

УДК 532.542.4

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ СИЛ ПЛАВУЧЕСТИ

Е. И. НИКИФОРОВИЧ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

*Получено 23.06.2007*

В работе разработан новый подход к изучению развития течений с силами плавучести на основе методов сращиваемых асимптотических разложений. Нелинейное взаимодействие между объемным источником завихренности термодинамического происхождения и поверхностным источником завихренности вследствие условий прилипания определяет новый класс пространственно-временных масштабов, явным образом зависящих от силы плавучести. Предложена классификация возможных сценариев развития пограничного слоя над нагреваемой/охлаждаемой пластиной, включая переход к трехмерности.

В роботі розроблений новий підхід до вивчення розвитку течії з силами плавучості на основі методів асимптотичних розкладень які зрощуються. Нелінійна взаємодія між об'ємним джерелом завихреності термодинамічного походження та поверхневим джерелом завихреності внаслідок умов прилипания визначає новий клас просторово-часових масштабів, явним чином залежних від сили плавучості. Запропонована класифікація можливих сценаріїв розвитку пограничного шару над пластиною, що нагрівається/охолоджується, включаючи перехід до трьохмірності.

The development of a temperature stratified boundary layer (SBL) over a flat plate is investigated. In this paper using the asymptotic analysis of Navier-Stokes equations the following conclusions were obtained: -buoyancy forces in a SBL result in the appearance of the new type of space-time scales which explicitly depends on the value of these forces; -longitudinal vortices, as an essential flow structural feature, were shown to originate from the interaction of two vorticity sources (due to viscous and buoyancy forces). Available buoyancy forces were proved to result in essentially 3D nature of boundary layers. Obtained results can be used for optimal ways of SBL control using basic parameters

## ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] показано, что модель стратифицированной среды обладает собственными пространственно-временными масштабами, зависящими от степени ее термодинамической неравновесности. Поэтому в общем случае модель однородной сплошной среды является сингулярно вырожденным случаем стратифицированной среды. Физический смысл этого утверждения состоит в следующем: наличие термодинамической неравновесности в среде (или, что то же самое, стратификации) приводит к появлению в ней объемных источников завихренности, интенсивность (мощность) которых пропорциональна величине этой неравновесности. Вырождение стратификации среды приводит к вырождению завихренности, что во многих случаях качественно изменяет картину течения. Показательным примером взаимодействия двух типов неравновесной среды – термодинамической и гидродинамической – является развитие температурно-стратифицированного пограничного слоя на плоской полубесконечной пластине при ее обтекании однородным потоком вязкой теплопроводной жидкости, имеющей температуру, отличную от температуры пластины.

Рассматриваемая задача давно привлекает пристальное внимание многих исследователей и имеет

два аспекта. Первый связан с исследованием влияния силы плавучести на структуру двумерного пограничного слоя и на процессы теплообмена в нем. Несмотря на большое количество теоретических работ в этой области [2–6], все они сводились к попыткам построить решение уравнений пограничного слоя в виде разложений по параметру, характеризующему силу плавучести, методом локальной автомодельности или неавтомодельности с использованием численных методов. Однако решения были построены только для узкого диапазона изменения параметров разложения. Причем величина этого диапазона существенным образом зависит от знака силы плавучести – если для охлаждаемой пластины численные решения получены в достаточно широком диапазоне изменения плавучести (увеличение параметра плавучести соответствует увеличению продольной координаты пластины), то для нагреваемой пластины решение практически не найдено. Это свидетельствует о принципиальных различиях поведения решения в случае положительной и отрицательной плавучести. Кроме того, отсутствует доказательство сходимости применяемых разложений.

Второй аспект связан с устойчивостью рассматриваемого пограничного слоя, переходом к трехмерности, структурой трехмерного пограничного слоя и закономерностями теплообмена в нем.

Подобные исследования проводились в рамках теории устойчивости, предполагающей внесение заданных возмущений в основной поток и наблюдение за их развитием [7, 8]. Рассмотренные в этих работах подходы к указанной проблеме не позволяют получить зависимости точки возникновения трехмерных вихревых структур в пограничном слое и их пространственно-временные характеристики от определяющих параметров задачи и, следовательно, не дают путей оптимального управления процессами переноса таких течений.

До последнего времени эти два аспекта рассматривались практически независимо друг от друга, поэтому целью настоящей работы является:

- 1) построение уравнений двумерного стратифицированного пограничного слоя и исследования нелинейного взаимодействия объемных и поверхностных источников завихренности;
- 2) изучение физического механизма возникновения трехмерных вихревых структур в стратифицированном пограничном слое;
- 3) исследование пространственно-временных характеристик вихревых структур, возникающих под действием сил плавучести;
- 4) классификация режимов течений и теплообмена в стратифицированном пограничном слое.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О РАЗВИТИИ ТЕЧЕНИЙ И ПРОЦЕССАХ ПЕРЕНОСА НАД ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ НАГРЕВАЕМОЙ/ОХЛАЖДАЕМОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНОЙ

Рассмотрим обтекание горизонтальной (для простоты) плоской пластины с температурой  $T_s$  однородным невозмущенным потоком вязкой теплопроводной жидкости, имеющей скорость  $U_0$  и температуру  $T_0$ . Коэффициенты вязкости и теплопроводности предполагаются постоянными. В системе координат, связанной с пластиной, уравнения Навье-Стокса, неразрывности и теплопроводности имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{U}\nabla U = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 U + F_x, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \vec{U}\nabla V = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 V + F_y, \quad (2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{U}\nabla W = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 W + F_z, \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{U}\nabla T = (\nu \text{Pr}) \nabla^2 T, \quad (5)$$

здесь  $\vec{F} = \rho/\rho_0 \vec{g}$  – сила тяжести;  
 $\vec{U}\nabla = U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial z}$  – конвективный оператор;  
 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа;  
 Pr – число Прандтля.

В динамике стратифицированных сред особую важность играет задание уравнения состояния среды, вид которого и определяет ее стратификацию. Для рассматриваемого случая принимается линейная зависимость плотности среды от температуры, т. е.

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0)), \quad (6)$$

где  $\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T_0}$  – коэффициент объемного термического расширения жидкости. Принятый вид уравнения состояния (6) естественным образом определяет безразмерный параметр  $\varepsilon = \beta(T_s - T_0)$ , который и характеризует степень термодинамической неравновесности среды (для определенности  $T_s > T_0$ ). Очевидно, что случай  $\varepsilon = 0$  соответствует однородной жидкости, а для обычных сред и условий  $\varepsilon \ll 0$ . Сила тяжести принимает вид:

$$\vec{F} = 0, -(1 - \varepsilon\theta)g, 0,$$

здесь  $\theta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0}$ .

Если ввести в рассмотрение динамическое давление  $Pd = P + \rho_0 \cdot y \cdot g$ , то сила плавучести будет:

$$\vec{F} = \{0, \varepsilon\theta g, 0\}, \quad (7)$$

и из уравнений (1)–(3) следует, что в общем случае сила плавучести (7) определяет объемный источник завихренности, мощность которого пропорциональна степени термодинамической неравновесности среды  $\varepsilon$ . Кроме того, в систему определяющих параметров задачи теперь необходимо включить величину ускорения свободного падения  $g$ , а это в свою очередь приводит к появлению неравновесных пространственных масштабов типа

$$f_1(\varepsilon)(\nu^2/g)^{1/3}, \quad f_2(\varepsilon)\frac{U_0^2}{g}, \quad f_3(\varepsilon)\frac{U_0^5}{g\nu},$$

где  $f_i(\varepsilon) \rightarrow 0$  – некоторые функции параметра  $\varepsilon$ , вырождающиеся при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Наличием неравновесных масштабов и определяется принципиальное отличие пограничных слоев в случаях обтекания пластины однородной и стратифицированной жидкостями. Особенности стратифицированных пограничных слоев и рассматриваются ниже.

## 2. ДВУМЕРНЫЙ СТРАТИФИЦИРОВАННЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ И ЕГО ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Система двумерных уравнений Навье–Стокса и теплопроводности в рассматриваемой задаче принимает вид:

$$\rho \frac{dU}{dt} = -\frac{\partial p_d}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right], \quad (8)$$

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\frac{\partial p_d}{\partial y} + \varepsilon \rho_0 g \theta + \mu \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right], \quad (9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right] \chi. \quad (11)$$

Как указывалось выше, предельный случай  $\varepsilon = 0$  соответствует развитию пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой потоком однородной жидкости, и описывается уравнениями Прандтля. И кажется, что учесть влияние сил плавучести на структуру стратифицированного пограничного слоя можно в виде возмущения к решению уравнений Прандтля, пропорционального параметру  $\varepsilon$ . Эта идея реализована в работах [2–6]. Однако положение оказывается гораздо сложнее. Как известно, решения уравнений Прандтля автомодельны. Это является следствием существования только одного пространственного масштаба  $\nu/U_0$ . Наличие термодинамической неравновесности ( $\varepsilon \neq 0$ ) приводит к существованию неравновесных пространственных масштабов, явно зависящих от  $\varepsilon$ . Стало быть, в этом случае автомодельность пограничного слоя в общем случае должна отсутствовать, т. е. вырождение уравнений стратифицированного пограничного слоя (СПС) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  оказывается сингулярным. Следовательно, для получения уравнений СПС естественно предположить зависимость поля скорости от малого параметра  $\varepsilon$  и существование неравновесных пространственных масштабов, различных в продольном и поперечном направлениях.

Основную идею нового подхода к изучению пограничного слоя продемонстрируем на классической задаче обтекания пластины с  $T_s = \text{const}$  однородным потоком с  $U_0$  и  $T_0$ , в которой в свою очередь можно выделить два случая:

1) Свободная конвекция  $\Rightarrow U_0 = 0$  и  $T_s > T_0$  – нагреваемая пластина,  $T_s < T_0$  – охлаждаемая пластина.

2) Смешанная конвекция  $\Rightarrow U_0 \neq 0$  и  $T_s > T_0$  – нагреваемая пластина,  $T_s < T_0$  – охлаждаемая пластина.

Эти два случая являются существенно различными с точки зрения вида разложений. Сначала исследуем случай (2). Очевидно, что случай  $\varepsilon = 0$  соответствует развитию пограничного слоя в однородной жидкости (течение Блазиуса). Поэтому  $\vec{F}_b \neq 0$  можно принять как возмущение "основного потока", генерируемое стенкой с  $T_s \neq T_0$ , причем, рассматривая асимптотику  $\varepsilon \rightarrow 0$ , это возмущение является бесконечно малым. Поэтому представляет интерес изучить взаимодействие (нелинейное) "возмущения" с "основным течением" (хотя эти два понятия в достаточной степени условны).

### 2.1. Граничные условия (для пограничного слоя)

Как обычно, на стенке задаются условия прилипания для скорости и однородности потока вдали от стенки, которые имеют вид:

$$1) \vec{U} = 0 \quad y = 0,$$

$$2) \vec{U} \rightarrow (U_0) \quad y \rightarrow \infty.$$

Для температуры имеем:

$$3) T = T_s \quad y = 0,$$

$$4) T = T_0 \quad y \rightarrow \infty.$$

Кроме того, при  $y \rightarrow \infty$  справедлив интеграл Коши–Лагранжа, который необходим для определения давления. Очевидно, что при  $\varepsilon \neq 0$  в число определяющих параметров нужно включить ускорение свободного падения "g", что в свою очередь приводит к появлению пространственно-временных масштабов, зависящих от  $\varepsilon$ . Поэтому предположим существование неравновесных пространственно-временных масштабов, которые имеют вид:

$$L_x = \varepsilon^m L; \quad L_y = \varepsilon^n \delta; \quad T = \varepsilon^p T_0,$$

здесь  $L, \delta, T_0$  – величины с размерностями длины и времени, не зависящие от  $\varepsilon$ , причем, вообще говоря,  $L \neq \delta$ .

Введем безразмерные переменные по формулам:

$$\vec{U}^* = \vec{U}/U_0; \quad x^* = \varepsilon^{-m} x/L,$$

$$y^* = \varepsilon^{-n} y/\delta; \quad t^* = \varepsilon^{-p} t/T_0$$

и предположим, что разложение полей скорости и температуры имеют вид:

$$U^* = U/U_0 = U_0^* + \varepsilon^k U_1 + \dots$$

$$V^* = V/V_0 = V_0^* + \varepsilon^r V_1 + \dots \quad (12)$$

$$P_d = \varepsilon^{s_1} p_0 + \varepsilon^{s_2} p_1 + \dots$$

Здесь  $U_0$  – скорость набегающего потока;  $V_0 = \varepsilon^{n-m} \frac{\delta}{L} U_0$ ;  $m, p, n, k, r, s_1, s_2$  – некоторые константы, подлежащие определению.

Разложения (12) годятся и для свободной конвекции. В этом случае  $U_0 = \varepsilon^t U_0^*$ ,  $U_0^*$  – константа с размерностью скорости, независящая от  $\varepsilon$ . Далее будем рассматривать случай смешанной конвекции, так как целью работы является изучение нелинейного взаимодействия вязкого пограничного слоя с силами плавучести, рассматриваемыми как возмущения, генерируемые пластиной. Это означает, что  $L_x \neq L_y$ , т. е.  $m \neq n$ . При обычном регулярном разложении по  $\varepsilon$  сила плавучести дает добавку к ее “основному течению”. Это подход, аналогичный подходу теории устойчивости. Численные результаты показывают существование таких решений только для малых  $x$  без оценки области применимости приближения. Предлагаемый подход позволит, во-первых, оценить область применимости разложений и, во-вторых, исследовать нелинейное взаимодействие вязких сил и сил плавучести, что является примером восприимчивости пограничного слоя в общем виде.

**2.2. Нулевое приближение**

Подставляя разложения искомым полей скорости и температуры (12) в систему уравнений (8)–(11) для нулевого приближения, получаем:

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial U_0}{\partial t} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} = -\varepsilon^{s_1} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \quad (13)$$

$$+ \varepsilon^{m-2n} \frac{\nu L}{U_0 \delta^2} \left[ \varepsilon^{2n-2m} \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} \right],$$

$$\varepsilon^{2n-2m} \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 \left[ \frac{\partial V_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} \right] = \quad (14)$$

$$= -\varepsilon^{s_1} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \varepsilon^{1+n} \frac{g \delta}{U_0^2} \Theta_0 + \varepsilon^{-m} \frac{\nu}{U_0 L} \times$$

$$\times \left[ \varepsilon^{2n-2m} \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} \right],$$

$$U_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial y} = \varepsilon^{m-2n} \frac{x L}{U_0 \delta^2} \times \quad (15)$$

$$\times \left[ \varepsilon^{2n-2m} \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial y^2} \right].$$

В случае  $\varepsilon \rightarrow 0$  при условии наименьшего вырождения системы уравнений (13)–(15) (что аналогично учету эффектов вязкости и плавучести), нулевое приближение примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} &= -\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p_0}{\partial y} &= 0, \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \Theta_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial y} = \text{Pr}^{-1} \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial y^2}$$

с граничными условиями:

$$U_0 = V_0 = 0, \Theta_0 = \pm 1 \text{ при } y = 0,$$

$$U_0 \rightarrow 1, \Theta_0 \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \infty$$

и константы в этом случае будут определяться как  $n = -1/3$ ,  $m = -2/3$ , а пространственные масштабы связаны соотношением  $\delta^2 = \frac{\nu L}{U_0}$ .

Очевидно, что в данном случае нулевое приближение искомой задачи совпадает с уравнениями Прандтля, и задачи определения полей скорости, температуры и давления разделяются. Задача определения поля скорости формально совпадает с задачей Блазиуса, а температура определяется из решения третьего уравнения (16) с известным полем скорости. Таким образом, на начальном (порядка  $L_x$ ) участке течения поле скорости в стратифицированном пограничном слое является автомодельным и не зависящим от  $\varepsilon$ . Однако нулевое приближение поля давления уже неавтомодельно, как и первое приближение для поля скоростей, которое и определяют пространственно-временные масштабы задачи. Действительно, рассмотрим систему уравнений для первого приближения:

$$\varepsilon^{2/3} \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 \left[ \frac{\partial V_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} \right] = \quad (17)$$

$$= -\varepsilon^{s_2} \frac{\partial p_1}{\partial y} + \varepsilon^{2/3} \frac{g \delta}{U_0^2} \Theta_0 + \varepsilon^{2/3} \frac{\nu}{U_0 L} \left[ \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} \right].$$

Очевидно, что  $s_2 = 2/3$  и естественно предположить  $\frac{g \delta}{U_0^2} = \frac{\nu}{U_0 L}$ . С одновременным учетом силы

вязкости и плавучести из соотношения (17) получим

$$L = U_0(\nu/g^2)^{1/3}, \delta = (\nu^2/g)^{1/3}.$$

Тогда пространственно-временные масштабы задачи принимают вид:

$$\left\{ L_x = \varepsilon^{-2/3} U_0(\nu/g^2)^{1/3}, L_y = \varepsilon^{-1/3} U_0(\nu/g^2)^{1/3} V_3, \right. \\ \left. T = \varepsilon^{-2/3} (\nu/g^2)^{1/3} \right\}, \quad (18)$$

а уравнения для первого приближения будут:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial(U_0 \cdot U_1)}{\partial x} + V_0 \frac{\partial U_1}{\partial y} + V_1 \frac{\partial U_0}{\partial y} = \\ = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}, \\ -\alpha^{-1} \frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{\partial V_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} - \Theta_0 - \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0, \quad (19) \\ U_1 \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial y} + U_0 \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \Theta_1}{\partial y} = \\ = \text{Pr}^{-1} \left[ \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial x^2} \right].$$

### 2.3. Физический смысл пространственно-временных масштабов $L_x, L_y$

Подставляя решение Блазиуса для  $U_0, V_0$  в систему уравнений для первого приближения для давления, получаем:

$$-\frac{\partial p_1}{\partial y} = \alpha \left\{ \left[ \frac{1}{4} x^{-3/2} [f'_0 f - \eta f'^2 - 2f''] \right] - \Theta_0(\eta) \right\}, \quad (20)$$

где  $\alpha = \frac{(g\nu)^{1/3}}{U_0}$ ;  $\eta = y/\sqrt{x}$  – автомодельная переменная.

Из выражения (20) следует, что масштабы (18) определяют область автомодельности решения данной задачи, а разложения искомых полей имеют вид:

$$U = U_0(\eta) + \varepsilon^{2/3} U_1(x, y) + \dots$$

$$V = V_0(\eta) + \varepsilon^{2/3} V_1(x, y) + \dots$$

$$p = p_0 + \varepsilon^{2/3} p_1(x, y) + \dots \quad (21)$$

$$\Theta = \Theta_0 + \varepsilon^{2/3} \Theta_1(y) + \dots$$

Таким образом, на масштабах  $L_x, L_y$  происходит линейное взаимодействие возмущений, генерируемых плавучестью с пограничным слоем Блазиуса. Однако при  $x \rightarrow \infty$  первое приближение  $U_1$  может оказаться сиккулярным и точка  $x_c = L_c = \varepsilon^{-2/3} U_0(\nu/g^2)^{1/3} q(\text{Pr})$ , (здесь  $q(\text{Pr})$  – некоторая функция числа Прандтля, численное значение которой для конкретной среды может быть найдено из эксперимента) определяет масштаб, на котором появляется влияние силы плавучести, нарушающей автомодельность. Поэтому сценарий развития такого пограничного слоя может идти разными путями:

1) развитие двумерного пограничного слоя с другим разложением, отличным от выражения (12);

2) переход двумерного пограничного слоя в трехмерный в виде продольных вихрей.

Действительно, “внешнее” решение при  $\varepsilon = 0$  совпадает с решением Блазиуса и в двумерной постановке в нулевом приближении ничего нельзя получить, кроме решения Блазиуса, и только в трехмерной формулировке можно учесть эффекты плавучести в нулевом приближении – то есть наличие силы плавучести (или в данном случае возмущение основного течения) искажает автомодельность и приводит к трехмерности. Однако эти переходы зависят от граничных условий, которые и представляют в данном подходе возмущения. Нетрудно показать, что невозможность учесть эффекты плавучести в нулевом приближении в данной задаче связаны с двумя предположениями:

1) о двумерности течения, которая накладывает сильную связь вида  $\frac{U}{L} \sim \frac{V}{\delta}$ ;

2) об обычном граничном условии для температуры  $\Delta T = \text{const}$ . Вопрос о трехмерности уравнений пограничного слоя будет рассматриваться отдельно.

Существует еще одна возможность для разложений (12), чтобы учесть плавучесть в нулевом приближении. В выражении (12) определяем  $n = 1, m = -2$ , тогда уравнения для нулевого приближения принимают вид:

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} = -\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\nu L}{U_0 \delta^2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2},$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{g\delta}{U_0^2}\Theta_0 &= 0, \\ \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$U_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial y} = \text{Pr}^{-1} \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial y^2},$$

и естественно предположить, что

$$\delta^2 = \nu L / U_0, \quad \frac{g\delta}{U_0^2} = 1.$$

Тогда пространственно-временные масштабы данного разложения будут:

$$\left\{ L_x = \varepsilon^{-2} \frac{U_0^5}{g^2 \nu}; L_y = \varepsilon^{-1} \frac{U_0^2}{g}; T = \varepsilon^{-2} \frac{U_0^4}{g^2 \nu} \right\} \quad (23)$$

и решение системы уравнений (22) должно сражаться с решением Блазиуса при фиксированных значениях  $x, y$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Очевидно, что на масштабах  $L_x, L_y$  в общем случае автомодельность отсутствует и возможна только для определенных граничных условий.

Легко понять физический смысл полученных масштабов (23), рассматривая мощности источников завихренности в стратифицированном пограничном слое. Безразмерные мощности бароклинного и вязкого источников завихренности имеют вид:

$$\Omega = \frac{\varepsilon g \delta}{U_0^2}, \quad \Omega_v = \frac{\nu L}{\delta^2 U_0}.$$

Здесь  $\delta$  и  $L$  – толщина и длина пограничного слоя соответственно.

Очевидно, что в пограничном слое мощность вязкого источника завихренности остается постоянной, а бароклинного – растет по длине пластины как  $L^{1/2}$ . И, следовательно, пространственный масштаб  $L_x$  представляет собой продольный масштаб, на котором мощности вязкого и бароклинного источников завихренности одного порядка, а масштаб  $L_y$  – соответствующую толщину пограничного слоя. Из анализа отношения

$$\xi = \frac{\Omega}{\Omega_v} = \left(\frac{U_{fc}}{U_0}\right)^3 \cdot \text{Re}_L^{1/2},$$

где  $U_{fc} = \varepsilon^{1/3} (g\nu)^{1/3}$ , можно сделать два важных вывода:

- 1) приближение пограничного слоя в рассматриваемом случае требует учета плавучести;
- 2) условие вырождения плавучести для существования решения Блазиуса имеет вид:  
 $\varepsilon \text{Re}_L^{1/2} \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $\text{Re}_L \rightarrow \infty$ .

### 3. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ. УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ СКОРОСТИ И ТЕМПЕРАТУРЫ

Рассмотрим возможные автомодельные решения системы уравнений (22). Нетрудно показать, что она допускает следующую однопараметрическую группу преобразований:

$$\Psi_0 = x^{-\frac{1}{l}} f(y \cdot x^{-1-\frac{1}{l}}),$$

$$\Theta_0 = x^{-\frac{3l+5}{l}} \Theta_0^*(y \cdot x^{-1-\frac{1}{l}}).$$

Здесь  $\psi_0$  – нулевое приближение для функции тока;  $\xi = y \cdot x^{-1-\frac{1}{l}}$  – автомодельная переменная;  $l$  – произвольное число. Уравнения для  $f(\xi)u\Theta_0^*(\xi)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} f^{(4)} + \left(2 + \frac{3}{l}\right) f^{(2)} f^{(1)} - \frac{1}{l} f''' \cdot f &= \\ = \pm \left[ \frac{3l+5}{l} \Theta_0^*(\xi) + \left(1 + \frac{1}{l}\right) \xi \Theta' \right], \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{1}{l} f \cdot \Theta_0' - \frac{3l+5}{l} f \Theta_0 = \text{Pr}^{-1} \Theta_0^*. \quad (25)$$

Граничные условия

$$U_0(\xi \rightarrow \infty) = x^{-1-\frac{2}{l}}, \quad (26)$$

$$\Theta_0^*(\xi \rightarrow 0) = x^{-\frac{3l+5}{l}}, \quad (27)$$

которые можно рассматривать как возмущения граничных условий в соответствующей задаче Блазиуса. Очевидно, что решения уравнений (24), (25) в общем случае не есть решения Блазиуса, а относятся к новому классу решений ламинарного пограничного слоя с учетом нелинейного взаимодействия возмущений поля скорости и плавучести, определяемого условием (26), (27).

Таким образом, существование автомодельности решения при наличии сил плавучести требует согласования граничных условий для полей скорости и температуры. В общем случае автомодельность отсутствует, и развитие таких пограничных слоев может происходить по различным сценариям.

#### 4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В СЛУЧАЕ ОДНОРОДНОГО НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА

Рассмотрим автомодельное решение (24), (25) в случае однородного набегающего потока, т. е. при  $U_0(\xi \rightarrow \infty) = 1$ . Условие согласования для температуры имеет вид

$$\Theta_0(\xi \rightarrow \infty) = x^{-1/2},$$

и система уравнений для нулевого приближения запишется следующим образом:

$$2f^{(3)} + ff^{(2)} = \pm \xi \Theta_0^*, \quad (28)$$

$$\Theta_0^* = e^{-1/2 \text{Pr} \int_0^\xi f(\xi) d\xi}. \quad (29)$$

Из уравнения (29) следует, что тепловой поток имеет особенность в окрестности точки  $x = 0$ . Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial y} \Big|_{y=0} = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

и  $Q = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\partial \Theta}{\partial x} dx = Q_0(\text{Pr})$  – конечный, за-

висящий от числа Прандтля, т.е. система уравнений (24)–(25) с соответствующими граничными условиями описывает следующую задачу. В окрестности точки  $x = 0$  генерируется поток энергии  $Q_0(\text{Pr})$ , создающий силу плавучести  $\Theta_0$ , которая совместно с вязкой силой формирует новый пограничный слой. Приведены результаты численного решения задачи при различных числах Прандтля.

На рис. 1 изображена зависимость  $Q_1(\text{Pr})$  – мощности точечного источника энергии, помещенного в открытой передней кромке от числа Прандтля  $\text{Pr}$ . На рис. 2 представлены результаты численного решения краевой задачи (27), (28) – распределения продольной скорости и температуры в пограничном слое в однородной жидкости (кривые  $a$  и  $b$  соответственно) и аналогичные распределения в стратифицированном пограничном слое для случая охлаждаемой пластины (кривые  $c$  и  $d$ ) для чисел  $\text{Pr}=0.71$  и  $7.6$ .

Результаты наглядно демонстрируют существенное изменение структуры пограничного слоя под действием сил плавучести. Особенно сильным это влияние оказывается вблизи пластины (при малых  $\eta$ ), где величины продольных скоростей в

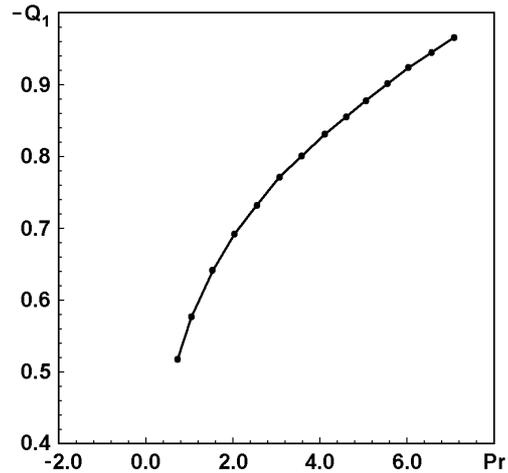


Рис. 1. Зависимость  $Q_1$  от числа Прандтля ( $\text{Pr}$ )

стратифицированном пограничном слое и пограничный слой в однородной жидкости отличаются в несколько раз. То же самое относится и к распределению температур.

На рис. 3 представлены результаты расчетов продольной скорости в стратифицированном пограничном слое над охлаждаемой пластиной при различных числах Прандтля (кривая  $B1$  соответствует решению Блазиуса). Уменьшение числа Прандтля приводит к появлению локального максимума в распределении продольной скорости. Локальный максимум существует при  $\text{Pr} < 2$ , и при  $\text{Pr}=0.71$  скорость в СПС превосходит скорость внешнего потока примерно в 1.5 раза. Максимум продольной скорости достигается при  $\eta \approx 2$  для всех рассчитанных значений чисел Прандтля. Еще больших отличий в структуре стратифицированного пограничного слоя от структуры пограничного слоя в однородной жидкости следует ожидать в неавтомодельном случае.

Таким образом, наличие непотенциальных объемных сил плавучести приводит к существованию пространственных масштабов, зависящих от величины этих сил (или, что то же, от величины мощности объемных источников завихренности). Это обстоятельство не допускает в общем случае существование автомодельного пограничного слоя и принципиально изменяет структуру СПС по сравнению со структурой ПС в однородной жидкости.

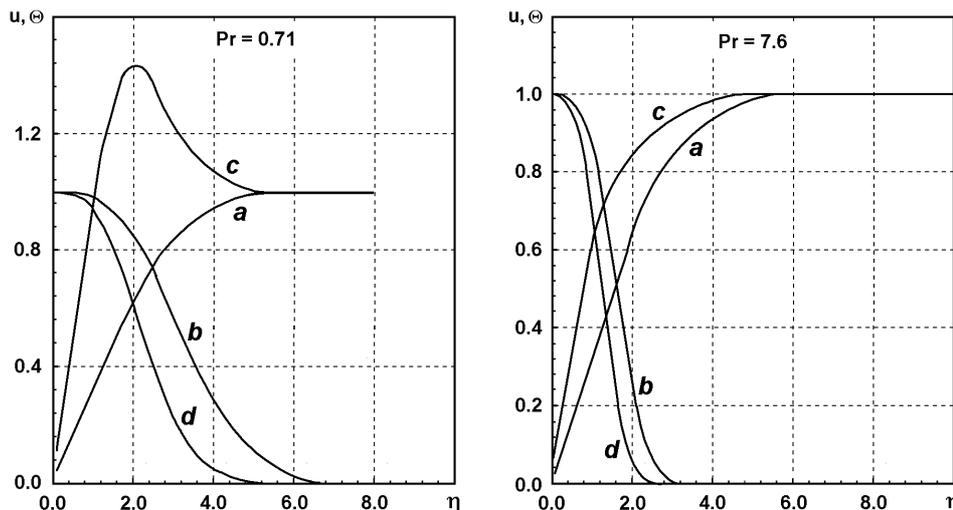


Рис. 2. Распределение продольной скорости и температуры в пограничном слое при различных числах Прандтля

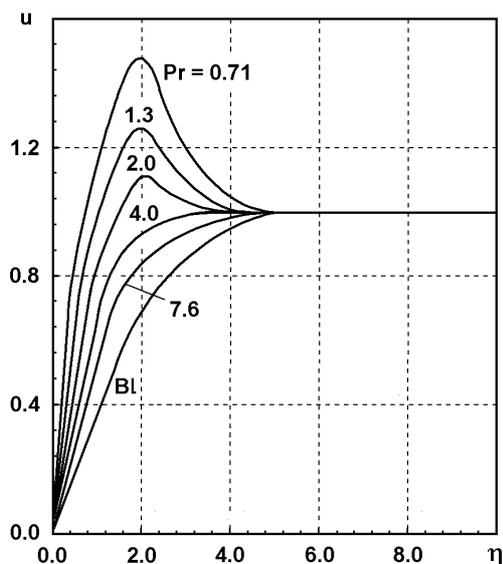


Рис. 3. Распределение продольной скорости в пограничном слое при различных числах Прандтля

### 5. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРЕХМЕРНОГО СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Предыдущие результаты показывают, что гене-

рация завихренности в объеме среды есть следствие перехода ее потенциальной энергии в кинетическую. Этот переход может осуществляться посредством различных форм вихревого движения. Распространенной формой вихревых движений в пограничных слоях с объемными силами являются трехмерные движения в виде продольных вихрей. Причиной их возникновения и оказываются силы плавучести. Поэтому естественно предположить, что пространственно-временные характеристики генерируемых вихревых структур и само решение явным образом зависит от малого параметра  $\varepsilon$ . То есть предполагается, что решение в области трехмерного пограничного слоя имеет вид

$$U^* = U/U_0 = U_0^*(t^*, x^*, y^*, z^*) + \dots,$$

$$V^* = V/V_0 = \varepsilon^q V_0^*(t^*, x^*, \dots) + \dots,$$

$$W^* = W/W_0 = \varepsilon^q W_0^*(t^*, x^*, \dots) + \dots, \quad (30)$$

$$\Theta = \Theta_0(t^*, x^*, \dots) + \dots,$$

$$P_d^* = P_d/\rho_0 U_0^2 = \varepsilon^r P_{d0}^* + \dots$$

Здесь по определению  $U_0^*$ ,  $V_0^*$ ,  $W_0^*$ ,  $P_{d0}^*$ ,  $\Theta_0$  – величины порядка единицы, а безразмерные переменные определены формулами:

$$x^* = \varepsilon^{-m} x / l_{0x}, \quad y^* = \varepsilon^{-n} y / l_{0y},$$

$$z^* = \varepsilon^{-l} z / l_{0z}, \quad t^* = \varepsilon^{-k} \frac{t \cdot U_0}{l_{0x}},$$

$l_{0x}, l_{0y}, l_{0z}, V_0, W_0$  – константи с размерностями соответственно длины и скорости, значения которых определены ниже; показатели степеней малого параметра  $\varepsilon$  – произвольные числа, подлежащие определению. Подставляя разложения (30) в систему уравнений (1)–(5) и рассматривая предел  $\varepsilon \rightarrow 0$ , можно получить:

$$\begin{aligned} m &= -2/3, \quad n = -1/3, \quad q = 1/3, \\ \rho &= 1/3, \quad l = -1/3, \quad k = -2/3, \quad r = 2/3, \\ V_0 &= W_0 = (g\nu)^{1/3}, \quad l_{0x} = U_0(\nu/g^2)^{1/3}, \\ l_{0y} &= l_{0z} = (\nu^2/g)^{1/3}. \end{aligned}$$

Набор показателей степеней малого параметра  $\varepsilon$  и определенные масштабы  $V_0, W_0, l_{0x}, l_{0y}, l_{0z}$  обеспечивают в уравнениях трехмерного СПС одновременный учет сил инерции вязкости и плавучести.

Система уравнений нестационарного трехмерного стратифицированного пограничного слоя для нулевого по  $\varepsilon$  приближения принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} + W_0 \frac{\partial U_0}{\partial z} &= \\ &= \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial V_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} + W_0 \frac{\partial V_0}{\partial z} &= \\ &= -\frac{\partial p_{d0}}{\partial y} \pm \Theta_0 + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial W_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial W_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial W_0}{\partial y} + W_0 \frac{\partial W_0}{\partial z} &= \quad (31) \\ &= -\frac{\partial p_{d0}}{\partial z} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} + \frac{\partial W_0}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial y} + W_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} &= \\ &= \text{Pr}^{-1} \left( \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

В системе уравнений (31) звездочки у безразмерных величин для удобства опущены, знак “+” в силе плавучести во втором уравнении (30) соответствует случаю нагреваемой поверхности, а знак “-” – охлаждаемой поверхности. С учетом соотношений (30) пространственно-временные масштабы трехмерного стратифицированного пограничного слоя имеют вид:

$$\begin{aligned} \left\{ L_{xo} = \varepsilon^{-2/3} (\nu/g^2)^{1/3} \cdot U_0, \right. \\ L_{yo} = L_{zo} = L_o = \varepsilon^{-1/3} (\nu^2/g)^{1/3}, \quad (32) \\ \left. T_0 = \varepsilon^{-2/3} (\nu/g^2)^{1/3} \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку возникновение этих масштабов связано с наличием силы плавучести, являющейся объемным источником завихренности, то полученные масштабы допускают простую физическую интерпретацию:  $\{L_{xo}, L_{yo}, L_{zo}\}$  представляют собой характерные пространственные масштабы в продольном и нормальном направлениях трехмерных вихревых структур, генерируемых в пограничном слое в результате взаимодействия сил вязкости и плавучести. Другими словами, гидротермодинамическую структуру трехмерного стратифицированного пограничного слоя формирует нелинейное взаимодействие двух источников завихренности – вязкого и объемного источников, связанных с силой плавучести. Из соотношений (32) следует, что вихревые структуры трехмерного стратифицированного пограничного слоя являются вытянутыми по потоку и отношение их поперечного и продольного масштабов имеет порядок  $\varepsilon^{1/3}$ . Оценка соответствующих скоростей в стратифицированном пограничном слое имеет вид:

$$U_0 \sim \theta(1), \quad V_0 \sim W_0 \sim \varepsilon^{1/3}. \quad (33)$$

Нетрудно показать, что поправки по  $\varepsilon$  к нулевому приближению решений уравнений трехмерного стратифицированного пограничного слоя для скоростей и температуры – порядка  $\varepsilon^{2/3}$ , давления – порядка  $\varepsilon^{4/3}$ .

Для более детального выяснения физического смысла полученных масштабов рассмотрим результаты экспериментальных исследований трехмерной структуры пограничного слоя над нагреваемой поверхностью. По своему физическому

смыслу полученный масштаб  $L_0$  с точностью до функции от числа Прандтля определяет максимальный размер вихря, возникающего под действием силы плавучести, т. е. между волновым числом  $\lambda_z$  продольного вихря и масштабом  $L_0$  должна существовать универсальная зависимость

$$\lambda_z = f_0(\text{Pr}) \cdot L_0 \sim \beta^{-1/3} (T_s - T_0)^{-1/3} \nu^{2/3} g^{-1/3}, \quad (34)$$

где  $f_0(\text{Pr})$  – универсальная функция числа Прандтля. Результаты экспериментов полностью подтверждают соотношение (34).

Используя выражение для поперечного масштаба  $L_0$ , можно получить длину существования двумерного стратифицированного пограничного слоя –  $L_2$ . Действительно, толщина двумерного стратифицированного пограничного слоя  $\delta_2$  растет с длиной  $L_2$  по закону  $\delta_2 \sim L_2 \text{Re}_{L_2}^{-1/2}$ . Из приведенных выше рассуждений следует, что толщина двумерного стратифицированного пограничного слоя не может превосходить масштаб  $L_0$ . Следовательно, его пространственная протяженность в продольном направлении (или точка возникновения трехмерных вихревых структур) в зависимости от определяющих параметров задачи может быть оценена из соотношения:

$$L_2 \text{Re}_{L_2}^{-1/2} \sim L_0,$$

откуда

$$L_2 = f_1(\text{Pr}) L_0 \text{Re}_{L_0} \sim U_0 \beta^{-2/3} \times \\ \times (T_s - T_0)^{-2/3} g^{-2/3} \nu^{1/3},$$

где  $f_1(\text{Pr})$  – универсальная функция числа Прандтля, значения которой могут быть получены из эксперимента.

## ВЫВОДЫ

Разработан новый подход к изучению развития течений с силами плавучести на основе методов сращиваемых асимптотических разложений. По-

казано, что существование силы плавучести приводит к возникновению объемного источника завихренности, мощность которого пропорциональна силе плавучести. Нелинейное взаимодействие между объемным источником завихренности термодинамического происхождения и поверхностным источником завихренности, вследствие условий прилипания, определяет новый класс пространственно-временных масштабов, явным образом зависящих от силы плавучести.

На основе разработанного подхода проведена классификация уравнений пограничного слоя над нагреваемой/охлаждаемой плоской поверхностью в зависимости от вида граничных условий для температуры и вида распределения скорости набегающего потока. Показано существование решений, существенно отличных от решений уравнений Прандтля для однородной жидкости, и многообразие возможных сценариев развития вихревой структуры пограничных слоев с учетом силы плавучести.

1. *Nikiforovich E., Maderich L.* Asymptotical analysis of Navier.–Stokes equations in problem free convection // *Sov Phys. Dokl.*– 1989.– v.34, N9.– P. 767–769.
2. *Hieber* Mixed convection above a heated horizontal surface // *J. Heat Mass Transfer.*– 1973.– v.16.– P. 76.
3. *Wickern G.* Mixed convection from an arbitrarily inclined semi-infinite flat plate - 1. The influence of the inclination angle // *J. heat Mass Transfer.*– 1991.– v.34.– P. 1395–1945.
4. *Wickern G.* Mixed convection from an arbitrarily inclined semi-infinite flat plate - 2. The influence of the inclination angle // *J. heat Mass Transfer.*– 1991.– v. 34.– P. 1947–1957.
5. *Sparrow E.M., Minkowycz W.J.* Buoyancy effects on horizontal boundary layer flow and heat transfer // *Inter. Journal of Heat and Mass Transfer.*– 1962.– v. 5.– P. 505–511.
6. *Schneider* A similarity solution for combined forced and free convection flow over a horizontal plate // *Inter. Journal of Heat and Mass Transfer.*– 1979.– v. 22.– P. 1401–1406.
7. *Rene A., Kahawita, Robert N. Meroney* Longitudinal vortex instabilities in laminar boundary layers over curved heated surfaces // *Physics of Fluids.*– 1974.– v.17, N.9.– P. 1661–1666.
8. *Ray-Shing, Wu and C. Cheng* Thermal instability of Blasius flow along horizontal plates // *Inter. Journal of Heat and Mass Transfer.*– 1976.– v.19.– P. 907–913.