

УДК 532.465

ГЕНЕРАЦІЯ ПОВЕРХНЕВИХ ГРАВІТАЦІЙНИХ ХВИЛЬ ЛОКАЛІЗОВАНОЮ ОБЛАСТЮ ЗАВИХРЕНОСТІ

О. В. ГОРОДЕЦЬКИЙ, В. І. НІКІШОВ

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Отримано 01.04.2008

Методом інтегральних перетворень знайдено розв'язок задачі про генерацію поверхневих гравітаційних хвиль джерелом довільної потужності, що знаходиться на заданій глибині в ідеальній нестисливій рідині. Отримано асимптотичний розв'язок задачі, що описує поверхневі хвилі на великій відстані від джерела. На основі використання методу відображень побудовано розв'язок задачі про генерацію поверхневих хвиль глибоко зануреною областю завихреності. Зроблено уточнення відомих результатів. Показано, що характер хвильових рухів визначається спектром флуктуацій завихреності.

Методом інтегральних преобразований найдено решение задачи о генерации поверхностных гравитационных волн источником произвольной интенсивности, который находится на заданной глубине в идеальной несжимаемой жидкости. Получено асимптотическое решение задачи, которое описывает волны на большом расстоянии от источника. На основе метода отображений построено решение задачи о генерации поверхностных волн глибоко погруженной областью завихренности. Сделано уточнение известных результатов. Показано, что характер волновых движений определяется спектром флуктуаций завихренности.

The problem of generation of surface gravitational waves by source of arbitrary strength that located at given depth in ideal incompressible fluid is solved by using the method of integral transformation. Asymptotic solution of the problem described the waves at large distance from source is obtained. The solution of the task about generation of surface waves by deeply submerged region of vorticity has been designed on the base of the method of image. The refinement of known results has been fulfilled. It is shown that the character of wave motion is determined by the spectrum of vorticity fluctuations.

ВСТУП

Відомо, що вплив вихрових рухів на потенціальні рухи відбувається через поле тиску. Локалізовані в просторі області завихреності, що є джерелом генерації флуктуацій тиску, можуть призводити до виникнення упорядкованих потенціальних рухів рідини при наявності обмежуючих поверхонь. Таким типом руху можуть бути поверхневі гравітаційні хвилі, течія рідини в яких є потенціальною.

На відміну від традиційних підходів, коли знаходяться збурення на границі шляхом розв'язку задачі про розподіл завихреності в просторі [1, 2], проаналізуємо рух поза локалізованою областю завихреності, розглядаючи її як занурене "джерело" збурень. Локалізовані області завихреності в рідині можуть виникати за тілами, що рухаються (слід за тілом), можуть являти собою зони переміщення, енергія яких підтримується турбулентними вихорами, що швидко згасають на великій відстані від області.

Відомі розв'язки задач про генерацію хвиль на поверхні розділу зануреними джерелами, диполями [3–5]. На відміну від цих розв'язків, при вивченні генерації поверхневих хвильових рухів локалізованими областями завихреності слід враховувати зворотний вплив, який чинить хвильовий рух

на вихровий рух. Як відомо, хвильовий рух згасає з глибиною по експоненціальному закону. З огляду на це, в деяких випадках зворотним впливом хвильових рухів на вихровий рух в області можна знехтувати.

1. ГЕНЕРАЦІЯ ХВИЛЬОВИХ РУХІВ ПУЛЬСУЮЧИМ ДЖЕРЕЛОМ

Перед тим, як перейти до задачі про генерацію поверхневих хвиль зануреною областю завихреності, розглянемо задачу про генерацію поверхневих хвиль пульсуючим джерелом. Традиційний підхід до розв'язання цієї задачі полягає в наступному. Припускаємо [3], що під вільною поверхнею рідини необмеженої глибини знаходиться джерело, потужність якого змінюється по гармонійному закону $Q(t) = Q_0 e^{i\omega t}$, де Q_0 – постійна величина, ω – частота. Координати центра джерела є такими $(0, 0, -h)$ (див. рис. 1). Використовуючи метод зображень [6], фіктивне джерело потужності Q розміщуємо в точці з координатами $(0, 0, h)$. Тоді потенціал швидкості руху рідини представляється у вигляді

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{Q_0}{4\pi} e^{(i\omega t)} \left[\psi(x, y, z) - \right.$$

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}}\right)], \quad (1)$$

де декартова система координат (x, y, z) розташована на вільній поверхні, вісь z направлена вверх, $r^2 = x^2 + y^2$, $\psi(x, y, z)$ – функція, гармонійна в нижньому півпросторі, що забезпечує виконання граничних умов на вільній поверхні. Цю функцію шукають в інтегральному представленні з ядром у вигляді функції Бесселя першого роду нульового порядку, виходячи з симетрії задачі.

В даній роботі використовується інший підхід. Розглянемо задачу генерації поверхневих хвиль джерелом змінної потужності, що знаходиться в точці $x = 0, y = 0, z = -h$ (рис. 1). Вважаємо, що рідина є ідеальною і нестисливою. Потенціал швидкості руху рідини задовольняє рівнянню Лапласа з правою частиною, що відображає дію джерела.

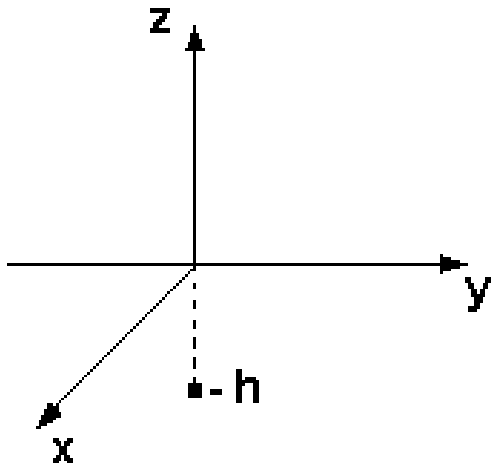


Рис. 1. Розміщення джерела збурень

Таким чином, розглянемо наступне рівняння:

$$\Delta\varphi = Q(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z+h), \quad (2)$$

де $\delta(x)$ – дельта функція. Вважаємо, що потужність джерела є гармонійною функцією часу, тобто

$$Q(t) = Q_0 e^{i\omega t}. \quad (3)$$

Тоді потенціал також є гармонійною функцією часу

$$\varphi = \Phi(x, y, z) e^{i\omega t}. \quad (4)$$

Приведемо рівняння (2) до безрозмірного вигляду. Для цього введемо характерні параметри довжини h , швидкості \sqrt{gh} і часу $\sqrt{h/g}$:

$$\Delta\tilde{\varphi} = \tilde{Q}(t)\delta(\tilde{x})\delta(\tilde{y})\delta(\tilde{z} + \tilde{h}). \quad (5)$$

Граничні умови запишемо у вигляді

$$\tilde{\varphi} \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad \tilde{z} \rightarrow -\infty,$$

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{z}} - \frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{t}^2} = 0, \quad \text{при} \quad \tilde{z} = 0. \quad (6)$$

Надалі символ ” \sim ” будемо опускати. З огляду на (3) і (4), рівняння (5) може бути представлене у вигляді

$$\Delta\Phi = Q_0\delta(x)\delta(y)\delta(z+h) \quad (7)$$

з граничними умовами

$$\varphi \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \omega^2\varphi = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (8)$$

Застосуємо до рівняння (7) інтегральне перетворення Фур’є по змінних x та y . Тоді отримуємо

$$\frac{d^2\hat{\varphi}(k_1, k_2, z)}{dz^2} - k^2\hat{\varphi}(k_1, k_2, z) = Q_0\delta(z+h), \quad (9)$$

де $k^2 = k_1^2 + k_2^2$.

Задача звелася до розв’язку рівняння (9) з граничними умовами (8). Розв’язок неоднорідного диференціального рівняння (9) з граничними умовами (8) представимо у вигляді лінійної комбінації функцій Φ_1, Φ_2 [6]:

$$\Phi(z) = \frac{\Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)}{W(-h)}, \quad (10)$$

де Φ_1, Φ_2 – два лінійно-незалежних розв’язки однорідного диференціального рівняння; вронскіан $W(z) = \Phi_1'(z)\Phi_2(z) - \Phi_2'(z)\Phi_1(z)$,

$$z_1 = z, \quad z_2 = -h, \quad \text{при} \quad z > -h,$$

$$z_1 = -h, \quad z_2 = z, \quad \text{при} \quad z < -h.$$

Розв’язок неоднорідного диференціального рівняння (9) із граничними умовами (8) має вигляд

$$\hat{\varphi}(k_1, y, k_2) = -\frac{Q_0}{2k(k-\omega^2)} \times \left[(k+\omega^2)e^{k(z-h)} + (k-\omega^2)e^{-k|z-h|} \right]. \quad (11)$$

Для знаходження потенціалу швидкості виконаємо обернене перетворення Фур’є:

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{Q_0}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1x} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_2y} \frac{1}{k(k-\omega^2)} \times$$

$$\times \left[(k + \omega^2)e^{k(z-h)} + (k - \omega^2)e^{-k|z-h|} \right] dk_2. \quad (12)$$

Для знаходження подвійного інтеграла переходимо до полярної системи координат $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi, k_1 = k \cos \theta, k_2 = k \sin \theta$ і виконуємо інтегрування по k і по θ

$$\varphi(r, \phi, z) = -\frac{Q_0}{8\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{(ikr(\cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta))} \times \left[\frac{(k + \omega^2)e^{k(z-h)} + (k - \omega^2)e^{-k|z-h|}}{k(k - \omega^2)} \right] k dk d\theta. \quad (13)$$

Використовуючи розклад Якобі [7], який дає представлення плоскої хвилі через циліндричні хвилі, можна показати, що

$$\int_0^{2\pi} \exp [irk \cos \phi \cos \theta] \exp [irk \sin \phi \sin \theta] d\theta = 2\pi J_0 \left(kr \sqrt{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi} \right) = 2\pi J_0(kr),$$

де $J_0(kr)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку. Тоді (13) приймає вигляд

$$\varphi(r, \phi, z) = -\frac{Q_0}{4\pi} \int_0^\infty J_0(kr) \times \left(\frac{k + \omega^2}{k - \omega^2} e^{k(z-h)} + e^{-k|z+h|} \right) dk. \quad (14)$$

Представимо функцію Бесселя у вигляді суми функцій Ханкеля першого і другого роду:

$$J_0(kr) = \frac{1}{2} \left(H_0^{(1)}(kr) + H_0^{(2)}(kr) \right).$$

Тоді інтегральне представлення потенціалу швидкості (14) буде

$$\begin{aligned} \varphi(r, \phi, z) &= -\frac{Q_0}{8\pi} \times \\ &\times \left[\int_0^\infty H_0^{(1)}(kr) \left(\frac{k + \omega^2}{k - \omega^2} e^{k(z-h)} + e^{k(z+h)} \right) dk + \right. \\ &\left. + \int_0^\infty H_0^{(2)}(kr) \left(\frac{k + \omega^2}{k - \omega^2} e^{k(z-h)} + e^{k(z+h)} \right) dk \right] = \\ &= -\frac{Q_0}{8\pi} (I_1^* + I_2^*). \end{aligned} \quad (15)$$

Розглянемо інтеграли, враховуючи асимптотичний вигляд функцій Ханкеля при великих значеннях аргументу $(kr) \rightarrow \infty$. Переходимо в комплексну площину і замкнемо контур інтегрування

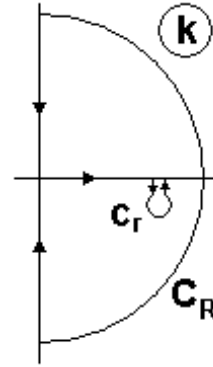


Рис. 2. Контур інтегрування

для I_1^* у верхній півплощині. Контур складається з дійсної півосі, чверті кола великого діаметра C_R і уявної півосі. Для обчислення I_2^* складаємо аналогічний контур у нижній півплощині (рис. 2). Тут полюс знаходиться на дійсній осі.

Скориставшись умовою випромінювання Лайтхілла, представимо параметр ω у вигляді суми дійсної і уявної частини [8]: $\omega = \omega_r - i\varepsilon$. Тоді можна записати $e^{i\omega t} = e^{i\omega_r t} e^{\varepsilon t}$. Очевидно, що в даному випадку при $t \rightarrow -\infty$ збурення прагнуть до нуля, а в даний момент часу залежать від часу як $e^{i\omega t}$. Оскільки $\omega^2 = \omega_r^2 - 2i\varepsilon\omega_r$, то полюс знаходиться в IV чверті. Здійснюючи інтегрування по контуру, отримуємо

$$\begin{aligned} \varphi(r, \phi, z) &= -\frac{Q_0}{8\pi} \left[\frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_0(kr) \cos k|z+h| dk - \right. \\ &- \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_0(kr) \frac{\omega^4 - k^2}{\omega^4 + k^2} \cos k(z-h) dk + \\ &+ \frac{8}{\pi} \int_0^\infty K_0(kr) \frac{\omega^2 k}{\omega^4 + k^2} \sin k(z-h) dk - \\ &\left. - 2i\pi H_0^{(2)}(\omega^2 r) 2\omega^2 e^{\omega^2(z-h)} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Враховуючи [9], що

$$\int_0^\infty \cos bt K_0(t) dt = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}, \quad (|Imb| < 1),$$

знаходимо

$$\int_0^\infty K_0(kr) \cos k|z+h| dk = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+h)^2}}.$$

Крім того,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} K_0(kr) \frac{\omega^4 - k^2}{\omega^4 + k^2} \cos k(z-h) dk = \\ & = -2 \int_0^{\infty} \frac{k^2}{\omega^4 + k^2} K_0(kr) \cos k(z-h) dk + \\ & \quad + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}}. \end{aligned}$$

Остаточно для потенціалу швидкості матимемо

$$\begin{aligned} \varphi(r, \phi, z) = & \\ & - \frac{Q_0}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} \right] - \\ & - \frac{Q_0}{4\pi} \left[\frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^2}{\omega^4 + k^4} K_0(kr) \cos k(z-h) dk + \right. \\ & \left. + \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 k}{\omega^4 + k^4} K_0(kr) \sin k(z-h) dk \right] + \\ & + \frac{Q_0}{4\pi} 2i\pi\omega^2 H_0^2(\omega^2 r) e^{\omega^2(z-h)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Отриманий вираз, що описує поширення поверхневих гравітаційних хвиль, збігається з відомими результатами [3, 4], отриманими на основі застосування виразу (1). Виконавши інтегрування частинами інтегралів у другому доданку, можна показати, що при великих значеннях $\omega^2 r$ їх сума має порядок $O(1/(\omega^2 r)^3)$ і їх вкладом можна знехтувати у подальшому. Для оцінки останнього доданка скористаємось асимптотичним представленням функції Ханкеля [7] і в результаті, враховуючи множник $\exp(i\omega t)$ для потенціалу швидкостей при великих $\omega^2 r$, отримуємо

$$\begin{aligned} \varphi(r, \phi, z, t) \approx & \\ \approx \frac{Q_0}{2} \left[i\omega e^{\omega^2(z-h)} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{-i(\omega^2 r - \omega t - \pi/4)} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

2. ХВИЛІ ВІД ДЖЕРЕЛА ДОВІЛЬНОЇ ПОТУЖНОСТІ

Отримані результати можуть бути узагальнені на загальний випадок джерела змінної потужності. Замість залежності (3) розглянемо довільний випадок, коли залежність потужності джерела від

часу має вигляд $Q = Q(t)$. Зробимо одне обмеження: нехай існує інтеграл Фур'є від функції $Q(t)$. Тоді можна записати

$$Q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Q}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

де $\hat{Q}(\omega)$ – спектр функції $Q(t)$. Будемо розглядати також спектральне представлення функції потенціалу швидкості

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

У цьому випадку, скориставшись результатами, отриманими раніше, запишемо

$$\varphi(t, x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega, \quad (19)$$

де відповідно

$$F(\omega) = -\frac{\hat{Q}}{4\pi} \times$$

$$\times = \int_0^{\infty} J_0(kr) \left[\frac{k + \omega^2}{k - \omega^2} e^{k(z-h)} + e^{-k|z+h|} \right] dk. \quad (20)$$

Розіб'ємо інтеграл (19) на два:

$$\begin{aligned} \varphi(t, x, y, z) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{i\omega t} F(\omega) d\omega + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Зупинимось на розгляді тільки асимптотичного розв'язку задачі, справедливого для великих відстаней від джерела. Як було показано раніше, основний внесок у цей розв'язок дає полюс підінтегрального виразу (20). Розглянемо спочатку інтеграл I_2 . Представимо функцію Бесселя у вигляді суми функцій Ханкеля, як це було зроблено в розділі 2 і розіб'ємо інтеграл I_2 на два інтеграли, причому у першому інтегралі як співмножник буде функція Ханкеля першого роду, а у другому –

функція Ханкеля другого роду:

$$I_2 = -\frac{\hat{Q}}{8\pi^2} \int_0^\infty e^{i\omega t} \int_0^\infty \frac{1}{2} (H_0^{(1)}(kr)) \times \\ \times \left[\frac{k+\omega^2}{k-\omega^2} e^{k(z-h)} + e^{-k|z+h|} \right] dk d\omega - \\ -\frac{\hat{Q}}{8\pi^2} \int_0^\infty e^{i\omega t} \int_0^\infty \frac{1}{2} (H_0^{(2)}(kr)) \times \\ \times \left[\frac{k+\omega^2}{k-\omega^2} e^{k(z-h)} + e^{-k|z+h|} \right] dk d\omega.$$

Переходячи в площину комплексних змінних, здійснюємо інтегрування по контурах: для першого інтеграла він замикається у верхній півплощині, для другого – у нижній. Попередній аналіз показав, що полюс у даному випадку знаходиться у четвертій чверті і внесок від полюсу в даному випадку буде мати інтеграл, що містить функцію $H_0^{(2)}(kr)$. Виконавши інтегрування, можна записати

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty 2\pi i \omega^2 H_0^{(2)} e^{\omega^2(z-h)} \frac{\hat{Q}(\omega)}{4\pi} e^{i\omega t} d\omega.$$

Використавши асимптотичне представлення функції Ханкеля другого роду, маємо

$$I_2 \cong \frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \int_0^\infty \omega e^{\omega^2(z-h)} \left[\hat{Q}(\omega) e^{i(\omega t - \omega^2 r + \pi/4)} \right] d\omega.$$

Аналогічним чином знаходимо інтеграл I_1 . Відмінність полягає лише в тому, що значення $\omega < 0$. Полюс в (20), дотримуючись правила Лайтхілла, описується виразом $k = \omega_r^2 - 2i\varepsilon\omega_r$, тобто при $\omega_r < 0$ він буде знаходитись в першій чверті і його вклад буде виражатися через інтеграл, що містить функцію $H_0^{(1)}(kr)$. У результаті отримаємо

$$I_1 \cong -\frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \int_0^\infty \omega e^{\omega^2(z-h)} \hat{Q}(-\omega) e^{-i(\omega t - \omega^2 r + \pi/4)} d\omega.$$

Повертаючись до (19), запишемо

$$\varphi(t, r, z) = \frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \int_0^\infty \omega e^{\omega^2(z-h)} \times \\ \times \left[\hat{Q}(\omega) e^{i(\omega t - \omega^2 r + \pi/4)} - \right. \\ \left. - \hat{Q}(-\omega) e^{-i(\omega t - \omega^2 r + \pi/4)} \right] d\omega. \quad (21)$$

Знайдемо тепер асимптотичний розв'язок задачі, використовуючи метод стаціонарної фази [10]. Будемо шукати розв'язок вздовж шляхів $r = Ct$ для великих значень t . У результаті знаходимо

$$\varphi(t, r, z) = \frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \omega_0 e^{\omega_0^2(z-h)} \sqrt{\frac{2\pi}{|t-2C|}} \times \\ \times \left[\hat{Q}(\omega_0) e^{it(\omega_0 - C\omega_0^2)} - \hat{Q}(-\omega_0) e^{-it(\omega_0 - C\omega_0^2)} \right], \quad (22)$$

де $\omega_0 = \frac{t}{2C}$. Якщо спектр коливань потужності джерела симетричний, тобто $Q(-\omega) = Q(\omega)$, то

$$\varphi(t, r, z) \cong -\frac{\sqrt{2}}{4\pi} \frac{t}{r^2} \times \\ \times \exp \left[\frac{t^2}{4r^2} (z-h) \right] Q \left(\frac{t}{2r} \right) \sin \left(\frac{t^2}{4r^2} \right). \quad (23)$$

3. ГЕНЕРАЦІЯ ПОВЕРХНЕВИХ ХВИЛЬ ЗАНУРЕНОЮ ОБЛАСТЮ ЗАВИХРЕНОСТІ

Розглянемо генерацію хвильових рухів на вільній поверхні однорідної ідеальної нестисливої рідини необмеженої глибини областю Ω , завихреність усередині якої $\vec{\omega}(t, x, y, z)$ відмінна від нуля. Область Ω знаходиться на відстані h від вільної поверхні (рис. 3). Рівняння імпульсу може бути записане в такому вигляді:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p - \rho g \vec{m}, \quad (24)$$

де \vec{v} – вектор швидкості; p – тиск; ρ – густина; g – прискорення сили тяжіння; \vec{m} – одиничний вектор, спрямований вгору вздовж вертикальної координати.

Розкладемо вектор швидкості на потенціальну і вихрову компоненти:

$$\vec{v} = \nabla \varphi + \vec{v}_s,$$

де φ – потенціал швидкості руху рідини. Вихрову складову швидкості покладемо рівною нулю поза областю Ω . Тоді рівняння (24) може бути представлено в такому вигляді:

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \frac{\vec{v}^2}{2} + \nabla \frac{p-p_0}{\rho} + \\ + \nabla(gz) = -(\vec{\omega} \times \vec{v}), \quad (25)$$

де p_0 – тиск над вільною поверхнею. Введемо в розгляд функцію Бернуллі, визначену наступним чином:

$$B = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p-p_0}{\rho} + gz. \quad (26)$$

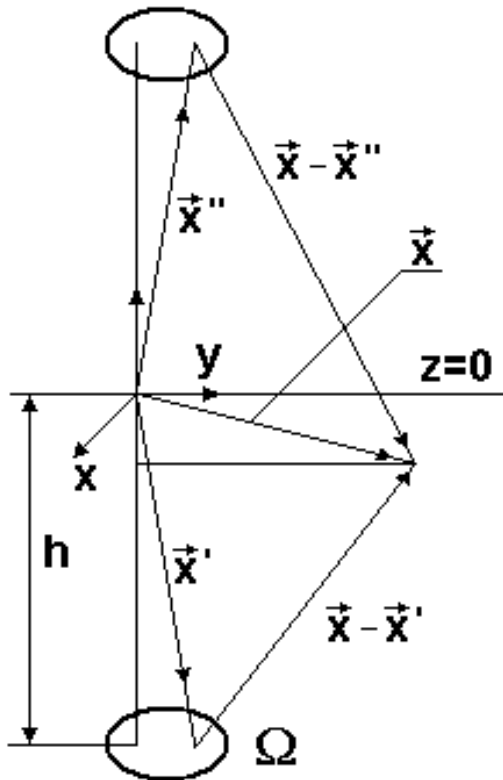


Рис. 3. Розміщення області завихреності

Рівняння (25) приймає вигляд

$$\nabla B = -\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} - (\vec{\omega} \times \vec{v}). \quad (27)$$

В незавихреній рідині, віддаленій від області Ω , маємо замість (26) рівність

$$B = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2 + \frac{p - p_0}{\rho_0} + gz. \quad (28)$$

Також маємо рівняння нестисливості

$$\nabla \vec{v} = 0,$$

з якого отримуємо

$$\nabla \vec{v}_s = 0, \quad (29)$$

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (30)$$

Тоді, застосувавши операцію дивергенції до (27), знаходимо

$$\nabla^2 B = -\nabla(\vec{\omega} \times \vec{v}). \quad (31)$$

З рівняння (27) або (31) видно, що при відсутності рухів в області Ω функція Бернуллі B стає постійною. При наявності рухів у даній області це

рівняння може бути використане для опису функції B .

Ми розглядаємо генерацію поверхневих хвиль глибоко зануреною областю і припускаємо, що амплітуда хвиль мала. Відомо [3, 4], що амплітуда поверхневих хвиль затухає по експоненті з глибиною, а збурення, обумовлені зануреною областю завихреності, затухають по алгебраїчному (степеневому) закону [4]. Тому ми можемо припускати, що вплив поверхневих хвиль на рух в межах достатньо глибоко зануреної області Ω незначний.

Таким чином, якщо джерело задане (ми маємо на увазі, що швидкість задана в межах обмеженої області), рівняння (31) є рівнянням Пуассона для функції B . Припускаємо, що область зі збуреннями розташована на глибині h і характерний розмір l області – набагато менший, ніж глибина h , тобто $l \ll h$. Розв'язок рівняння (31) запишемо за допомогою функції Гріна. Відповідно до роботи [6], запишемо функцію Гріна у вигляді

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}''|} \right]. \quad (32)$$

Необхідно зазначити, що в роботах [11, 12] приймалося до уваги тільки перший доданок у виразі (32), аргументуючи це тим, що область завихреності знаходилась далеко від вільної поверхні і у цьому випадку можна використовувати функцію Гріна для всього простору. У співвідношенні (32) враховано наявність поверхні розділу. У даному випадку розглядається рівняння Пуассона для функції Бернуллі, і для неї виконується умова Неймана [6]. Вектор \vec{x}' показує місце розташування елемента джерела, вектор \vec{x}'' показує місце розташування зображення і \vec{x} відповідає точці спостереження (див. рис. 3). Таким чином, отримуємо

$$B(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \nabla(\vec{\omega} \times \vec{v}) \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right] dx' dy' dz'.$$

Введемо радіус у горизонтальній площині $r^2 = x^2 + y^2$. Наближено можна записати, враховуючи нерівність $l \ll h$:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2} &\cong \\ &\cong \sqrt{r^2 + (z+h)^2} = R_1, \end{aligned}$$

і відповідно

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \cong$$

$$\cong \sqrt{r^2 + (z - h)^2} = R_2.$$

Тоді

$$B(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \int_{\Omega} \nabla(\vec{\omega} \times \vec{v}) dx' dy' dz'.$$

Введемо позначення

$$L(t) = \int_{\Omega} \nabla(\vec{\omega} \times \vec{v}) dx' dy' dz' \quad (33)$$

і отримуємо

$$B(x, y, z, t) = \frac{L(t)}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (34)$$

Лінеаризована функція Бернуллі віддалена від області джерела в нижньому півпросторі має вигляд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p - p_0}{\rho_0} + gz = \frac{L(t)}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (35)$$

Розглянемо поверхневі хвилі, утворені зануреною областю, в якій відбуваються флюктуючі гідродинамічні рухи, що характеризуються завихреністю, яка не дорівнює нулю. Вважаємо, що середовище напівнескінченне, а над ним знаходиться повітряна атмосфера. Для потенціалу швидкості виконується рівняння Лапласа $\Delta \varphi = 0$. Гранична умова на вільній поверхні з урахуванням кінематичної умови

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial t}, \quad \text{при } z = 0,$$

а також приймаючи до уваги рівність $R_1 = R_2 = R$ при $z = 0$, може бути представлена у вигляді

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial L(t)}{\partial t} \frac{1}{2\pi R} = 0, \quad \text{при } z = 0, \quad (36)$$

і друга умова

$$\varphi \rightarrow 0, \quad \text{при } z \rightarrow -\infty.$$

Вважаємо, що $L(t) = 0$ при $t = 0$.

Слід зазначити, що задача, яка розглядається, аналогічна задачі, яка розглядалась вище, про генерацію хвиль джерелом довільної потужності $Q(t)$.

Введемо характерні масштаби задачі: довжину h і прискорення сили тяжіння g . Тоді рівняння Лапласа, граничні і початкова умови у безрозмірному вигляді можуть бути представлені наступним чином:

$$\Delta \varphi = 0, \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial L(t)}{\partial t} \frac{1}{2\pi \sqrt{r^2 + 1}} = 0, \quad (38)$$

$$\varphi \rightarrow 0, \quad \text{при } z \rightarrow -\infty, \quad (39)$$

$$L(t) = 0, \quad \text{при } t = 0. \quad (40)$$

Таким чином, задача зводиться до розв'язку рівняння (37) з початковою умовою (40) і граничними умовами (38) і (39).

Для розв'язку задачі застосовуємо перетворення Фур'є по часу і перетворення Фур'є по координатам x і y . В результаті маємо

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial z^2} = m^2 \hat{\varphi}, \quad m^2 = k_1^2 + k_2^2. \quad (41)$$

Задовольняючи умову (39), знаходимо

$$\hat{\varphi} = Ae^{mz}. \quad (42)$$

Застосовуємо перетворення до граничної умови (38):

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} - \omega^2 \hat{\varphi} = i\omega \frac{e^{-m} \hat{L}(\omega)}{m} \quad \text{при } z = 0, \quad (43)$$

де $\hat{L}(\omega)$ – спектр збурень швидкості в області Ω .

Підставляючи розв'язок (42) у (43), отримуємо для вертикальної компоненти швидкості

$$\hat{w} = \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} = i\omega \frac{e^{-m} e^{mz} \hat{L}(\omega)}{m - \omega^2}.$$

Застосовуємо обернені перетворення по k_1, k_2 і ω . Проводимо заміну змінних:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad k_1 = m \cos \theta, \quad k_2 = m \sin \theta,$$

і отримуємо

$$w = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \hat{L}(\omega) e^{i\omega t} \times \int_0^{\infty} \frac{e^{-m} e^{mz} J_0(mr)}{(m - \omega^2)} m dm d\omega. \quad (44)$$

Для обчислення внутрішнього інтеграла в (44) представимо функцію Бесселя у вигляді суми функцій Ханкеля першого і другого родів і розіб'ємо інтеграл на суму двох інтегралів:

$$w = \frac{1}{(2\pi)^2} (I_1 + I_2),$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 i\omega \hat{L}(\omega) e^{i\omega t} \left[G_1(\omega, r) + G_2(\omega, r) \right],$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} i\omega \hat{L}(\omega) e^{i\omega t} \left[G_1(\omega, r) + G_2(\omega, r) \right],$$

$$G_1(\omega, r) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-m} e^{mz}}{m - \omega^2} H_0^{(1)}(mr) m dm,$$

$$G_2(\omega, r) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-m} e^{mz}}{m - \omega^2} H_0^2(mr) m dm.$$

Підінтегральні вирази в $G_1(\omega, r)$ і $G_2(\omega, r)$ мають полюс на дійсній осі m . Оберемо шлях інтегрування навколо полюсів так само, як і в задачі про генерацію поверхневих гравітаційних хвиль зануреним джерелом змінної потужності, застосовуючи правило Лайтхілла. Використовуємо асимптотичне представлення функції Ханкеля, знаходимо

$$I_1 = -\frac{1}{2} \int_0^{\text{infy}} i\omega \hat{L}(-\omega) e^{-i\omega t} \times$$

$$\times \left[-2\pi i \omega^2 e^{-\omega^2} e^{\omega^2 z} H_0^{(1)}(\omega^2 r) + \right.$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-im} e^{imz} K_0(mr)}{(m + i\omega^2)} m dm +$$

$$\left. + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{im} e^{-imz} K_0(mr)}{(m - i\omega^2)} m dm \right] d\omega,$$

де $K_0(mr)$ – функція Макдональда, що швидко згасає з ростом аргументу.

Обчислення I_2 здійснюється аналогічним чином. У даному випадку полюс знаходиться в IV кварталі, і шлях інтегрування представлений на рис. 4, *b*. Нехтуючи величинами, які прямують до нуля при великих значеннях аргументу, вертикальна компонента швидкості може бути представлена у вигляді

$$w = - \int_0^{\infty} G(\omega) \left[\hat{L}(-\omega) e^{-i\omega t} H_0^{(1)}(\omega^2 r) + \right.$$

$$\left. + \hat{L}(\omega) e^{i\omega t} H_0^2(\omega^2 r) \right] d\omega, \quad (45)$$

де $G(\omega) = \frac{1}{4\pi} \omega^3 e^{-\omega^2} e^{\omega^2 z}$.

Використовуючи асимптотичну форму функцій Ханкеля, вертикальна компонента швидкості може бути представлена у вигляді

$$w = -2 \int_0^{\infty} G\omega \sqrt{\frac{2}{\pi\omega^2 r}} \times$$

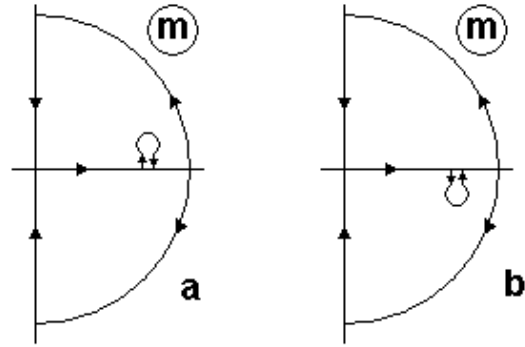


Рис. 4. Контури інтегрування в комплексній площині

$$\times \left[\hat{L}(-\omega) e^{-i(\omega t - \omega^2 r + \pi/4)} + \hat{L}(\omega) e^{i(\omega t - \omega^2 r + \pi/4)} \right] d\omega.$$

Оцінка цього виразу може бути зроблена на основі методу стаціонарної фази для великих r і t вздовж шляхів $r = ct$, де c – стала. Тоді маємо оцінку виразу (45):

$$w = -\frac{2\sqrt{2}}{\omega_s r} G(\omega_s) \left[\hat{L}(-\omega_s) e^{-i\omega_s t} e^{i\omega_s^2 r} + \right.$$

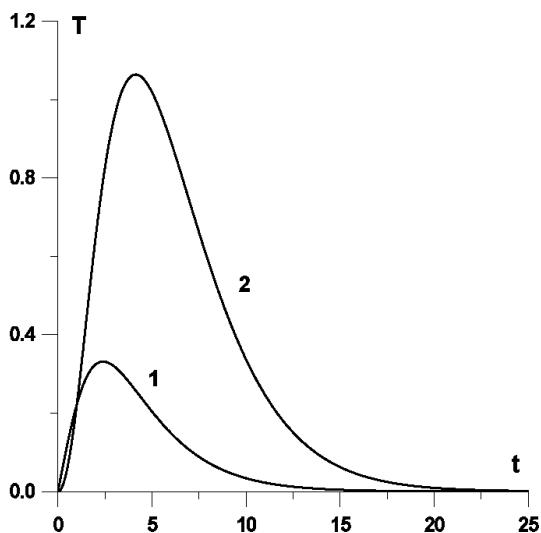
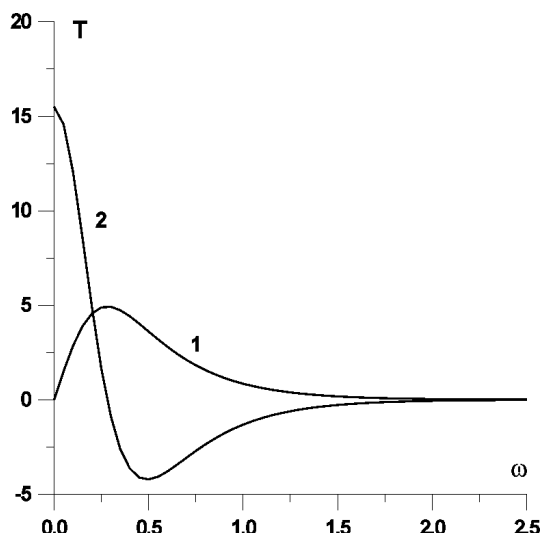
$$\left. + \hat{L}(\omega_s) e^{i\omega_s t} e^{-i\omega_s^2 r} \right], \quad (46)$$

де $\omega_s = 1/2c = t/2r$.

Таким чином, отримано залежності, що описують лінеаризоване поле поверхневих хвиль, утворених зануреною областю завихреності. Для великої глибини занурення даної області зворотним ефектом поверхневих хвиль на характеристиках швидкості і завихреності в межах області можна знехтувати.

Для обчислення збурень поверхні, які генеруються зануреною областю завихреності, застосовується формула (46) і кінематичні умови на вільній поверхні. Для проведення конкретних розрахунків необхідно задати характеристики області завихреності і обчислити вираз (33). Відмітимо, що процес лінеаризації, який застосовувався при постановці задачі, а точніше, при формулюванні граничних умов на вільній поверхні, не проводиться при обчисленні $L(t)$. Величина гідродинамічних рухів у межах області не обов'язково мала. Іншими словами, при обчисленні $L(t)$ можуть бути враховані нелінійні ефекти. В загальному випадку величина $L(t)$ залежить від вибору конкретної моделі руху.

Аналіз отриманих виразів, що описують генерацію поверхневих гравітаційних хвиль зануреним джерелом змінної потужності і областю завихреності, показують, що між ними існує певна ана-


 Рис. 5. Залежність функції $L(t)$ від часу

 Рис. 6. Спектр функції $L(t)$

логія. Співвідношення між ними може бути виражено у вигляді: "потужність" джерела області завихреності відповідає швидкості зміни потужності джерела змінної інтенсивності:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \leftrightarrow \int_{V'} \nabla(\vec{\omega} \times \vec{v}) dx' dy' dz'.$$

З міркувань розмірностей можна записати $L(t) \propto v_x^2 l$, де v_x – характерна швидкість руху в області Ω ; l – характерний розмір області, ($l \ll h$).

Як було прийнято вище, в початковий момент часу рух в області Ω відсутній. Нехай інтенсивність руху спочатку зростає, а потім спадає, що повністю відповідає фізиці процесу виникнення областей зі збуреннями швидкості в реальних умовах морського середовища. Тоді представимо $L(t)$ у вигляді $L(t) = C v_x^2 \cdot l T(t)$, де $T(t)$ – функція, що відображає зміну інтенсивності руху від часу, причому $T(t)$ в даному випадку є безрозмірною функцією; C – постійна, що залежить від структури і інтенсивності руху рідини в області Ω .

Розглянемо два приклади функції $T(t)$ в наступних формах:

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \frac{1}{2} \frac{t}{1+e^{-t}} e^{-t/2}, \\ T_2(t) &= \frac{1}{2} \frac{t^2}{1+e^{-t}} e^{-t/2}. \end{aligned} \quad (47)$$

Графіки функцій $T_1(t)$ (крива 1) і $T_2(t)$ (крива 2) представлені на рис. 5.

Після застосування перетворення Фур'є відповідно маємо [13]

$$\hat{T}_1 = \frac{i\pi^2}{2} \frac{\text{sh } \pi\omega}{\text{ch } 2\pi\omega}, \quad \hat{T}_2 = \frac{\pi^3}{2} \frac{2 - \text{ch } 2\pi\omega}{\text{ch } 3\pi\omega}. \quad (48)$$

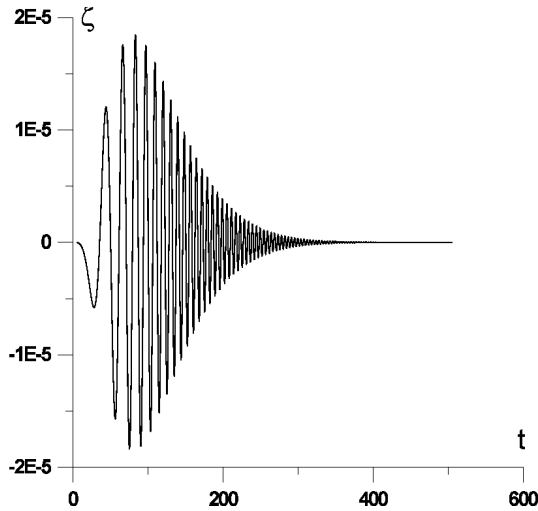
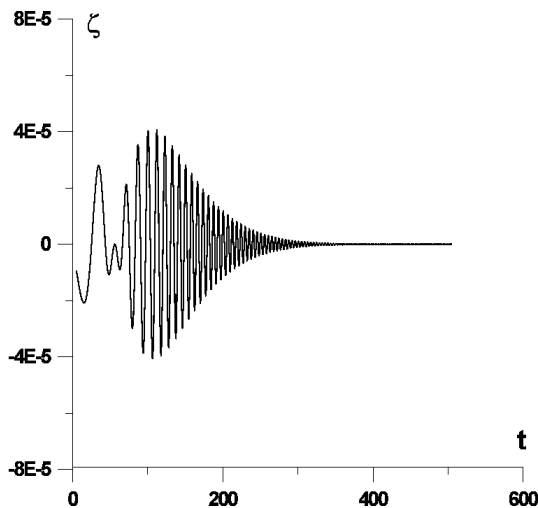
Спектри функцій $\hat{T}_1(\omega)$ і $\hat{T}_2(\omega)$ зображені на рис. 6.

Формулу для відхилення вільної поверхні ζ для спектрів (48) отримуємо з (46) із врахуванням кінематичних граничних умов:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{i\sqrt{2}}{4\pi r} \omega_s e^{-\omega_s^2 r} \times \\ &\times \left[\hat{L}(-\omega_s) e^{-i\omega_s t} e^{i\omega_s^2 r} + \hat{L}(\omega_s) E^{i\omega_s t} e^{-i\omega_s^2 r} \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

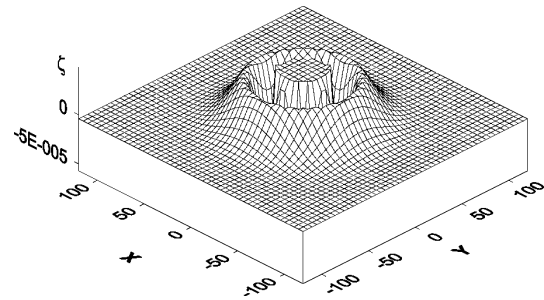
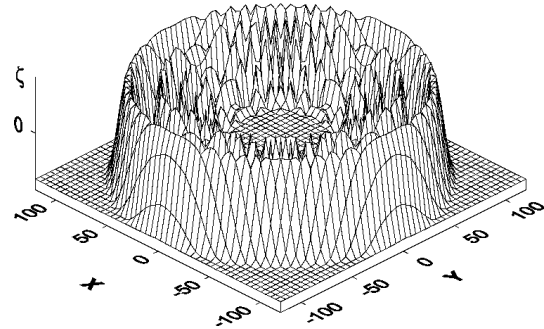
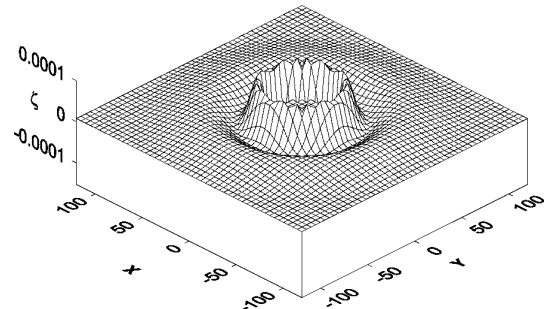
Для проведення чисельних розрахунків будемо вважати, що характерна швидкість $v_x = 0.33$, характерний розмір області завихреності $l = 0.1$, а константа $C = 1$.

На рис. 7 та 8 представлено результати розрахунків відхилення вільної поверхні від незбуреного рівня ζ в залежності від часу t для відстані $r = 100$, для спектрів функції $L(t)$ виду $\hat{T}_1(\omega)$ та $\hat{T}_2(\omega)$ відповідно. Порівнюючи рис. 7 та 8, відмітимо, що спільним для обох спектрів є те, що для малих t інтенсивність хвильових рухів незначна. З часом, коли до точки спостереження доходять хвилі, в яких зосереджена основна частина енергії, амплітуда коливань значно зростає. При великих значеннях t , коли хвилі, в яких зосереджена основна частина енергії, вже пройшли точку спостереження, інтенсивність хвиль різко спадає.

Рис. 7. Залежність амплітуди хвиль від часу при $r = 100$ (перший тип збурень)Рис. 8. Залежність амплітуди хвиль від часу при $r = 100$ (другий тип збурень)

В той самий час, слід відзначити ряд відмінностей для хвильових картин. Для величин відхилення вільної поверхні для другого спектру (рис. 8) має якісно інший характер, значно складніший ніж для першого спектру (рис. 7). Це обумовлено різним видом спектрів $\hat{T}_1(\omega)$ та $\hat{T}_2(\omega)$. Як видно з (48), спектр $\hat{T}_2(\omega)$ значно відрізняється від $\hat{T}_1(\omega)$, особливо для малих значень ω .

На рис. 9 та 10 для першої моделі спектру, $\hat{T}_1(\omega)$, побудовано просторову картину хвиль для інтервалу відстаней $r = 20 \div 100$ для моменту часу $t = 30$ і $t = 100$ відповідно. Аналогічні розрахунки відхилення вільної поверхні зроблені для другої моделі спектру $\hat{T}_2(\omega)$ при тих самих значеннях r

Рис. 9. Просторова картина збурень при $t = 30$ (перший тип збурень)Рис. 10. Просторова картина збурень при $t = 30$ (другий тип збурень)Рис. 11. Просторова картина збурень при $t = 100$ (перший тип збурень)

і t . Результати представлено на рис. 11 ($t = 30$) та рис. 12 ($t = 100$). Як і очікувалось, висновки відповідають зробленим вище.

ВИСНОВКИ

Таким чином, у роботі методом інтегральних перетворень знайдено розв'язок задачі про генерацію поверхневих гравітаційних хвиль джерелом змінної потужності, що знаходиться на заданій глибині. Зроблено оцінку інтегральних виразів, знайдено асимптотичне представлення розв'язку, що описує хвилі на великій відстані від джерела.

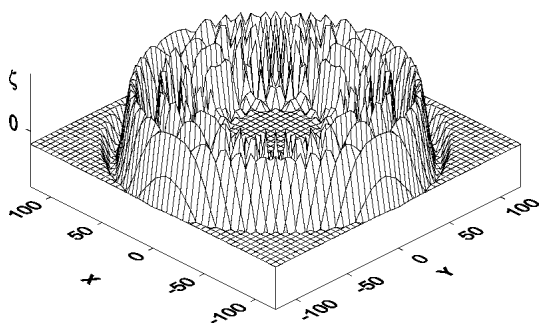


Рис. 12. Просторова картина збурень при $t = 100$ (другий тип збурень)

Порівняльний аналіз показав, що здобуте рішення, що описує поведінку потенціалу швидкості, збігається з відомими результатами [4, 5], отриманими іншими способами. Застосований підхід дозволяє вирішувати задачі при наявності ряду поверхонь розділу. Застосування його доцільне в задачах, коли один з шарів заповнено, наприклад, в'язкою рідиною [14].

Розв'язок задачі про генерацію поверхневих хвиль пульсуючим джерелом узагальнено на випадок джерела довільної змінної потужності. Показано, що характер хвилювання визначається спектром потужності джерела. Методом стаціонарної фази отримано асимптотичний розв'язок, що описує хвилюву картину на великих відстанях від джерела.

Грунтуючись на методиці розв'язку задач про генерації поверхневих гравітаційних хвиль джерелами (пульсуючої або змінної довільної потужності), отримано розв'язок задачі про генерацію лінійних хвиль зануреною областю змінних гідродинамічних рухів. Розглянуто випадок, коли область глибоко занурена в рідину. Це дозволяє знехтувати зворотним впливом поверхневих хвиль на рух рідини в області завихреності. Таке припущення ґрунтується на тому, що вплив хвилювого руху затухає з глибиною по експоненціальному закону, у той час як збурення від області завихреності – по степеневому.

Незважаючи на те, що розглядаються лінійні хвилі, величини гідродинамічних рухів у межах області можуть бути великими, оскільки параметри "джерела" розраховуються окремо. Ці флуктуації, як правило, є результатом нелінійних взаємодій гідродинамічних полів, що відомі або розраховані окремо і процес лінеаризації до них не застосовується.

В роботі розглянуто генерацію поверхневих хвиль глибоко зануреною областю завихреності. Такі області можуть виникати внаслідок дії зануреного концентрованого джерела кількості руху. Відмітимо, що наявність кінцевої глибини або стратифікації рідини в даному випадку призводить до того, що течія, яка виникає, стає обмеженою по глибині і приймає двовимірний характер. У результаті вихрові рухи можуть "когерентним" чином досягати вільної поверхні [15, 16].

1. Сэффтан Ф.Дж. Динамика вихрей.– М.: Научный мир, 2000.– 375 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред.– М.: Гос. изд. техн.-теор. лит.-ры, 1953.– 788 с.
3. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости.– М.: Наука, 1977.– 815 с.
4. Ламб Г. Гидродинамика.– М.-Л.: ОГИЗ, 1947.– 928 с.
5. Хаскинд М.Д. Гидродинамическая теория качки корабля.– М.: Наука, 1972.– 327 с.
6. Морс Ф.М., Фешбах Г. Метод теоретической физики.– М.: МУЛ, 1958.– Т. 1, 931 с.; 1960.– Т. 2, 897 с.
7. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций.– М.: Наука, 1971.– 287 с.
8. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях.– М.: Мир, 1981.– 598 с.
9. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям.– М.: Наука, 1979.– 830 с.
10. Федорюк М.В. Метод перевала.– М.: Наука, 1977.– 368 с.
11. Liu J.T.C. Generation of interfacial gravity waves by submerged regions of fluctuating hydrodynamical motions and fluid inhomogeneities // *Physics of Fluids*.– 1979.– vol. **22**, N. 5.– P. 814-818.
12. Мадерич В.С., Никишов В.И., Стеценко А.Г. Динамика внутрішнього перемішування в стратифікованому середовищі.– К.: Наукова думка, 1988.– 239 с.
13. Бейтмен Г, Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1.– М.: Наука, 1969.– 343 с.
14. Lu D.Q., Chwang A.T. Interfacial waves due to a singularity in a system of two-semi-infinite fluids // *Physics of Fluids*.– 2005.– vol. **17**.– P. 102107.
15. Sous D., Bonneton N., Sommeria J. Turbulent vortex dipoles in a shallow water layer // *Phys. Fluids*.– 2004.– vol. **16**, N. 8.– P. 2886-2898.
16. Voropayev S.I., Fernando H.J.S., Smirnov S.A., Morrison R. On surface signature by submerged momentum sources // *Phys. Fluids*.– 2007.– vol. **19**.– P. 076603.