

УДК 581.1:631.4

# О МЕХАНИЧЕСКОЙ СУФФОЗИИ ГРУНТОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТОКА ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

В. Л. ПОЛЯКОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 20.06.2006

Получено эффективное аналитическое решение осесимметричной задачи внешней суффозии при изменяющейся по линейному закону интенсивности стока  $q(t)$ . Отдельно рассмотрены случаи убывания и нарастания притока суспензии к дрене. При уменьшении  $q$  суффозионный процесс сопровождается кольматационным, что может приводить к задержке в области деформаций существенного количества неструктурных частиц. Построены близкие к точным зависимости для концентрации осажденных и взвешенных частиц. Обоснована частичная линеаризация исходного уравнения фильтрационных деформаций. Выполнен обстоятельный анализ физико-механических характеристик при изменении  $q$  и начального содержания однородной суффозионной компоненты в широких пределах.

Одержано ефективний аналітичний розв'язок вісесиметричної задачі зовнішньої суффозії при інтенсивності стоку  $q(t)$ , що змінюється згідно лінійного закону. Окремо розглянуті випадки зниження і зростання притоку суспензії до дрени. При зменшенні  $q$  суффозійний процес супроводжується кольматацийним, що може призвести до затримки в області деформацій суттєвої кількості неструктурних часток. Побудовані близькі до точних залежності для концентрації іммобілізованих і завислих часток. Обґрунтована частинна лінеаризація вихідного рівняння фільтраційних деформацій. Виконаний ґрунтовний аналіз фізико-механічних характеристик при зміні  $q$  і початкового вмісту однорідної суффозійної компоненти у широких межах.

An effective analytical solution is found of the axisymmetric problem of external mechanical piping at a sink intensity  $q(t)$  which varies according to a linear law. The cases of the above intensity decrease and increase are considered separately. When lowering  $q$ , the piping process is accompanied by the colmatage one what can cause a delay of rather substantial amount of non-structural particles within the deformation domain. Almost exact dependences are constructed for the concentration of the deposited particles and suspended matter. A partial linearization of the initial equation of filtration deformation is ground. Thorough analysis is performed of physico-chemical characteristics when varying  $q$  and initial content of uniform non-structural component within a wide range.

## ВВЕДЕНИЕ

Расход дренажей, широко используемых в гидротехнической и мелиоративной практике для регулирования водного режима грунтов, редко остается неизменным. Характерным примером может служить осушительный дренаж, действующий, как правило, в нестабильных водно-физических условиях [1–3]. Уже на начальной стадии осушения в периоды снеготаяния или выпадения обильных осадков он обеспечивает быстрый отвод весьма значительного объема избыточной влаги, главным образом, из придренной зоны. Именно на этой стадии дренажный сток не только достигает максимума, но часто успевает и заметно сократиться. Затем, как правило, приток к дренам продолжает ослабевать вплоть до полного прекращения. Характер спада приточности поровой воды к дренам бывает различным и зависит от многих факторов (параметров дренажа, фильтрационных свойств грунта, водного режима близлежащих водных объектов и пр.). Однако чаще всего его удается описать элементарными функциями. Наибольшего же внимания заслуживают

линейные аппроксимации в силу их простоты и в целом хорошего соответствия опытным данным по дренажному стоку [4, 5].

Конечно, выбор зависимости дренажного расхода от времени имеет большое значение и с физической, и с формальной точки зрения. Действительно, уравнение фильтрационных деформаций [6, 7], описывающее обе стороны массообмена между жидкой (вода и взвесь) и твердой (пористый материал) фазами среды, а также перенос неструктурных частиц, удается решить аналитически только в исключительных случаях. В то же время, реализация задач суффозии с помощью разного рода приближенных приемов или численных методов способна приводить к чрезмерным неточностям в расчетах, осложнить и без того непростой из-за узости интервалов изменения искомых характеристик количественный анализ. Ниже для детального изучения особенностей протекания процесса внешней суффозии (с выносом мелких частиц грунта) выбрана как раз показательная ситуация с равномерным уменьшением удельной (на единицу длины) интенсивности  $q$  протяженного стока цилиндрической формы. А поскольку далее исследуются физико-механические процессы в не-

посредственной близости от упомянутого стока, то им свойственна осевая симметрия. Состав суффозионной компоненты грунта (распределена в недеформированном грунте равномерно) считается однородным, что дает основание характеризовать способность неструктурных частиц к мобилизации (иммобилизации) под действием гидродинамической силы единственным значением критической скорости  $u_k$  (градиента напора) [8–11].

Основная цель данной работы заключается в разносторонней оценке влияния изменения интенсивности  $q$  на конечные результаты фильтрационных деформаций, выражаемые суммарным объемом вынесенных из грунта частиц и распределением частиц, сохранившихся в области деформации. Факт осаждения в ней взвешенного вещества свидетельствует о том, что суффозионный процесс сопровождается кольматационным (имеет место только при уменьшении  $q$ ) [12–14]. Для полноты анализировались аналитическими методами оба случая линейного изменения  $q$  (убывание, нарастание), деформационный процесс в своем развитии и его последствия для водно-физического состояния среды. Следует подчеркнуть, что применение ранее полученных точных решений задач внешней суффозии при  $q = \text{const}$  [15, 16] для несвязных пористых структур с неустойчивым водным режимом чревато переоценкой или недооценкой результатов деформирования грунта фильтрационным потоком.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ВНЕШНЕЙ СУФФОЗИИ

Теоретическое исследование механической суффозии (кольматации), инициированной длинным цилиндрическим стоком удельной интенсивности  $q(t)$ , выполняется на базе уравнения

$$\frac{\partial n_c}{\partial t} - \left[ \frac{q}{2\pi(1-m_s)r} - u_k + \frac{2u_k}{1-m_s}n_c \right] \times \times \frac{\partial n_c}{\partial r} = \frac{2}{r} \left( \frac{n_c^2}{1-m_s} - n_c \right), \quad (1)$$

где  $n_c$ ,  $m_s$  – объемные концентрации структурных и взвешенных (неструктурных) частиц. Уравнение (1) выведено из уравнения фильтрационных деформаций [7] путем перехода в нем от действительной средней в порах скорости течения воды  $u$  к концентрации  $n_c$ . Для  $q$  принимается

$$q = q_0 + at, \quad (2)$$

где  $q_0$  представляет исходную (максимальную или минимальную) интенсивность стока, коэффициент  $a$  характеризует быстроту ее изменения. Для

повышения общности анализа вводятся относительные переменные  $\bar{n}_c = n_c/m_0$ ,  $\bar{t} = u_k t/R_{i0}$ ,  $\bar{r} = r/R_{i0}$  и  $\bar{q} = q/q_0$ . Здесь  $m_0$  – концентрация суффозионных частиц в недеформированном грунте, а в качестве линейного масштаба  $R_{i0}$  выбрано начальное значение радиуса границы между характерными зонами [7]:

$$R_{i0} = \frac{q}{2\pi u_k(1-m_s)}.$$

Тогда уравнение (1) преобразуется к более простому виду

$$\frac{\partial \bar{n}_c}{\partial \bar{t}} - \left( \frac{\bar{q}}{\bar{r}} - 1 + 2\beta \bar{n}_c \right) \frac{\partial \bar{n}_c}{\partial \bar{r}} = \frac{2}{\bar{r}} (\beta \bar{n}_c^2 - n_c), \quad (3)$$

а выражение (2) приобретает вид

$$\bar{q} = 1 + a\bar{t}, \quad (4)$$

где  $\beta = m_0/(1-m_s)$ ;  $\bar{a} = a/(2\pi u_k^2(1-m_s))$ . Уравнение (3) дополняется при  $a < 0$  начальным условием

$$\bar{t} = 0, \quad \bar{n}_c = 1, \quad (5)$$

а при  $a > 0$  – граничным условием на внешней границе области деформаций

$$\bar{r} = \bar{R}_0(t), \quad \bar{n}_c = 1. \quad (6)$$

Условие (6) позволяет определить динамику подавляющего большинства взвешенных частиц, сосредоточенных в расширяющейся зоне полной деформации. Условия (5) и (6) вместе с уравнением (3) составляют задачи Коши. Применение метода характеристик, наиболее эффективного для аналитического решения подобных задач, дает возможность перейти от уравнений (3), (5) или (6) к эквивалентной задаче, основывающейся на характеристической системе

$$\frac{d\bar{r}}{d\bar{t}} = -\frac{\bar{q}(\bar{t})}{\bar{r}} + 1 - 2\beta \bar{n}_c, \quad (7)$$

$$\frac{d\bar{n}_c}{d\bar{t}} = \frac{2}{\bar{r}} (\beta \bar{n}_c^2 - n_c). \quad (8)$$

Получить точное решение уравнения (7) для любых форм  $\bar{q}(\bar{t})$ , представляющих практический интерес, не удастся. Однако, если  $\bar{q}$  изменяется согласно (4), то в такого рода решении и нет необходимости. Установлено, что задачи (3)–(6) успешно решаются с помощью частичной линеаризации уравнения (3). Для этого концентрация  $\bar{n}_c$  во втором слагаемом (3) заменяется ее некоторым постоянным (средним) значением  $\bar{n}_{cp}$ . Правомочность использования такого приема в задачах

суффозии обсуждается в четвертом разделе. В результате вид уравнения (8) сохраняется, а уравнение (7) имеет вид

$$\frac{d\bar{r}}{d\bar{t}} = -\frac{1 + \bar{a}\bar{t}}{\bar{r}} + w, \quad (9)$$

где  $w = 1 - \beta\bar{n}_{cp}$ . Система (8), (9) и является базовой для последующих теоретических исследований.

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРИ УБЫВАЮЩЕЙ ИНТЕНСИВНОСТИ СТОКА ( $a < 0$ )

Случай уменьшения интенсивности стока ( $a < 0$ ) анализируется в первую очередь как наиболее интересный для практики. При этом размеры области деформаций не меняются (относительный радиус ее внешней границы  $\bar{R}_0 = (1 - \beta)^{-1}$ ). Для построения надежных расчетных зависимостей сначала рассматриваются фильтрационные деформации в зоне полной деформации или массопереноса (содержит только подвижные неструктурные частицы), а затем, опираясь на уже полученные результаты, анализируется формирование зоны частичной деформации или осаждения (включает суффозионные частицы исключительно в форме осадка). Уточненные названия обеих зон области деформации (массопереноса, осаждения) более точно отвечают специфике деформаций, протекающих при  $\bar{a} < 0$ . Ввиду ограниченности периода действия стока для полной деформации грунта, то есть выноса всех мелких частиц, даже в непосредственной близости от него не хватает времени. Линеаризация уравнения (3) способствует получению практически точного решения для обеих зон.

### 2.1. Зона массопереноса

Формулировка математической задачи внешней суффозии для зоны массопереноса включает систему уравнений (8), (9) и условие (5). При выборе единственной интегральной кривой, соответствующей поставленной задаче, прежде всего полагается, что она проходит через точку с координатами  $\xi, \eta, \zeta$ . Затем эти координаты определяются в соответствии с условием задачи. В данном случае, согласно условию (5),  $\xi = 1, \zeta = 1$ , а  $\eta$  становится параметром, так что искомое решение приобретает параметрическую форму. Чтобы его построить, осуществляется переход к переменным  $\bar{t}, z$  с помощью замен  $z = \bar{r}/\bar{t}, \bar{t} = 1 + \bar{a}\bar{t}$ . Тогда уравнение (9) принимает следующий вид:

$$\bar{a}\bar{t}\frac{dz}{d\bar{t}} = -\bar{a}z + \omega - \frac{1}{z}. \quad (10)$$

Так как дискриминант  $\Delta = \omega^2 - 4\bar{a}$  при  $\bar{a} < 0$  обязательно положителен, то решение (10) имеет единую форму:

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{b\eta^2 - \omega\eta + 1}{bz^2 - \omega z + 1}} \times \quad (11)$$

$$\times \left( \frac{2\bar{a}z - \omega + \sqrt{\Delta}}{-2\bar{a}z + \omega + \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{-2\bar{a}\eta + \omega + \sqrt{\Delta}}{2\bar{a}\eta - \omega + \sqrt{\Delta}} \right)^{\frac{\omega}{2\sqrt{\Delta}}}$$

Второе необходимое соотношение находится из уравнения

$$\frac{d\bar{n}_c}{dz} = \frac{\bar{n}_c - \beta\bar{n}_c^2}{\bar{a}z^2 - \omega z + 1}, \quad (12)$$

которое выводится путем деления (8) на (10). Непосредственно из (12) находится выражение

$$\ln \left( \frac{1 - \beta\bar{n}_c}{\bar{n}_c} \cdot \frac{\zeta}{1 - \beta\zeta} \right) = \quad (13)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left( \frac{2\bar{a}z - \omega - \sqrt{\Delta}}{2\bar{a}z - \omega + \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{2\bar{a}\eta - \omega + \sqrt{\Delta}}{2\bar{a}\eta - \omega - \sqrt{\Delta}} \right),$$

из которого следует исключить  $\zeta$  и, наконец, оно может быть разрешено относительно одной из переменных. Для удобства вычислений предпочтительнее сделать это относительно параметра  $\eta$ . Тогда

$$\eta = \frac{1}{2\bar{a}} \frac{\omega + \sqrt{\Delta} + (\omega - \sqrt{\Delta}) \cdot f(z) \cdot g(\bar{n}_c)}{1 + f(z) \cdot g(\bar{n}_c)}, \quad (14)$$

где

$$f(z) = \frac{-2\bar{a}z + \omega + \sqrt{\Delta}}{2\bar{a}z - \omega + \sqrt{\Delta}}, \quad g(\bar{n}_c) = \left( \frac{1 - \beta\bar{n}_c}{\bar{n}_c - \beta\bar{n}_c} \right)^{\sqrt{\Delta}}$$

Подстановка соотношений (14) в (11) дает возможность искомую связь между переменными задачи представить в форме  $\bar{t} = \bar{t}(z, \bar{n}_c)$  или, имея ввиду  $z = \bar{r}/\bar{t}$ , в ей эквивалентной:  $\bar{t} = \bar{t}(\bar{r}, \bar{n}_c)$ . Благодаря последней форме проще проследить за изменением выходной концентрации взвеси  $\bar{n}_{c0}$  во времени – достаточно воспользоваться зависимостью  $\bar{t} = \bar{t}(\bar{r}_0, \bar{n}_{c0})$ . Также на ее основе несложно рассчитывать поток частиц  $I_0(\bar{t})$ , поступающих в сток:

$$I_0 = \bar{n}_{c0}(\bar{u}_0 - 1) = \bar{n}_{c0}(\beta\bar{n}_{c0} + \frac{\bar{t}}{\bar{r}_0} - 1), \quad (15)$$

где  $\bar{u}_0$  – скорость  $\bar{u}$  на входе в сток.

**2.2. Зона осаждения**

Особый статус зоны осаждения связан с тем, что именно в ней оказываются, в конце концов, все иммобилизованные частицы, а при уменьшении интенсивности  $q$  до 0 она охватывает всю область деформаций. Поэтому главная практическая ценность выведенных в данной работе зависимостей заключается в возможности надежно вычислять с их помощью искомые характеристики в указанной зоне (по сути, в области деформаций). Снижение  $q$  инициирует кольматационный процесс, который локализован на условной (критической) поверхности. Ее положение (радиус  $\bar{r}_*$ ) находится на базе равенства  $\bar{u}(\bar{r}_*) = 1$ . Таким образом, теоретический анализ процесса осаждения взвеси фактически сводится к установлению аналитическими методами динамики критической поверхности. В дальнейшем для ее обозначения будет использоваться термин “фронт осаждения”, более точно отражающий сущность явления кольматажа в рамках принятой модели. Расчет распределения иммобилизованных частиц в пределах зоны осаждения эквивалентен установлению концентрации осадка на указанном фронте  $\bar{n}_*$  и закономерности его перемещения  $\bar{r}_* = \bar{r}_*(\tilde{t})$ . Естественно, что внутри данной зоны  $\bar{n}_*$  не меняется, а присутствие в исходных уравнениях  $\tilde{t}$  требуется для описания расширения зоны.

Поскольку фронт осаждения является одной из границ зоны массопереноса, то для определения его положения в любой момент времени, прежде всего следует использовать полученные выше зависимости, описывающие динамику суффозионных частиц вплоть до границы  $\bar{r} = \bar{r}_*$ . Для нахождения же самого значения  $\bar{r}_*$  необходимо привлечь дополнительное соотношение между характеристиками задачи на фронте

$$\tilde{t} = \bar{r}_*(1 - \beta\bar{n}_*). \tag{16}$$

Соотношение (16) представляет собой условие сохранения расхода двухфазного течения на этом фронте. Итак, распределение иммобилизованных частиц  $\bar{n}_*(\bar{r})$  в промежуточный момент времени ( $\tilde{t}_e > \tilde{t} > 0$ ) определяется с помощью уравнений (11), (14), (16). Здесь аргумент  $\bar{r}$  пробегает значения от  $(1 - \beta)^{-1/2}$  до  $\bar{r}_*$  на текущий момент времени. Момент окончания деформаций  $\tilde{t}_e$  (или  $t_e$ ) наступает до прекращения работы стока. Вычисляется  $\tilde{t}_e$  по формуле

$$\tilde{t}_e = \bar{r}_0(1 - \beta\bar{n}_{*0}), \tag{17}$$

где  $\bar{n}_{*0}$  – концентрация осадка в выходном сечении потока (при  $\tilde{t} \leq \tilde{t}_e$ ). После подстановки в (11), (16)

$(1 - \beta)^{-1}$  вместо  $z$  профили концентрации осадка удается описать более удобной для количественного анализа зависимостью

$$\bar{r} = \frac{1}{1 - \beta\bar{n}_*} \sqrt{\frac{\bar{a}\eta^2(\bar{n}_*) - \omega\eta(\bar{n}_*) + 1}{\bar{a}z^2(\bar{n}_*) - \omega z(\bar{n}_*) + 1}} \times \left( \frac{2\bar{a}z(\bar{n}_*) - \omega + \sqrt{\Delta}}{-2\bar{a}z(\bar{n}_*) + \omega + \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{-2\bar{a}\eta(\bar{n}_*) + \omega + \sqrt{\Delta}}{2\bar{a}\eta(\bar{n}_*) - \omega + \sqrt{\Delta}} \right)^{\frac{\omega}{2\sqrt{\Delta}}} \tag{18}$$

Значение выходной концентрации  $\bar{n}_{*0}$  устанавливается путем решения уравнения (18) относительно  $\bar{n}_*$  при  $\bar{r} = \bar{r}_0$ . Его подстановка в формулу (17) и дает  $\tilde{t}_e$ . Текущий же момент  $\tilde{t}$  вычисляется по формуле (11).

Несмотря на сравнительно простой вид и достоверность формул (11), (17), (18), давать оценку влияния переменного действия стока на фильтрационные деформации предпочтительнее, опираясь на данные вычислений полных объемов осажденного (неподвижного взвешенного)  $V$  и вынесенного из грунта  $W$  твердого вещества при различных значениях  $\bar{a}$ , а также на сопоставление с аналогичными объемами, но при  $\bar{a} = 0$ . Выражение “полный объем” здесь означает итоговый результат процессов осаждения или выноса мелких частиц, продолжающихся или бесконечно долго ( $\bar{a} = 0$ ), или конечное время ( $\bar{a} < 0$ ). Объем  $V$  как функция от  $\bar{a}$  имеет минимальное значение при  $\bar{a} = 0$ :

$$\bar{V}_{min} = \frac{V_{min}}{V_i} = \frac{1}{\beta} \left[ 2 + (1 - \beta)^{-3/2} - 3(1 - \beta)^{-1/2} \right], \tag{19}$$

где  $V_i = \frac{4}{3}\pi R_{i0}^3 m_0$  – объем суффозионной компоненты грунта в слое  $\bar{r}_0 \leq \bar{r} \leq 1$  недеформированного грунта. Для сравнения в области деформаций первоначально находился относительный объем неструктурных частиц  $\bar{V}_0 = (1 - \beta)^{-3/2}$ . С уменьшением коэффициента  $\bar{a}$  объем  $\bar{V}$  растёт и при  $\bar{a} \leq 0$  будет

$$\bar{V} = 3 \int_{\bar{r}_0}^{(1-\beta)^{-1/2}} \bar{r}^2 \bar{n}_*(\bar{r}) d\bar{r}. \tag{20}$$

Интегрирование выражения (20) по частям с учетом малости  $\bar{r}_0$  дает

$$\bar{V} = (1 - \beta)^{-3/2} - \int_{\bar{r}_0}^{(1-\beta)^{-1/2}} \bar{r}^3(\bar{n}_*) d\bar{n}_*. \tag{21}$$

Вместе с тем максимальное значение  $\bar{W}_{max}$ , дополняющее  $\bar{V}_{min}$  до  $\bar{V}_0$ , будет ( $\bar{a} = 0$ ):

$$\bar{W}_{max} = \bar{V}_0 - \bar{V}_{min} = \frac{2}{\beta} \left[ (1 - \beta)^{-1/2} - 1 \right]. \tag{22}$$

При произвольном значении  $\bar{a}$  вынос вещества составит

$$\bar{W} = \int_{\bar{r}_0}^{(1-\beta)^{-\frac{1}{2}}} \bar{r}^3(\bar{n}_*) d\bar{n}_*. \quad (23)$$

Наконец, для описания динамики иммобилизации вещества предлагается зависимость объема осаднения  $\bar{v}$  от времени  $\bar{t}$  в виде

$$\bar{v} = \frac{1}{(1-\beta)^2} - \frac{\bar{t}^2(\bar{n}_*) \cdot \bar{n}_*}{(1-\beta\bar{n}_*)^2} - \int_{\bar{n}_*}^1 \frac{\bar{t}^2(n)dn}{(1-\beta n)^2}, \quad (24)$$

где  $\bar{t}(\bar{n}_*)$  берется согласно (11) с учетом выражений (14) и (16).

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРИ ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ИНТЕНСИВНОСТИ СТОКА ( $\bar{a} > 0$ )

Рост интенсивности стока ( $\bar{a} > 0$ ) обуславливает расширение области деформаций. Действительно, ее внешняя граница (условная цилиндрическая поверхность, на которой  $u = u_k$  или  $\bar{u} = 1$ ) будет удаляться от стока из-за увеличения скорости  $u$ . Положение данной границы (радиус  $R_0$ ) в произвольный момент  $t$  определяется по формуле

$$R_0 = \frac{q(t)}{2\pi u_k(1 - m_s - m_0)}, \quad (25)$$

из которой следует, что при выполнении соотношения (14)

$$\bar{R}_0 = \frac{R_0}{R_{i0}} = \frac{1 + \bar{a}\bar{t}}{1 - \beta}. \quad (26)$$

Подстановка же выражения (26) в первое уравнение системы (7) дает для  $d\bar{r}/d\bar{t}$  на границе  $\bar{r} = \bar{R}_0$  (фронте деформаций) постоянное значение  $-\beta$ . Отрицательное значение данной производной свидетельствует об обязательном присутствии вблизи фронта деформаций тонкого слоя со взвешенными неподвижными частицами, которые через короткое время приходят в движение и затем ускоренно перемещаются к стоку. Однако, в силу тонкости этого слоя и растущих размеров области деформаций для практических целей вполне достаточно отслеживать динамику мобилизованных частиц в пределах только зоны массопереноса ( $\bar{r}_0 \leq \bar{r} \leq \bar{R}_i(\bar{t})$ ). Чтобы учесть факт увеличения области деформаций, используется граничное условие (6).

Строгое решение частично линеаризованной задачи (3), (6) удается построить двумя способами. Во-первых, это можно сделать, опять-таки, с помощью метода характеристик. Другой же способ

основывается на свойстве автомодельности, присущем данной задаче благодаря использованию условия (6). В соответствии с ним искомая  $\bar{n}_c(\bar{r})$  считается функцией единственной переменной  $z$ . Таким образом, учитывая  $z = \bar{r}/\bar{t}^2$ , получено

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{\bar{t}}, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{t}} = -\frac{\bar{r}}{\bar{t}^2},$$

и значит

$$\frac{\partial \bar{n}_c}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{\bar{t}} \frac{d\bar{n}_c}{dz}, \quad \frac{\partial \bar{n}_c}{\partial \bar{t}} = -\frac{\bar{r}}{\bar{t}^2} \frac{d\bar{n}_c}{dz}. \quad (27)$$

Подстановка (27) в линеаризованное уравнение (3) и несложные преобразования позволяют трансформировать его к намного более простому виду:

$$(-\bar{a}z^2 + \omega z - 1) \frac{d\bar{n}_c}{dz} = \beta \bar{n}_c^2 - \bar{n}_c, \quad (28)$$

которое легко решается при условии

$$z = \frac{1}{1 - \beta}, \quad \bar{n}_c = 1. \quad (29)$$

Форма решения определяется знаком дискриминанта  $\Delta = \omega^2 - 4\bar{a}$ , соответствующего уравнениям (28), (29). Общее же выражение, вытекающее из (28), (29), будет

$$f(\bar{n}_c) = \ln \frac{1 - \beta \bar{n}_c}{\bar{n}_c - \beta \bar{n}_c} = h(z), \quad (30)$$

где

$$h(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left( \frac{2\bar{a}z - \omega - \sqrt{\Delta}}{2\bar{a}z - \omega + \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{2\bar{a} - (1 - \beta)(\omega - \sqrt{\Delta})}{2\bar{a} - (1 - \beta)(\omega + \sqrt{\Delta})} \right),$$

$$\text{при } \Delta > 0, \quad (31)$$

$$h(z) = \frac{2}{2\bar{a}z - \omega} - \frac{2(1 - \beta)}{2\bar{a} - \omega(1 - \beta)}, \quad \text{при } \Delta = 0, \quad (32)$$

$$h(z) = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \left( \text{arctg} \frac{2\bar{a} - \omega(1 - \beta)}{\sqrt{-\Delta}} - \text{arctg} \frac{2\bar{a}z - \omega}{\sqrt{-\Delta}} \right), \quad \text{при } \Delta < 0. \quad (33)$$

Если соотношение (30) разрешить относительно  $\bar{n}_c$ , то искомое решение представляется зависимостью

$$\bar{n}_c = \frac{1}{\beta + (1 - \beta) \exp[h(z)]}, \quad (34)$$

которое несколько упрощается при  $\Delta > 0$  благодаря тому, что

$$\begin{aligned} \exp[h(z)] &= \\ &= \left[ \frac{2\bar{a}z - \omega - \sqrt{\Delta}}{2\bar{a}z - \omega + \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{2\bar{a} - (1 - \beta)(\omega - \sqrt{\Delta})}{2\bar{a} - (1 - \beta)(\omega + \sqrt{\Delta})} \right]^{\frac{1}{\sqrt{\Delta}}}. \end{aligned}$$

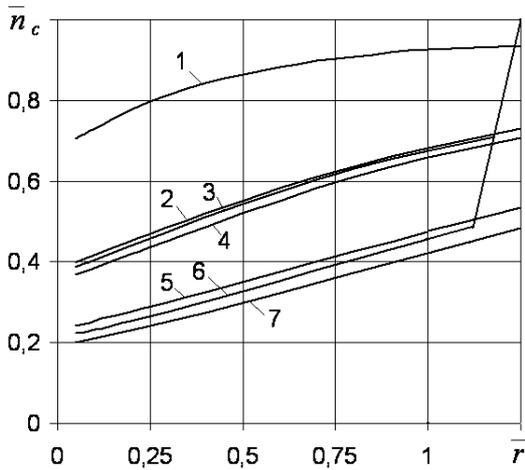


Рис. 1. Профили концентрации взвешенных частиц:  $1 - \bar{t} = 0.1$ ;  $2-4 - \bar{t} = 0.5$ ;  $5-7 - \bar{t} = 1$ ,  $1, 2, 5 - \bar{n}_{cp} = 1$ ;  $1, 4, 7 - \bar{n}_{cp} = 0$ ;  $1, 3, 6 -$  точн. и  $прибл. \bar{n}_{cp} = 0.5$

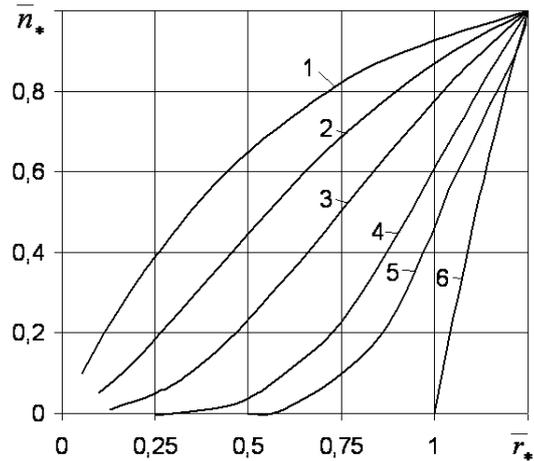


Рис. 2. Профили концентрации осажденных частиц:  $1 - \bar{a} = -2$ ,  $2 - \bar{a} = -1$ ,  $3 - \bar{a} = -0.5$ ,  $4 - \bar{a} = -0.2$ ,  $5 - \bar{a} = -0.1$ ,  $6 - \bar{a} = 0$

#### 4. РАСЧЕТ ПРИМЕРОВ И ОБСУЖДЕНИЕ ИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Количественный анализ внешней суффозии в несвязных грунтах под действием цилиндрического стока с переменной интенсивностью выполнялся на базе расчетов многочисленных примеров. В первую очередь, внимание было уделено наиболее интересным в практическом отношении вопросам – определению конечного распределения осажденных в области деформаций неструктурных частиц и полного объема выноса в сток суффозионной компоненты грунта. Основным предметом расчетов были пространственно-временные изменения ключевых для фильтрационных деформаций физико-механических характеристик  $\bar{n}_c$ ,  $\bar{n}_*$ . Вместе с тем изучалось на ряде примеров и поведение указанных характеристик в зависимости от важнейших модельных параметров  $\beta$ ,  $\bar{a}$ . Эти параметры варьировались в широких пределах ( $\beta$  от 0.05 до 0.2,  $\bar{a}$  от -2 до 1), что позволило охватить диапазоны всех реально возможных их значений. Данные расчетов, полученные при  $\bar{a} \neq 0$  (приводятся подробно ниже) и при  $\bar{a} = 0$ , сопоставлялись лишь в отдельных случаях. Для более полного сравнения достаточно привлечь результаты из работы [7]. Однако и построенные здесь разнообразные графики при малых и больших значениях  $\bar{a}$  дают весьма полное представление о влиянии переменного  $q$  на процессы фильтрационных деформаций.

Аналитические решения сформулированных

выше задач суффозии для зон полной деформации удается построить только благодаря частичной линеаризации исходного уравнения (3). И, прежде чем проводить расчеты на базе приближенных формул, следует убедиться в эффективности этого приема для данного типа задач. Сделать соответствующие оценки, изучая фильтрационные деформации теоретически, сравнительно легко, если воспользоваться, например, найденным ранее [7] точным решением аналогичной задачи для случая  $q = \text{const}$ . Выражается оно в форме  $\bar{t} = f(\bar{r}, \bar{u})$ . Чтобы облегчить анализ физико-механического состояния грунта, указанная зависимость преобразуется к виду

$$\bar{t} = (2\beta\bar{r}\bar{n}_c - 2\beta\bar{n}_c - 2\beta^2\bar{r}\bar{n}_c^2 + 1) \ln \frac{1 - \beta\bar{n}_c}{\bar{n}_c - \beta\bar{n}_c} + \bar{r}(1 - \bar{n}_c) - \frac{1 - 2\beta}{1 - \beta}(1 - \bar{n}_c)(1 + \beta\bar{r}\bar{n}_c). \quad (35)$$

Эталонные профили концентрации  $\bar{n}_c(\bar{r})$  вычислялись в диапазоне  $\bar{r}_0 \leq \bar{r} \leq 1$  ( $\bar{r}_0 = 0.05$ ) при  $\beta = 0.2$  на моменты времени  $\bar{t} = 0.1, 0.5$  и 1, отвечающие начальной, основной и конечной стадиям суффозионного процесса. Показаны они на рис. 1. Для получения приближенного решения этой же задачи, которое является точным линеаризованной, осреднялась только величина  $\bar{n}_c$  при  $\frac{\partial \bar{n}_c}{\partial \bar{r}}$ . Применение метода характеристик к линеаризованному таким образом уравнению (3) при начальном условии (5) дает

$$\bar{t} = \frac{1}{\omega}(r - \eta + \frac{1}{\omega} \ln \frac{1 - \omega\bar{r}}{1 - \omega\eta}), \quad (36)$$

где

$$\eta = \frac{1}{\omega} + \left(\bar{r} - \frac{1}{\omega}\right) \left(\frac{\bar{n}_c - \beta \bar{n}_c}{1 - \beta \bar{n}_c}\right)^\omega. \quad (37)$$

Приближенный расчет профилей  $\bar{n}_c(\bar{r})$  проводился формально также для всей области деформаций. С целью оценки сильных и слабых сторон приближенного подхода указанные профили сопоставлялись на рис. 1 с точными. Прежде всего, очевидно, что формулы (36), (37) обеспечивают высокую точность вычислений в пределах зоны полной деформации ( $\bar{r}_0 \leq \bar{r} < \bar{r}_*$ ) и не отражают особенностей распределения неподвижных взвешенных частиц во второй зоне ( $\bar{r}_* \leq \bar{r} \leq \frac{1}{1-\beta}$ ). Поэтому применять вышеупомянутые формулы следует исключительно в первой зоне, которая, впрочем, часто занимает подавляющую часть области деформаций. Также напрашивается вывод о несущественности выбора среднего значения  $\bar{n}_{cp}$ . На это указывает близость кривых 2, 4 и 5, 7 на рис. 1, которые определены при предельных и промежуточных значениях  $\bar{n}_{cp}$ . Если  $\bar{n}_{cp} = 0.5$ , то точные и приближенные профили  $\bar{n}_c(\bar{r})$  расположены очень близко друг к другу (расхождение между ними не более 1.5%) и на рисунке они сливаются. Нелишне заметить, что приближенное решение (36) оказывается не намного проще своего строгого аналога (35). Но уже в случае радиальной фильтрации упрощения выкладок в ходе решения, а в конечном итоге и расчетных зависимостей, обусловленные линеаризацией, становятся значительными. Однако основная ценность данного приема в теории фильтрационных деформаций связана все-таки с ощутимым расширением круга прикладных задач, которые могут быть благодаря ему успешно решены.

О важном значении переменного  $q$  для деформированного грунта при соответствующих условиях свидетельствуют прежде всего профили концентрации осажденных частиц, построенные для различных  $\bar{a}$ ,  $\beta$  и изображенные на рис. 2. При  $\bar{a} = -0.1$  указанный профиль еще сравнительно слабо отличается от своего аналога при  $\bar{q} = \text{const}$ . Следует, однако, заметить, что осажденные частицы будут присутствовать во всей области деформаций, но их концентрация даже на относительно большом удалении от стока крайне мала. В случае же  $\bar{q} = \text{const}$  сохранившиеся в области деформаций частицы, во-первых, находятся во взвешенном состоянии, во-вторых, сосредоточены исключительно в узкой зоне частичной деформации. С уменьшением  $\bar{a}$  картина существенно меняется, в первую очередь, благодаря задержке весьма большого количества суффозионных частиц в непо-

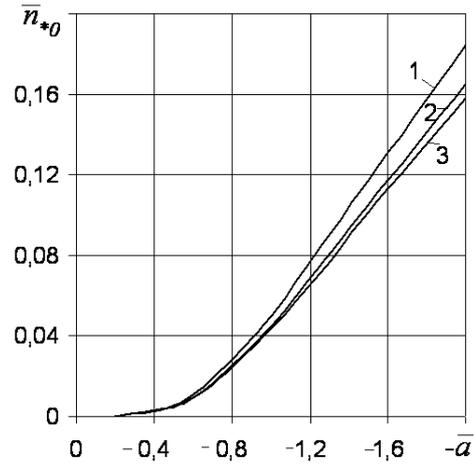


Рис. 3. Графики зависимости  $\bar{n}_{*0}(\bar{a})$ :  
1 -  $\beta = 0.2$ , 2 -  $\beta = 0.1$ , 3 -  $\beta = 0.05$

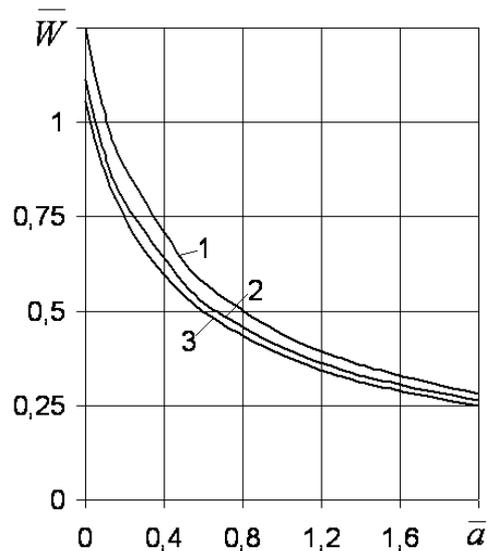


Рис. 4. Графики зависимости  $\bar{W}(\bar{a})$ :  
1 -  $\beta = 0.2$ , 2 -  $\beta = 0.1$ , 3 -  $\beta = 0.05$

средственной близости от стока. Показательными в этом плане являются графики  $\bar{n}_{*0}(\bar{a})$ , представленные на рис. 3. Ускоренное снижение расхода  $\bar{q}$  приводит к резкому росту содержания осажденных частиц на выходе из грунта, достигая 0.184 при  $\bar{a} = -2$ ,  $\beta = 0.2$ . Исходное количество суффозионных частиц (параметр  $\beta$ ) в свою очередь оказывает незначительное влияние и на характер распределения иммобилизованных частиц в области деформаций, и на изменение их выходной концентрации (кривые 1-3, рис. 3).

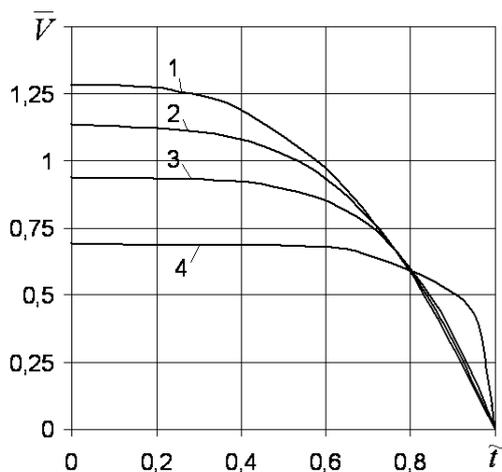


Рис. 5. Графики изменения объема осадка: 1 -  $\bar{a} = -2$ , 2 -  $\bar{a} = -1$ , 3 -  $\bar{a} = -0.5$ , 4 -  $\bar{a} = -0.2$

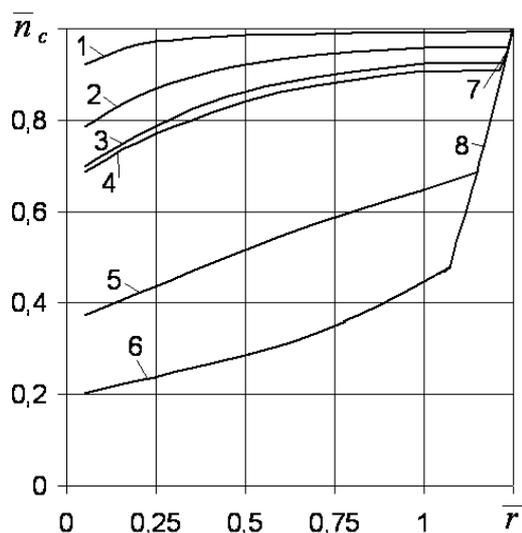


Рис. 6. Профили концентрации взвешенных (1-6) и осажденных (7, 8) частиц: 1, 2, 4, 7 -  $\bar{a} = -1$ , 3, 5, 6, 8 -  $\bar{a} = -0.1$ , 1, 4 -  $\bar{t} = 0.1$ , 2, 5 -  $\bar{t} = 0.5$ , 3, 6 -  $\bar{t} = 1$

При обосновании гидравлических и надежных характеристик дренажа большое значение приобретает установление объемов поступления в него твердого вещества. Знание же динамики этого процесса не столь важно вследствие существенного различия характерных времен суффозионного и осушительного процессов [17]. Высокая скорость фильтрационных деформаций дает право при решении прикладных задач дренажа полагать, что весь возможный в данных услови-

ях объем частиц  $\bar{W}$  привносится в дренаж мгновенно или в течение очень ограниченного времени. Представление же о  $\bar{W}$  как функции от  $\bar{a}$  при характерных значениях  $\beta$  дает рис. 4. Формально только при  $\bar{a} = 0$  осажденные частицы в минимальном количестве локализованы на периферии области деформаций. Естественно, что объем выноса для  $q = \text{const}$  оказывается наибольшим, составляя 1.25 при  $\beta = 0.2$ . Превышение объемом  $\bar{W}$  единицы объясняется выбором в качестве линейного масштаба  $R_{i0} = R_i(0)$ . Поэтому при определении реальных относительных объемов в качестве стандартного используется объем суффозионных частиц, первоначально находившихся в пределах слоя  $\bar{r}_0 \leq \bar{r} \leq 1$ . О значимости коэффициента  $\bar{a}$  для остаточных деформаций помимо рис. 4 также можно судить и по факту, что с уменьшением  $\bar{a}$  от 0 до -2 объем  $\bar{W}$  уменьшается многократно.

Осаждение твердого вещества осуществляется во времени крайне неравномерно, о чем свидетельствует рис. 5. Сильнее неравномерность выражена при  $\bar{a} = -0.2$  и несколько сглаживается по мере уменьшения  $\bar{a}$ . Основная причина этого выполаживания кривых при малых  $\bar{t}$  заключается в быстром снижении концентрации подвижных частиц, которые интенсивно выносятся из грунта. Меньшие значения  $\bar{a}$  означают большую длительность периода действия стока, чем и объясняется более крутой подъем кривой 4 при значениях  $\bar{t}$ , близких к 1.

При  $\bar{t} < \bar{t}_e$  ( $\bar{a} < 0$ ) в области деформаций обязательно присутствуют подвижные частицы, т. е. существует зона массопереноса. Распределение этих частиц носит весьма сложный и динамичный характер. Профили концентрации суффозионных частиц состоят из двух частей. Удаленная от стока часть формируется из осажденного вещества. Рассчитывается она по формуле (18), а положение границы между участками (зонами) – согласно выражений (11), (16). Ближняя же часть профиля образована мобильными частицами, количество которых быстро убывает. Типичные профили, определенные для  $\bar{a} = -0.1$  и  $-1$  на разные моменты времени, приведены на рис. 6. Кривые 7, 8 описывают распределение осажденных частиц, остальные – подвижных. Уменьшение  $\bar{a}$  ведет к усилению кривизны профилей и удалению частиц от сточника.

Отличительной особенностью деформирования грунта в случае усиления действия стока ( $\bar{a} > 0$ ) является его односторонний характер. До тех пор, пока интенсивность  $q$  растет, – нет условий для имобилизации подвижных частиц, хотя кратковременное взвешивание (фактическое изменение ме-

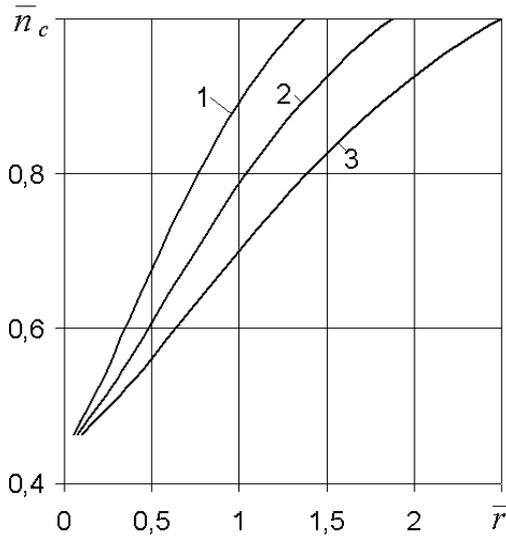


Рис. 7. Профили концентрации взвешенных частиц:  
1 -  $\tilde{t} = 1.1$ , 2 -  $\tilde{t} = 1.5$ , 3 -  $\tilde{t} = 2$

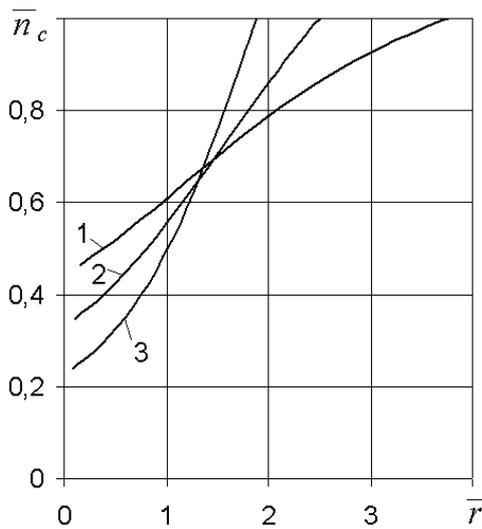


Рис. 8. Профили концентрации взвешенных частиц:  
1 -  $\bar{a} = 2$ , 2 -  $\bar{a} = 1$ , 3 -  $\bar{a} = 0.5$

ханического состояния частей) без перемещения в пределах движущейся зоны частичной деформации имеет место. Типичные профили концентрации взвешенных (подвижных и неподвижных) частиц, полученные с помощью автомодельного решения, даны на рис. 7, 8. Чтобы проследить за развитием суффозионного процесса, рассчитаны указанные профили при  $\bar{a} = 2$  на моменты времени, соответствующие  $\tilde{t} = 1.1$  ( $\bar{t} = 0.05$ ),  $\tilde{t} = 1.5$

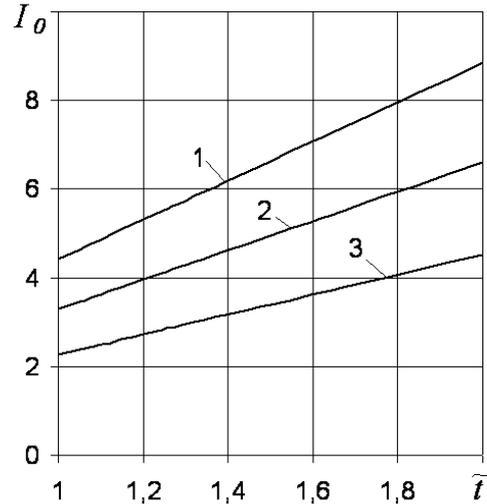


Рис. 9. Графики изменения входного потока взвешенных частиц со временем:  
1 -  $\bar{a} = 2$ , 2 -  $\bar{a} = 1$ , 3 -  $\bar{a} = 0.5$

( $\bar{t} = 0.25$ ) и  $\tilde{t} = 2$  ( $\bar{t} = 0.5$ ) (рис. 7). Для оценки же влияния быстроты изменения  $q$  аналогичные профили построены (рис. 8) при фиксированном  $\bar{t}$  и дискретно меняющемся  $\bar{a}$  (0.2, 0.5, 1, 1.5). Принятому значению  $\bar{t}$  соответствуют следующие значения  $\tilde{t} - 1.2, 1.5, 2, 2.5$ . Подобное взаимное расположение профилей  $\bar{n}_c(\bar{r})$  объясняется тем, что при малых  $\bar{a}$  фильтрационные деформации захватывают меньший объем грунта, но зато они носят более глубокий характер. Автомодельность выражается в совпадении значений  $\bar{n}_c$  при неизменном  $\bar{a}$  и одних и тех же отношениях  $\bar{r}/\bar{t}$  (рис. 7). Влияние же коэффициента  $\bar{a}$  на суффозионный процесс проявляется через размеры области деформаций, поле концентраций и интенсивность выноса неструктурных частиц. Если об изменчивости первых двух показателей можно судить по рис. 8, то поведение  $I_0(\tilde{t})$  при разных  $\bar{a}$  отображено на рис. 9. Усиленный рост скорости приточности принципиально меняет ситуацию с выносом - величина  $I_0$  со временем теперь увеличивается. К этому следует добавить, что в начальный период суффозионного процесса интенсивность  $I_0$  заметно занижена в силу специфического вида начального профиля  $\bar{n}_c^0(\bar{r})$ . Последний свидетельствует, во-первых, о неравномерном исходном распределении суффозионных частиц в недеформированном грунте, во-вторых, о меньшем в целом их исходном содержании. Имеющий место таким образом дефицит указанных частиц можно трактовать как результат предшествовавшего ускоренного их сброса из

придренного участка грунта.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дренажи, которые широко используются для регулирования водного режима земель различного назначения, редко работают в стабильных условиях. Поэтому дренажному расходу свойственна высокая изменчивость. В обоих фазах (спада и роста) изменение расхода со временем хорошо аппроксимируется линейной функцией. В несвязных грунтах дренажи инициируют мобилизацию мелких частиц. При работе в качестве стоков (осушителей) они способствуют удалению из среды подчас весьма значительного количества твердого вещества. Тем самым создается опасность заиливания как самих водоприемников, так и водоотводящих сетей на дренажных системах. При снижении интенсивности стока  $q$  суффозионный процесс сопровождается механической коагуляцией грунта (осаждением частиц). Если указанная интенсивность снижается быстро, то значительная часть мобилизованной суффозионной компоненты остается в области деформаций, снижая вероятность выхода дренажа из строя. С увеличением  $q$  данная область расширяется и все новые неструктурные частицы вовлекаются в суффозионный процесс. Осаждение частиц при этом отсутствует. Определяющую роль теперь играет зона полной деформации, а вторая характерная зона в силу своей малости – лишь второстепенную. В целом и динамика фильтрационных деформаций, и конечный их результат (распределение осажденных частиц) существенно зависят от скорости изменения  $q$  и в меньшей мере – от исходного содержания суффозионных частиц. Поэтому существующие методы обоснования параметров дренажей, предназначенных для осушения переувлажненных земель, борьбы с подтоплением территорий, применительно к грунтам, которые предрасположены к фильтрационным деформациям, нуждаются в совершенствовании с учетом особенностей формирования фильтрационного режима в динамичных условиях и в том числе закономерностей, установленных в данной работе.

1. Шкиннис Ц.Н. Гидрологическое действие дренажа. – Л.: Гидрометеиздат, 1981. – 311 с.

2. Штыков В.И., Гордиенко С.Г. Бесполостной дренаж: гидравлическое обоснование, расчет и эффективность действия. – С-Петербург: Издательство ГНЦ "СевНИИГиМ", 1997. – 224 с.
3. Эггелсман Р. Руководство по дренажу. – М.: Колос, 1984. – 247 с.
4. Ивицкий А.И. Основы проектирования и расчетов осушительных и осушительно-увлажнительных систем. – Минск: Наука и техника, 1988. – 311 с.
5. Шебеко В.Ф., Закржевский П.И., Брагилевская Э.А. Гидрологические расчеты при проектировании осушительных и осушительно-увлажнительных систем. – Л.: Гидрометеиздат, 1980. – 312 с.
6. Дмитриев А.Ф., Хлапук Н.Н., Дмитриев Д.А. Деформационные процессы в несвязных грунтах в придренной зоне и их влияние на работу осушительно-увлажнительных систем. – Ровно: Издательство РГТУ, 2002. – 145 с.
7. Поляков В.Л. Механическая суффозия в дренируемом грунте // Прикладна гідромеханіка. – 2002. – 4, N 4. – С. 60–73.
8. Бабій А.І. Дослідження суффозійних процесів у дрениуючій області залежно від градієнтів фільтрації // Меліорація і водне господарство. – 1994. – 80. – С. 17–83.
9. Дмитрієв Д.А. Про вплив градієнта напору на коефіцієнт фільтрації незв'язних ґрунтів // Вісник Укр. держ. акад. водн. госп-ва. – Рівне: УДАВГ. – 1998. – 4, N 2. – С. 23–27.
10. Ojha C.S.P., Singh V.P., Adrian D.D. Determination of critical head in soil piping // J.Hydraul. Eng. – 129, №7, 2003. – P. 511–518.
11. Willardson L.S., Walker R.E. Synthetic drain envelope-soil interactions // J.Irrig. and Drain. Div., ASCE. – V. 105, №4, 1979. – P. 367–373.
12. Капранов Ю.И. Структурная модель процесса механической коагуляции пористой среды // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ие, Ин-т гидродинамики. – 1989. – 90. – С. 27–39.
13. Кремез В.С. Моделирование влияния коагуляции грунта на уровень грунтовых вод при фильтрации из водохранилищ // Гидравлика и гидротехника. – 1999. – 60. – С. 67–71.
14. Поляков В.Л. Промачивание суффозионных грунтов. II. Слой коагулятажа - предпосылки и формирование // Прикладна гідромеханіка. – 2004. – 6, N 1. – С. 25–35.
15. Поляков В.Л. О фильтрационных деформациях грунта с образованием аккумуляционных зон // Прикладна гідромеханіка. – 2003. – 5, N 2. – С. 45–56.
16. Поляков В.Л., Сидор В.Б. Внешняя суффозия в несвязных грунтах при радиальной фильтрации // Прикладна гідромеханіка. – 2004. – 6, N 4. – С. 68–77.
17. Сидор В.Б. Порівняльний аналіз значущості суффозійного та фільтраційного процесів при функціонуванні різних типів дренажів // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки. – К.: КНУБА. – 2005. – 5. – С. 120–128.