРАВЧЕНКО***, О. Н. РЕПАЛОВА****

*Национальный аэрокосмический университет, **НПФ ООО Технология,
***Институт проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАН Украины,
****ННЦ ХФТИ НАН Украины

Получено 17.12.2007

Проведена аналитическая оценка критерия неустойчивости положения границы раздела фаз подвижного ядра потока и кристаллизованного слоя неньютоновской жидкости для случая степенной зависимости вязкости от скорости сдвига и стационарного теплообмена.

Була проведена аналітична оцінка критерія нестійкості положення межі розділу фаз рухомого ядра потоку та кристалізованого шару неньютонівської рідини для стаціонарного теплообміну, коли залежність в'язкості від швидкості зміщення є степеневою.

The analytical estimation of boundary stability between kernel of fluid and its crystallized layer has been made in the case of stationary heat exchange. The fluid was considered non-Newtonian with sedate dependence of viscosity from speed shear.

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья посвящена вопросу изучения поведения нагретой неньютоновской жидкости при ее движении в сравнительно тонком канале. Такие течения характерны для технологий переработки и литья полимеров, и их главной отличительной особенностью является наличие интенсивных процессов теплообмена. Например, перепад температур расплавленное ядро потока – стенка формующей оснастки может достигать в таких процессах 200°C. При движении нелинейно-вязкой жидкости по каналу происходит интенсивное охлаждение пристеночного слоя полимера, его кристаллизация (так как температура формующей оснастки обычно много меньше температуры кристаллизации полимера), рост кристаллизованного слоя по высоте и, как следствие всех этих процессов, – "закупорка" и остановка потока. С точки зрения конструирования оснастки, отладки технологических процессов, расчетов литьевых машин важно знать так называемую максимальную длину течения (или как говорят – проливаемость), которая может быть реализована для конкретных заданных параметров течения. Более того, чрезвычайно интересным оказывается вопрос о подборе таких параметров, при которых длина течения будет максимальной либо закупорка вообще не будет происходить. Эксперименты с проливаемостью полимерами тонких каналов различной геометрии показывают [1], что в большинстве слу-

чаев реальная длина течения может быть гораздо выше, чем получаемая из существующих расчетных моделей. Одним из недостатков имеющихся схем расчета является отсутствие учета процессов выделения теплоты за счет внутреннего трения в потоке. Однако для течения полимеров этот источник тепла может быть вполне существенным – за счет высоких давлений, и соответственно высоких сдвиговых скоростей при гораздо большей по сравнению с ньютоновскими жидкостями величине кажущейся вязкости. Таких образом, цель настоящей работы – попытаться в какой-то мере восполнить существующий пробел в моделировании подобных процессов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача об устойчивости границы раздела фаз в подвижной подогретой жидкости, которая движется под давлением в канале цилиндрической формы. Схема течения представлена на рис. 1. Подвижное ядро потока 2 имеет температуру, более высокую, чем холодная стенка канала 3. В результате процесса охлаждения у стенки образуется неподвижный кристаллизованный слой высотой h_0 , которая может быть как постоянной величиной в случае стационарного процесса, так и получать некоторые приращения (возмущения) \tilde{h} при отклонениях от стационарности. В последнем случае нестационарного процесса может

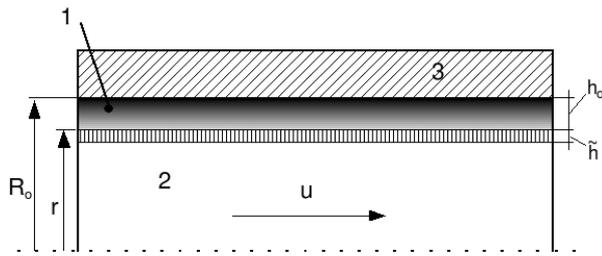


Рис. 1. Схема течения неньютоновской жидкости в канале

происходить и постепенное увеличение толщины кристаллизованного слоя, вплоть до полной закупорки канала и остановки течения. В данной работе будем рассматривать устойчивость положения границы раздела фаз при стационарном режиме, т.е., вообще говоря, исследовать возможность существования стационарного (относительно положения границы) режима в подобной системе. Для решения этой задачи используем известную линейную схему исследования на устойчивость: линеаризацию возмущенного уравнения движения границы раздела. Для этого нам понадобится решение уравнений теплопроводности в подвижной и неподвижной зонах с учетом процесса выделения тепла за счет внутреннего трения в потоке.

При решении задачи будем использовать следующие допущения. Жидкость является нелинейно-вязкой, в качестве реологического закона взята степенная зависимость:

$$\eta(S) = kS^{\frac{n-1}{2}}, \quad (1)$$

где S в общем случае – это функция тензора деформаций течения, в нашем же случае простой геометрии – функция производной от скорости течения по радиусу канала r . Величину кажущейся вязкости $\eta(S)$ принимаем зависящей от температуры. Вид этой зависимости будем считать экспоненциальным. Согласно [2], именно такой вид зависимости наиболее точно соответствует экспериментальным данным. Поскольку за основу расчетов взят степенной закон, то зависимость от температуры может содержаться в степенном показателе n и/или показателе пластичности k . Следуя [3], примем, что n не зависит от температуры, а величина k зависит экспоненциально:

$$k = k_0 e^{\frac{U}{RT}}, \quad (2)$$

где U – энергия активации течения; R – газовая постоянная; T – температура; k_0 – постоянная часть показателя пластичности. Принимаем про-

филь скорости течения, соответствующий степенному реологическому закону [5]. Также считаем, что теплоперенос в системе осуществляется только по высоте канала (радиусу трубы), и в системе присутствует выделение теплоты за счет внутреннего трения. Движение потока считаем происходящим только по оси канала. Температуру стенки канала T_{st} считаем постоянной. На границе раздела фаз считаем температуру равной температуре кристаллизации неньютоновской жидкости T_{cr} .

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

С принятыми допущениями уравнение теплопроводности для подвижного ядра потока (зоны 2) будет иметь вид:

$$\frac{\chi_2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) = -e^{\frac{U}{RT_2}} \frac{k_0}{c_p} \left(\frac{u_m(3n+1)r^{\frac{1}{n}}}{n(R_0-h_0)^{\frac{n+1}{n}}} \right)^{n+1}, \quad (3)$$

где u_m – средняя скорость потока; χ_2 – коэффициент температуропроводности; T_2 – температура в зоне 2. Уравнение (3) получается (с учетом принятых допущений) подстановкой выражения для скорости потока в уравнение теплопроводности для несжимаемой жидкости [4].¹ Введем следующие безразмерные величины:

$$\hat{r} = \frac{r}{R_0}, \quad \hat{h}_0 = \frac{h_0}{R_0}, \quad (4)$$

$$\theta_2 = \frac{T_2 - T_{cr}}{T_{cr}}, \quad \tilde{\beta} = \frac{U}{RT_{cr}}. \quad (5)$$

Разлагая экспоненту в выражении (3) в ряд и учитывая соотношения (4) и (5), получим уравнение (3) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \theta_2}{\partial \hat{r}} + \tilde{\gamma} (1 - \tilde{\beta} \theta_2) \hat{r}^{\frac{n+1}{n}} = 0, \quad (6)$$

где

$$\tilde{\gamma} = \frac{k_0 e^{\tilde{\beta}} u_m^{n+1}}{T_{cr} \chi_2 c_p R_0^{n-1}} \left(\frac{3n+1}{n} \right)^{n+1} \frac{1}{(1-\hat{h}_0)^{\frac{(n+1)^2}{n}}}. \quad (7)$$

Следует отметить, что разложение в ряд при получении уравнения (6) выполнено в окрестности $\theta_2 \approx 0$, или что то же самое в окрестности

¹Можно показать, что вид этого уравнения для нашего случая неньютоновской жидкости будет такой же как и в случае ньютоновской, но с учетом того, что вязкость теперь надо понимать как кажущуюся, т.е. не как константу, а как функцию от производной скорости.

$T_2 \approx T_{cr}$. Таким образом, это разложение справедливо для случая, когда температура T_2 близка к температуре T_{cr} . Данное упрощение является правомочным, поскольку по смыслу задачи исследования на устойчивость мы решаем уравнение (3) в непосредственной окрестности границы, где температура подвижной жидкости действительно должна быть близка к T_{cr} . С помощью замены переменных

$$y = 1 - \tilde{\beta}\theta_2 \quad x = \frac{2n}{3n+1} \sqrt{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} r^{\frac{3n+1}{2n}} \quad (8)$$

уравнение (6) может быть сведено к следующему:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial y}{\partial x} - y = 0. \quad (9)$$

Это известное уравнение Бесселя [6, 7], которое имеет решение вида:

$$y = C_1 I_0(x) + C_2 K_0(x), \quad (10)$$

где $I_0(x), K_0(x)$ – функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Обратная подстановка дает:

$$\theta_2 = \frac{1}{\tilde{\beta}} [1 - C_1 I_0(f(\hat{r})) - C_2 K_0(f(\hat{r}))], \quad (11)$$

где мы ввели обозначение

$$f(x) = \frac{2n}{3n+1} \sqrt{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} x^{\frac{3n+1}{2n}}. \quad (12)$$

Для вычисления констант C_1 и C_2 используем краевые условия:

$$\hat{r} = 1 - \hat{h}_0 \rightarrow \theta_2 = 0, \quad (13)$$

$$\hat{r} = 0 \rightarrow \frac{\partial \theta_2}{\partial \hat{r}} = 0. \quad (14)$$

Условие (14) следует из симметричности температурного профиля на оси канала. Применяя условие (14) и учитывая наличие логарифма в K_0 , имеем $C_2 = 0$; для вычисления C_1 используем (13). В результате окончательно имеем решение в виде:

$$\theta_2 = \frac{1}{\tilde{\beta}} \left(1 - \frac{I_0(f(\hat{r}))}{I_0(f(1 - \hat{h}_0))} \right). \quad (15)$$

Для дальнейшей работы с уравнением перемещения границы раздела нам нужна не сама температура θ_2 , а ее производная $\frac{\partial \theta_2}{\partial \hat{r}}$. Учитывая выражение для производной от функции I_0 [8]:

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \hat{r}} = \sqrt{\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}}} \frac{I_1(f(\hat{r}))}{I_0(f(1 - \hat{h}_0))} \hat{r}^{\frac{n+1}{2n}}. \quad (16)$$

Также нам понадобится аналогичная производная для температуры T_1 в кристаллизованной фазе – зона 1. Для этого мы должны решить уравнение теплопроводности для этой зоны. Из постановки задачи очевидно что это уравнение Лапласа. С учетом краевых условий на границах зоны 1

$$r = R_0 - h_0; \quad T_1 = T_{cr}; \quad r = R_0; \quad T_1 = T_{st} \quad (17)$$

производная его решения имеет вид:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \hat{r}} = \frac{\Delta T}{\ln(1 - \hat{h}_0)} \frac{1}{\hat{r}}, \quad (18)$$

где $\theta_1 = \frac{T_1 - T_{cr}}{T_{cr}}$, $\Delta T = \frac{T_{cr} - T_{st}}{T_{cr}}$. Уравнение подвижной границы в безразмерном виде имеет вид [9, 10]:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \hat{r}} \Big|_{\hat{r}=1-\hat{h}} - \tilde{\alpha} \frac{\partial \theta_2}{\partial \hat{r}} \Big|_{\hat{r}=1-\hat{h}} = \xi \frac{\partial \hat{h}}{\partial \tau}, \quad (19)$$

где $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ – отношение коэффициентов теплопроводности; ξ – безразмерная теплота плавления рассматриваемой среды. Уравнение (19) представляет собой уравнение баланса потоков тепла на границе: разница между приходящим потоком от подвижного ядра и уходящим потоком через стенку канала равна теплоте, расходуемой на приграничную кристаллизацию, которая и обуславливает перемещение границы со скоростью $\frac{\partial \hat{h}}{\partial \tau}$.

Подставив в (19) выражения для производных (18) и (16), находим уравнение для переменной \hat{h} :

$$\frac{\Delta T}{\ln(1 - \hat{h}_0)(1 - \hat{h})} - \tilde{\alpha} \sqrt{\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\beta}}} \frac{I_1(f(1 - \hat{h}))}{I_0(f(1 - \hat{h}_0))} \times \\ \times (1 - \hat{h})^{\frac{n+1}{2n}} = \xi \frac{d\hat{h}}{d\tau}. \quad (20)$$

Уравнение в возмущениях получается подстановкой $\hat{h} = \hat{h}_0 + \tilde{h}$, (здесь \tilde{h} – бесконечно малое возмущение равновесного положения границы \hat{h}_0) и последующей линеаризацией относительно нулевой окрестности бесконечно малого возмущения \tilde{h} . После пренебрежения квадратичными членами и математических упрощений получаем линеаризованное уравнение для возмущений

$$\frac{\Delta T}{\ln(1 - \hat{h}_0)(1 - \hat{h}_0)^2} \tilde{h} - \tilde{\alpha} \tilde{\gamma} I(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \hat{h}_0, n) \tilde{h} = \xi \frac{d\hat{h}}{d\tau}, \quad (21)$$

где

$$I(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \hat{h}_0, n) = (1 - \hat{h}_0)^{\frac{n+1}{2n}} - \frac{1}{2n\sqrt{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}} \frac{I_1(f(1 - \hat{h}_0))}{I_0(f(1 - \hat{h}_0))} \times \frac{3n + 1 + (n + 1)(1 - \hat{h}_0)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{(1 - \hat{h}_0)^{\frac{n+1}{n}}}}. \quad (22)$$

Уравнение (21) допускает решение вида:

$$\tilde{h} \sim e^{\sigma\tau}. \quad (23)$$

Подставляя это решение, получаем соотношение для σ и условие устойчивости $\sigma < 0$ в виде

$$(1 - \hat{h}_0)^{\frac{n+1}{2n}} - \frac{1}{2n\sqrt{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}} \frac{I_1(f(1 - \hat{h}_0))}{I_0(f(1 - \hat{h}_0))} \times \frac{3n + 1 + (n + 1)(1 - \hat{h}_0)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{(1 - \hat{h}_0)^{\frac{n+1}{n}}}} > \frac{\Delta T}{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} \ln(1 - \hat{h}_0)(1 - \hat{h}_0)^2} \quad (24)$$

Для анализа полученного выражения представим коэффициент $\tilde{\gamma}$ через следующие числа подобия:

$$Re = \frac{R_0^n u_m^{2-n} \rho}{k \left(\frac{6n + 2}{n}\right)^n} - \text{обобщенное число Рейнольдса}; \quad (25)$$

$$Pe = \frac{u_m R_0}{\chi_2} - \text{число Пекле}; \quad (26)$$

$$Eu = \frac{\Delta P}{\rho u_m^2} - \text{число Эйлера}. \quad (27)$$

С учетом выражений (25) – (27):

$$\tilde{\gamma} = \frac{Pe}{Re Eu} Tr \frac{1}{2^{n-3}} \left(\frac{3n + 1}{n}\right) \frac{1}{(1 - h_0)^{\frac{(n+2)^2}{n}}}, \quad (28)$$

где Tr – введенный нами для удобства коэффициент, который условно назовем “технологическим”,

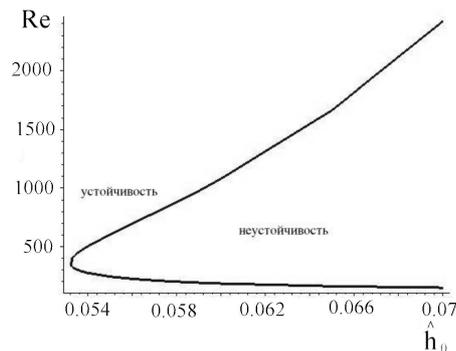


Рис. 2. Кривая нейтральной устойчивости в координатах $Re - \hat{h}_0$

так как он включает в себя основные параметры, характеризующие свойства неньютоновской жидкости и внешние условия течения:

$$Tr = \frac{\Delta P e^{\tilde{\beta}}}{T_{cr} c_p \rho}. \quad (29)$$

Таким образом, получено неравенство (24), которое может быть использовано для построения кривой нейтральной устойчивости при варьировании имеющихся безразмерных параметров. Очевидно, что уравнение для построения нейтральной кривой является сильно нелинейным. Для анализа уравнения и графического построения использовались численные расчеты: решалось трансцендентное уравнение относительно числа Re и последовательно находились все корни, соответствующие положительным Re . Затем по полученным точкам проводилось построение кривой. Полученные кривые изображены на рис. 2–3.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 2 показана кривая нейтральной устойчивости для значения степенного показателя течения $n=0.15$, построенная в координатах $Re - \hat{h}_0$. Области устойчивости соответствует область слева от кривой, а области неустойчивости – область внутри кривой. Из вида зависимости можно сделать следующие выводы. Для конкретных значений безразмерных чисел и параметров течения существует некая величина высоты кристаллизованного слоя (которую можно назвать критической) – $\hat{h}_0|_{cr}$, ниже которой граница будет устойчива для любых чисел Рейнольдса, которые могут реализовываться в течении. Значение этой величины определяется точкой перегиба нейтральной кривой. В

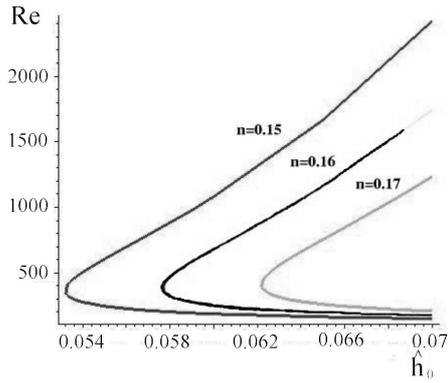


Рис. 3. Изменение формы нейтральной кривой для различных величин степенного показателя течения n

областях $\hat{h}_0 > \hat{h}_0|_{cr}$ устойчивость может иметь место при низких и высоких числах Re , однако существует достаточно широкий диапазон, в котором будет иметь место неустойчивость. Причем с увеличением \hat{h}_0 область неустойчивости расширяется. Интересно отметить, что если трактовать увеличение числа Рейнольдса как рост скорости потока, то происходящее при этом увеличение тепловыделения отнюдь не означает улучшения ситуации с устойчивостью и соответственно стабилизацией границы, так как при одной и той же величине \hat{h}_0 мы можем при этом попасть в область внутри кривой. Косвенно это может служить возможным объяснением того, что зачастую при увеличении давления и скорости впрыска на литьевых машинах не удается добиться роста величины проливаемости.

Полученная кривая также свидетельствует о том, что в случае сравнительно больших величин \hat{h}_0 устойчивость вряд ли может быть получена, так как для этого нужны либо слишком маленькие, либо слишком большие величины числа Re . Т. е. если в течении каким-то образом толщина кристаллизованного слоя достигла величин свыше 5–7 процентов радиуса канала, то стабильное положение такой границы уже невозможно в практическом отношении, поскольку течения с теми числами Рейнольдса, при которых может ожидать устойчивость, трудно реализуемы в технологическом плане.

На рис. 3 показано изменение кривой нейтральной устойчивости при изменении степенного показателя течения n . Как видно из графиков, увеличение n расширяет область гарантированной устойчивости (здесь термин “гарантированная устойчивость” нужно понимать в относительном

смысле применительно к данной задаче, так как устойчивость может быть потеряна и из-за других типов возмущений). Таким образом псевдопластики с большей величиной n более предпочтительны в смысле обеспечения устойчивости границы; диапазон параметров, при которых может проявляться устойчивость, для них гораздо шире. В применении к полимерам это означает, что такие материалы как полистирол и полиамид должны вести себя лучше, чем полиэтилен или полипропилен. Интересно отметить, что у кривых с разными n перегиб происходит при одинаковой величине Re . Фактически это означает, что вне зависимости от типа материала при равных внешних условиях течения кривая нейтральной устойчивости имеет перегиб при одной и той же величине Re , т. е. сохраняет свою форму. Отсюда можно сделать следующий качественный вывод: внешние параметры течения, такие как перепад давлений, температуры в значительной степени определяют качественное поведение границы фазового перехода, практически делая его однотипным для разных типов псевдопластиков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдено условие устойчивости путем изучения стационарных уравнений в предположении о возмущении только лишь границы раздела сред. Такой подход имеет два недостатка. Первый из них – это вопрос о возможной потере устойчивости границы из-за возмущений других типов – в данном случае гидродинамических и тепловых. Ясно, что такие возмущения могут приводить к сдвигу границы, так как могут менять гидродинамический профиль течения, а, следовательно, и режим выделения внутренней теплоты внутри ядра потока. Однако для неньютоновских жидкостей возмущения такого типа оказываются по-видимому не столь существенным явлением. Переход к турбулентности для таких жидкостей вообще явление редкое из-за большой величины кажущейся вязкости, хотя смена профилей течения из-за возмущений возможна. Второй из недостатков – это то, что многие процессы течения неньютоновских жидкостей являются скорее нестационарными, по крайней мере в некой своей начальной фазе. И здесь возникает вопрос, как производить оценку величины h_0 , при которой течение стабилизируется и становится стационарным. Очевидно, что для этого надо решать нестационарную задачу начального переходного процесса. Однако это соображение не отменяет необходимости исследования сначала более простых моделей, с последующим переходом к

более сложным случаям. В заключение остановимся на вопросе возможности практических приложений полученных зависимостей. В формулу (24) входят такие величины, как T_p , ΔT , которые включают в себя технологически настраиваемые параметры течения: давление впрыска, температуры жидкости и стенок, физические параметры полимера. Все эти величины в современных литьевых машинах могут настраиваться и регулироваться с высокой степенью точности. Даже физические параметры полимера сейчас могут быть изменены с помощью широкого ряда присадок, пластификаторов и модификаторов различного назначения. Таким образом, вывод, сделанный в предыдущем разделе о высокой степени управляемости положением границы с помощью внешних параметров, позволяет надеяться, что условие (24) может быть использовано для практической оценки режимов течений, при которых проливаемость (длина течения) будет выше.

1. Бастеев А. В., Дашков А. В., Кравченко О. В., Репалова О. Н. Влияние теплообмена на формуемость полимеров под давлением // Проблемы машиностроения.– 2005.– Т. 8, N 1.– С. 95–101.
2. Фройштетер Г. Б., Данилевич С. Ю., Радионова Н. В. Течение и теплообмен неньютоновских жидкостей в трубах.– Киев: Наукова думка, 1990.– 216 с.
3. Бостанджиян С. А., Черняева С. М. О гидродинамическом тепловом взрыве неньютоновской жидкости // ДАН СССР.– 1966.– Т. 170.– С. .
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Том VI.– М.: Наука, 1988.– 736 с.
5. Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости.– М.: Мир, 1964.– 216 с.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики, Т. 2.– М.: Наука, 1974.– 656 с.
7. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы.– М.: Гос. изд. ин. лит., 1948.– 260 с.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963.– 1099 с.
9. Лыков А. Теория теплопроводности.– М.: Высшая школа, 1967.– 599 с.
10. Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена.– М.: Гос. энергетическое изд-во, 1961.– 680 с.