

УДК 537.84

# УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ТОКОНЕСУЩИХ ЖИДКОСТЕЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

И. Д. БОРИСОВ, С. А. ПОСЛАВСКИЙ, Ю. И. РУДНЕВ

*Харьковский национальный университет им.В.Н.Каразина*

*Получено 27.05.2006*

Рассматриваются вопросы устойчивости равновесных состояний токонесящих жидкостей, взаимодействующих с внешним магнитным полем. Подробно изучен случай двухслойной системы несмешивающихся жидкостей, заполняющих цилиндрический сосуд прямоугольного сечения, в однородном магнитном поле. Показано, что с увеличением индукции магнитного поля и/или силы тока, пропускаемого через данную МГД-систему, равновесное состояние, отвечающее плоской поверхности раздела жидкостей, теряет устойчивость. Это проявляется в возникновении на поверхности раздела жидкостей периодических волн. В рамках линейной теории вопрос об устойчивости равновесных состояний сводится к исследованию спектра частот свободных нормальных колебаний системы. Решение соответствующей спектральной краевой задачи осуществляется численно с помощью метода Галеркина. Проведены расчеты границы области устойчивости в пространстве безразмерных параметров системы. Выяснен характер влияния основных параметров системы на пороги волнообразования.

Розглядаються питання стійкості рівноважних станів струмонесучих рідин, які взаємодіють з зовнішнім магнітним полем. Детально вивчений випадок двошарової системи незмішних рідин, які заповнюють циліндричну порожнину прямокутного перетину, в однорідному магнітному полі. Показано, що зі збільшенням індукції магнітного поля і/або сили струму, який пропускається через дану МГД-систему, рівноважний стан, що відповідає плоскій поверхні розділу рідин, втрачає стійкість. Це проявляється у виникненні на поверхні розділу рідин періодичних хвиль. У рамках лінійної теорії питання стійкості рівноважних станів зводиться до дослідження спектру частот вільних нормальних коливань системи. Розв'язання відповідної спектральної крайової задачі здійснюється чисельно за допомогою методу Галеркіна. Проведено розрахунки межі області стійкості в просторі безрозмірних параметрів системи. З'ясовано характер впливу основних параметрів системи на пороги збудження хвиль.

Stability problems of equilibrium states of current-carrying liquids in interaction with external magnetic field are considered. The case of two-layer system of immiscible liquids that fills a rectangular cylindrical vessel in uniform magnetic field is studied in detail. It was shown that with increasing of magnetic field induction and/or electric current which pass through the MHD-system, the equilibrium state corresponding to the flat fluid interface becomes unstable. Such instability appears as arising of periodic waves on the interface. In linear theory the equilibrium stability problem is reduced to study of free oscillation frequency spectrum. Solving of corresponding spectral boundary problem is carried out numerically using Galerkin method. The boundary of stability region in the space of dimensionless parameters of the system is calculated. The influence of main parameters on stability threshold is clarified.

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование равновесных состояний и устойчивости равновесия токонесящих жидкостей в магнитном поле является одной из основных задач, возникающих во многих инженерно-технических приложениях магнитной гидромеханики. Большой практический интерес представляет, в частности, задача об устойчивости поверхности раздела расплавленного металла и электролита в алюминиевых электролизерах большой мощности [?].

Негативное влияние МГД-процессов на технико-экономические показатели работы алюминиевых электролизеров отмечалось в [?] и других работах более 50 лет тому назад. Электромагнитные силы вызывают вихревые движения электролита и жидкого алюминия, перекосы (отклонения от горизонтального уровня) поверхности раздела “металл – электролит”; при определенных условиях стационарное течение расплава электролита и алюминия теряет устойчивость, сменяясь пе-

риодическим по времени волновым режимом движения. Это приводит к значительному снижению выхода алюминия по току и увеличению удельных энергозатрат на его производство.

Первые целенаправленные эксперименты по исследованию волн на поверхности раздела “металл – электролит” в промышленных электролизерах проводились Урата и др. [?]. В приближении “мелкой воды” в [?] получено нелинейное эволюционное уравнение, описывающее динамику поверхности раздела “металл - электролит”. При выводе этого уравнения использовалась упрощенная схема электролизера, включающая в себя цилиндрический сосуд прямоугольного сечения, заполненный двумя горизонтальными слоями проводящих жидкостей, ограниченных сверху и снизу плоскими поверхностями электродов. Начиная с [?], эта схема и приближение “мелкой воды” использовались в подавляющем большинстве работ, посвященных теоретическому анализу волновых процессов в алюминиевых электролизерах.

Физический механизм потери устойчивости, приводящий к появлению волн на поверхности раздела “металл – электролит”, был описан в работе Селе [?]. В основе этого механизма лежит взаимодействие вертикального магнитного поля с горизонтальными токами, появляющимися в расплаве при случайных возмущениях поверхности раздела жидкостей. Здесь же был предложен приближенный критерий МГД-устойчивости электролизеров, накладывающий определенные ограничения на величину вертикальной компоненты индукции магнитного поля, силу тока и толщины слоев металла и электролита. Критерий Селе, в силу его простоты, часто используют при обработке экспериментальных результатов для аппроксимации границы области устойчивости в пространстве указанных параметров (см., например, Абрамов и др. [?]).

Устойчивость равновесия двух безграничных горизонтальных слоев проводящих жидкостей в вертикальном магнитном поле исследовалась Снейдом [??]. Проведенный анализ ограничивался рассмотрением плоских и осесимметричных возмущений поверхности раздела, что не позволило установить наиболее интересные особенности дестабилизирующего влияния магнитного поля при возмущениях общего вида.

МГД-устойчивость алюминиевых электролизеров в рамках линейной теории исследовалась в работе авторов данной статьи [?]. Решение задачи для малых возмущений (квази)равновесного состояния расплава, описываемых линеаризованными уравнениями магнитной гидродинамики, осуществлялось численно на основе метода Галеркина. Проведенный анализ показал, что основную роль в механизме генерации волн действительно играет вертикальная компонента магнитного поля, как это указывалось в [?]. Было показано также, что неустойчивость носит пороговый характер, обусловленный вязкостью жидкостей.

Подход, основанный на анализе линеаризованных уравнений магнитной гидродинамики (без учета вязкости жидкостей), рассматривался Снейдом и Вангом [?].

Линейные колебания поверхности раздела жидкостей в асимптотическом приближении двухслойной “мелкой воды” изучались в работе Бояревича и Ромерио [?]. Аналогичные математические модели при исследовании МГД-процессов в алюминиевых электролизерах использовали Дэвидсон [?], Линдсей и Дэвидсон [??–??], Моррис и Дэвидсон [?], Деркач и др. [?].

Анализ механизмов генерации волн в рамках модели, предложенной в [?], проводился Лукьяно-

вым и др. [?]. Устойчивость стационарных течений токонесящих жидкостей в магнитном поле применительно к алюминиевым электролизерам исследовалась в работах Куренкова и др. [?], Сана и др. [??, ??]. Ранее этот вопрос рассматривался в [?].

Следует отметить, что в большинстве из указанных выше работ не учитывалась вязкость жидкостей. Это обстоятельство не позволило правильно объяснить пороговый характер неустойчивости и указать методы определения границы области устойчивости в пространстве определяющих параметров рассматриваемых МГД-систем.

Данная работа продолжает исследования, начатые в [?, ?]. Подробно рассмотрен случай двухслойной системы несмешивающихся токонесящих жидкостей, взаимодействующих с вертикальным магнитным полем.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

### 1.1. Основные предположения и обозначения

Рассматривается система двух несмешивающихся жидкостей, заполняющих цилиндрическую полость, ограниченную плоскими горизонтальными поверхностями электродов и непроводящей боковой стенкой, как показано на рис. 1. Систему будем считать элементом электрической цепи, по которой протекает постоянный ток  $J_0$ . Будем считать также, что жидкости испытывают воздействие постоянного однородного магнитного поля, создаваемого внешними источниками. Индукцию внешнего магнитного поля обозначим через  $\vec{B}_0$  ( $B_0 = \text{const}$ ).

Пусть  $\Omega_1, \Omega_2$  – области, занимаемые нижней и верхней жидкостями,  $\Omega_3, \Omega_4$  – верхний и нижний электроды, соответственно. Верхний электрод, для определенности, будем считать анодом, нижний – катодом. Пусть  $\partial\Omega_k$  – граница области  $\Omega_k$ ;  $\Gamma_{ik}$  – общий участок границ двух соприкасающихся областей  $\Omega_i, \Omega_k$ , так что  $\Gamma_{ik} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_k$ ,  $i, k = \overline{1, 4}$ ,  $i < k$ . Отметим, что в принятых обозначениях  $\Gamma_{12}$  означает поверхность раздела жидкостей. Боковую поверхность цилиндрической области  $\Omega_k$ ,  $k = \overline{1, 4}$  обозначим через  $S_k$ .

Введем прямоугольную систему координат  $Ox_1x_2x_3$ , ось  $Ox_3$  которой направлена вертикально вверх. Пропускание тока через рассматриваемую МГД-систему вызывает появление дополнительного магнитного поля с индукцией  $\vec{B}_J(\vec{x})$ . Взаимодействие объемных токов  $\vec{j}(\vec{x})$ , распределенных в  $\Omega_1, \Omega_2$ , с суммарным магнитным полем  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_J$  приводит к появлению пон-

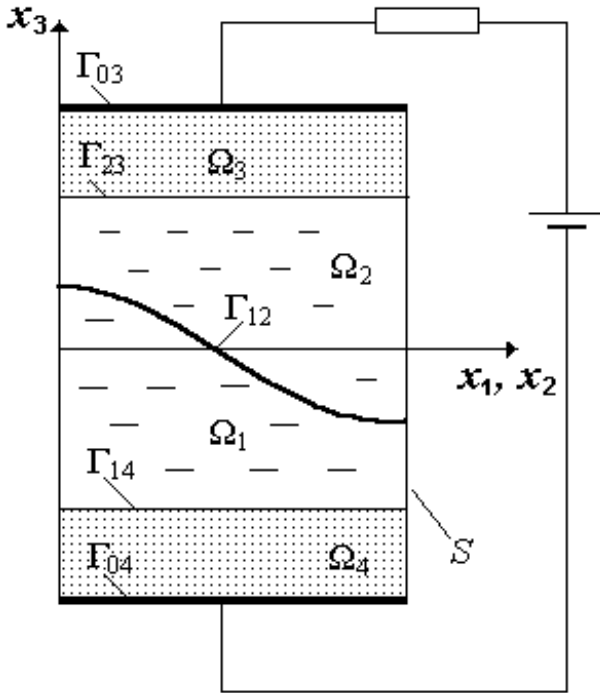


Рис. 1. Принципиальная схема МГД-системы

деромоторных сил, действующих на жидкости, с объемной плотностью

$$\vec{F}^{(k)} = \vec{j}^{(k)} \times \vec{B}^{(k)}, \quad k = 1, 2.$$

Здесь и всюду далее верхний индекс в круглых скобках означает номер области, к которой относится та или иная величина.

В состоянии равновесия жидкостей должны выполняться следующие условия:

$$-\nabla p_0^{(k)} + \rho_k \vec{g} + \vec{j}^{(k)} \times \vec{B}^{(k)} = 0 \quad \text{в } \Omega_k, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

$$p_0^{(1)} = p_0^{(2)} \quad \text{на } \Gamma_{12}, \quad (2)$$

где  $p_0^{(k)}$  – гидростатическое давление;  $\rho_k$  – плотность  $k$ -й жидкости;  $\vec{g}$  – ускорение силы тяжести.

Для объемной плотности тока и потенциала электрического поля примем закон Ома:

$$\vec{j}^{(k)} = -\sigma_k \nabla \psi^{(k)}, \quad k = \overline{1, 4}, \quad (3)$$

где  $\sigma_k (= \text{const})$  – удельная электропроводность среды в  $\Omega_k$ . В этом случае потенциал электрического поля должен удовлетворять уравнениям:

$$\Delta \psi^{(k)} = 0 \quad \text{в } \Omega_k, \quad k = \overline{1, 4}. \quad (4)$$

Будем считать, что токоподвод к верхней грани анода  $\Gamma_{03}$ , как и токоотвод от нижней грани

катода  $\Gamma_{04}$ , осуществляются с помощью проводящих пластин, удельная электропроводность которых значительно превышает удельную электропроводность электродов. В этом случае потенциал электрического поля  $\psi(\vec{x})$  на каждой из поверхностей  $\Gamma_{03}$ ,  $\Gamma_{04}$  можно считать постоянным, полагая

$$\psi^{(3)} = U (= \text{const}) \quad \text{на } \Gamma_{03}; \quad \psi^{(4)} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{04}. \quad (5)$$

На поверхностях раздела сред должны выполняться условия непрерывности электрического потенциала и нормальных компонент тока:

$$\{\psi\}_{\Gamma_{ik}} = 0, \quad \left\{ \sigma \frac{\partial \psi}{\partial n} \right\}_{\Gamma_{ik}} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{ik}, \quad ik = 12, 14, 23. \quad (6)$$

Здесь  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности раздела сред, направленный в область с большим индексом. Фигурные скобки в (??) и далее означают скачок заключенной в них величины на поверхности раздела сред:

$$\{A\}_{\Gamma_{ik}} := (A^{(k)} - A^{(i)})|_{\Gamma_{ik}}.$$

На неэлектропроводных боковых стенках сосуда должны выполняться условия непротекания тока:

$$\frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_k, \quad k = \overline{1, 4}. \quad (7)$$

Потенциал  $U$  электрического поля на верхней грани анода и полный ток  $J_0$ , протекающий по рассматриваемой цепи, являются заранее неизвестными величинами. Для их определения необходимо задать дополнительные соотношения:

$$J_0 = \int_{\Gamma} \sigma \frac{\partial \psi}{\partial x_3} d\Gamma, \quad U + J_0 R_0 = \mathcal{E}, \quad (8)$$

где  $\mathcal{E}$  – ЭДС источника тока;  $R_0$  – суммарное сопротивление токоподводящих шин, включая внутреннее сопротивление источника тока. В равенствах (??) под  $\Gamma$  можно понимать произвольное поперечное сечение любой из областей  $\Omega_k$ ,  $k = \overline{1, 4}$  горизонтальной плоскостью  $x_3 = \text{const}$ .

Будем считать, что магнитное поле собственных токов рассматриваемой системы значительно меньше внешнего поля,  $B_J \ll B_0$ . В этом случае собственным магнитным полем можно пренебречь, полагая  $\vec{B}^{(k)} = \vec{B}_0$ ,  $k = 1, 2$ . В принятых предположениях система уравнений и граничных условий полностью определяет равновесные состояния жидкостей, если дополнительно считать объем одной из жидкостей (для определенности, первой) заданным:

$$\int_{\Omega_1} d\Omega = V_1. \quad (9)$$

Нетрудно проверить, что в однородном магнитном поле  $\vec{B}_0$  плоская горизонтальная поверхность раздела жидкостей  $x_3 = 0$  отвечает возможному состоянию равновесия рассматриваемой системы с однородным распределением объемных токов и гидростатическим давлением, определяемыми следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \vec{j}^{(k)} &= -j_0 \vec{e}_3, j_0 = \text{const}, k = \overline{1,4}; \\ p_0^{(k)} &= -\rho_k g x_3 + (\vec{j}_0 \times \vec{B}_0) \cdot \vec{x} + \text{const}, k = \overline{1,2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\vec{e}_3$  – орт оси  $Ox_3$ .

## 1.2. Математическая формулировка эволюционной задачи

Состояние покоя рассматриваемой системы, удовлетворяющее условиям равновесия (??)–(??), далеко не всегда является устойчивым относительно начальных возмущений. Действительно, как показывают эксперименты на лабораторных моделях [?] при увеличении силы тока  $J_0$  и/или индукции внешнего магнитного поля  $B_0$  состояние покоя сменяется волновым режимом движения жидкостей. В этом режиме на поверхности раздела жидкостей генерируются крупномасштабные волны, длина которых соизмерима с горизонтальными размерами сосуда. При поддержании постоянных внешних условий колебания жидкостей достаточно быстро приобретают периодический по времени характер. Аналогичные эффекты наблюдаются на промышленных алюминиевых электролизерах [?].

Критическое значение силы тока  $J_{\text{кр}}$ , с превышением которого на границе раздела жидкостей генерируются волны, зависит от всей совокупности геометрических и физических параметров системы. Определение  $J_{\text{кр}}$  является одной из основных задач при решении проблем МГД-устойчивости алюминиевых электролизеров.

Имеющиеся экспериментальные данные позволяют утверждать, что при малых значениях  $\Delta J = J_0 - J_{\text{кр}} > 0$  возникающие колебания жидкостей носят линейный характер. Для их описания можно воспользоваться линеаризованными уравнениями магнитной гидродинамики.

Обозначим через  $\zeta(t, x_1, x_2)$  отклонение поверхности раздела от равновесного положения, через  $\vec{v}(t, \vec{x})$  – поле скоростей жидкостей. Как обычно принято в линейной теории, функции  $\zeta(t, x_1, x_2)$ ,

$\vec{v}(t, \vec{x})$  будем считать малыми величинами первого порядка малости. Гидродинамическое давление  $p$ , плотность электрического тока  $\vec{j}$ , потенциал электрического поля  $\psi$  представим в виде суммы равновесных значений этих величин и их малых возмущений:

$$\begin{aligned} p(t, \vec{x}) &= p_0(\vec{x}) + p'(t, \vec{x}), \\ \vec{j}(t, \vec{x}) &= \vec{j}_0(\vec{x}) + \vec{j}'(t, \vec{x}), \\ \psi(t, \vec{x}) &= \psi_0(\vec{x}) + \psi'(t, \vec{x}). \end{aligned}$$

В дальнейшем штрихи, обозначающие возмущения величин, будем опускать.

В линейном приближении движение жидкостей описывается следующими уравнениями:

$$\rho_k \frac{\partial \vec{v}^{(k)}}{\partial t} = -\nabla p^{(k)} + \eta_k \Delta \vec{v}^{(k)} + \vec{j}^{(k)} \times \vec{B}_0, \quad (11)$$

$$\text{div } \vec{v}^{(k)} = 0 \text{ в } \Omega_k, k = 1, 2, \quad (12)$$

где  $\eta_k$  – динамическая вязкость  $k$ -й жидкости.

На поверхности раздела жидкостей должны выполняться кинематические условия:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_3^{(1)} = v_3^{(2)}, v_\alpha^{(1)} = v_\alpha^{(2)}, \alpha = 1, 2 \text{ на } \Gamma_{12} \quad (13)$$

и динамические условия:

$$\left\{ \eta \left( \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} \right) \right\}_{\Gamma_{12}} = 0, \alpha = 1, 2 \text{ на } \Gamma_{12}, \quad (14)$$

$$\left\{ -p + 2\eta \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right\}_{\Gamma_{12}} = (\rho_1 - \rho_2) g \zeta \text{ на } \Gamma_{12}. \quad (15)$$

Условия (??), (??) представляют собой линеаризованные условия непрерывности касательных и нормальных напряжений на поверхности раздела жидкостей.

На твердых стенках примем, как обычно, условие прилипания частиц жидкости:

$$\vec{v}^{(k)} = 0 \text{ на } \partial\Omega_k \setminus \Gamma_{12}, k = 1, 2. \quad (16)$$

Будем считать, что закон Ома (??) выполняется для возмущений тока и потенциала электрического поля, так что

$$\vec{j}^{(k)} = -\sigma_k \nabla \psi^{(k)}, k = \overline{1,4}, \quad (17)$$

$$\Delta \psi^{(k)} = 0 \text{ в } \Omega_k, k = \overline{1,4}. \quad (18)$$

Линеаризуя условия непрерывности потенциала электрического поля и нормальных компонент тока на поверхностях раздела сред, будем иметь:

$$\{\psi\}_{\Gamma_{12}} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2} j_0 \zeta, \left\{ \sigma \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right\}_{\Gamma_{12}} = 0 \text{ на } \Gamma_{12}; \quad (19)$$

$$\{\psi\}_{\Gamma_{ik}} = 0, \left\{ \sigma \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right\}_{\Gamma_{ik}} = 0 \text{ на } \Gamma_{ik}, ik = 14, 23; \quad (20)$$

$$\frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S_k, k = \overline{1, 4}. \quad (21)$$

Будем считать, что в процессе движения жидкостей суммарный ток, протекающий по рассматриваемой электрической цепи, остается неизменным,  $J_0 = \text{const}$ . В этом случае на верхней грани анода и нижней грани катода следует принять условия:

$$\psi^{(3)} = 0 \text{ на } \Gamma_{03}; \psi^{(4)} = 0 \text{ на } \Gamma_{04}. \quad (22)$$

Отметим, что при заданной функции  $\zeta$  краевая задача (??)-(??) полностью определяет возмущение потенциала электрического поля и токов в каждой из областей  $\Omega_k, k = \overline{1, 4}$ .

В начальный момент времени поле скоростей и форма поверхности раздела жидкостей предполагаются известными,

$$\zeta|_{t=0} = \zeta_0 \text{ на } \Gamma_{12}; \vec{v}^{(k)}|_{t=0} = \vec{v}_0^{(k)} \text{ в } \Omega_k, k = 1, 2. \quad (23)$$

Вектор-функции  $\vec{v}_0^{(k)}(\vec{x}), k = 1, 2$  должны удовлетворять уравнениям (??) и условиям (??), (??), а функция  $\zeta_0(x_1, x_2)$  – условию

$$\int_{\Gamma_{12}} \zeta_0(x_1, x_2) d\Gamma = 0.$$

В принятых предположениях движение жидкостей полностью описывается системой уравнений, граничных и начальных условий (??)-(??). Вопрос об устойчивости равновесного состояния жидкостей сводится к исследованию устойчивости тривиального решения эволюционной задачи (??)-(??) относительно начальных возмущений  $\zeta_0(x, y), \vec{v}_0(\vec{x})$ .

### 1.3. Нормальные колебания жидкостей. Спектральный признак устойчивости

С эволюционной задачей (??)-(??) тесно связана спектральная задача о нормальных свободных колебаниях жидкостей, описываемых решениями, экспоненциально зависящими от времени:

$$\begin{pmatrix} \vec{v} \\ p \\ \zeta \\ \psi \\ \vec{j} \end{pmatrix} (t, \vec{x}) = \exp(\lambda t) \begin{pmatrix} \vec{v} \\ p \\ \zeta \\ \psi \\ \vec{j} \end{pmatrix} (\vec{x}). \quad (24)$$

Спектральный параметр  $\lambda$  в общем случае принимает комплексные значения:  $\lambda = \gamma + i\omega$ , где  $\gamma$

– фактор затухания (в случае  $\gamma < 0$ ) или нарастания (в случае  $\gamma > 0$ ) колебаний;  $\omega$  – круговая частота собственных колебаний системы. Введем поле малых смещений частиц жидкостей  $\vec{u}(t, \vec{x}) = \exp(\lambda t) \vec{u}(\vec{x})$ , связанное с полем скоростей следующим соотношением:

$$\vec{v}(t, \vec{x}) = \frac{\partial \vec{u}(t, \vec{x})}{\partial t} = \lambda \exp(\lambda t) \vec{u}(\vec{x}). \quad (25)$$

Подставляя выражение (??) в (??)-(??) и учитывая при этом (??), после отделения экспоненциального временного множителя приходим к спектральной краевой задаче (относительно собственных значений  $\lambda$  и амплитудных множителей  $\vec{u}(\vec{x}), p(\vec{x}), \zeta(x_1, x_2), \psi(\vec{x})$ ):

$$\lambda^2 \rho_k \vec{u}^{(k)} = -\nabla p^{(k)} + \lambda \eta_k \Delta \vec{u}^{(k)} + \vec{j}^{(k)} \times \vec{B}_0, \quad (26)$$

$$\text{div } \vec{u}^{(k)} = 0 \text{ в } \Omega_k, k = 1, 2; \quad (27)$$

$$\zeta = u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, u_\alpha^{(1)} = u_\alpha^{(2)}, \alpha = 1, 2 \text{ на } \Gamma_{12}; \quad (28)$$

$$\left\{ \eta \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha} \right) \right\}_{\Gamma_{12}} = 0, \alpha = 1, 2 \text{ на } \Gamma_{12}; \quad (29)$$

$$\left\{ -p + 2\lambda \eta \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right\}_{\Gamma_{12}} = (\rho_1 - \rho_2) g \zeta \text{ на } \Gamma_{12}; \quad (30)$$

$$\vec{u}^{(k)} = 0 \text{ на } \partial \Omega_k \setminus \Gamma_{12}, k = 1, 2; \quad (31)$$

$$\vec{j}^{(k)} = -\sigma_k \nabla \psi^{(k)} \text{ в } \Omega_k, k = \overline{1, 4}; \quad (32)$$

$$\Delta \psi^{(k)} = 0 \text{ в } \Omega_k, k = \overline{1, 4}; \quad (33)$$

$$\{\psi\}_{\Gamma_{12}} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2} j_0 \zeta, \left\{ \sigma \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right\}_{\Gamma_{12}} = 0 \text{ на } \Gamma_{12}; \quad (34)$$

$$\{\psi\}_{\Gamma_{ik}} = 0, \left\{ \sigma \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right\}_{\Gamma_{ik}} = 0 \text{ на } \Gamma_{ik}, ik = 14, 23; \quad (35)$$

$$\frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S_k, k = \overline{1, 4}; \quad (36)$$

$$\psi^{(3)} = 0 \text{ на } \Gamma_{03}; \psi^{(4)} = 0 \text{ на } \Gamma_{04}. \quad (37)$$

Очевидно, что при  $\gamma > 0$  решения вида (??) неограниченно возрастают. Физически это означает, что случайные возмущения, усиливаемые электромагнитными силами, нарастают со временем, приводя к появлению незатухающих волн на поверхности раздела жидкостей. Период колебаний и форма волн определяются наиболее быстро растущими решениями вида (??). Амплитуда волн в линейной задаче является неопределяемым параметром; конечность амплитуды реальных волн объясняется нелинейными эффектами, не учитываемыми в выражениях (??)-(??).

Как известно [?], в отсутствии тока и магнитного поля задача (??)–(??) имеет дискретный спектр собственных значений  $\lambda_k = \gamma_k + i\omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Можно показать, что дискретность спектра сохраняется и в рассматриваемом здесь случае. Это позволяет записать условие устойчивости (неустойчивости) равновесного состояния рассматриваемой системы в виде:

$$\begin{aligned} \max_k \gamma_k < 0 & \text{ – условие устойчивости,} \\ (\max_k \gamma_k > 0 & \text{ – условие неустойчивости).} \end{aligned} \quad (38)$$

Очевидно, что при  $J_0 = 0, B_0 = 0$  и  $\rho_1 > \rho_2$  (легкая жидкость расположена над тяжелой) рассматриваемое состояние равновесия устойчиво. Опираясь на спектральный признак устойчивости (??), можно показать, что в случае  $J_0 \neq 0, B_0 \neq 0$  для жидкостей с пренебрежимо малой вязкостью, т.е. при  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , равновесное состояние всегда неустойчиво. Таким образом, в рассматриваемой задаче вязкость жидкостей играет исключительно важную роль, определяя пороговый характер МГД-неустойчивости равновесия.

Спектральный признак устойчивости (??) используется в дальнейшем для построения границы области устойчивости в пространстве физических параметров рассматриваемой системы.

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

### 2.1. Общая схема метода Галеркина

Для приближенного вычисления собственных значений и собственных функций спектральной задачи (??)–(??) будем применять метод Галеркина. Для этого выберем в качестве базиса полную систему соленоидальных вектор-функций  $\{\vec{u}_i\}_{i=1}^{\infty}$ , определенных в  $\Omega_1, \Omega_2$ , удовлетворяющих условиям (??), (??) и условию непрерывности (??) на поверхности  $\Gamma_{12}$ , а в остальном произвольных. Каждой базисной функции  $\vec{u}_i$  сопоставим функцию  $\zeta_i := \vec{n} \cdot \vec{u}_i|_{\Gamma_{12}}$  на  $\Gamma_{12}$ . Поле смещений частиц жидкостей, отклонение поверхности раздела от равновесного положения, возмущения потенциала электрического поля и токов представим в виде:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \sum_{k=1}^N c_k \vec{u}_k, \quad \zeta = \sum_{k=1}^N c_k \zeta_k, \\ \psi &= \sum_{k=1}^N c_k \psi_k, \quad \vec{j} = \sum_{k=1}^N c_k \vec{j}_k, \end{aligned} \quad (39)$$

где  $c_k$  – коэффициенты, подлежащие определению, а функции  $\psi_k, \vec{j}_k$  находятся как решение краевой задачи (??) – (??) при  $\zeta = \zeta_k$ . Число базисных функций  $N$  подбирается из условий практической сходимости вычислительного процесса, описанного в следующем разделе.

Пусть  $\vec{u}(\vec{x}), \xi(\vec{x})$  – соленоидальные вектор-функции, удовлетворяющие тем же условиям, что и базисные функции  $\vec{u}_k(\vec{x})$ . В этом случае имеет место следующая формула Грина для оператора Стокса:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (-\nabla p + \lambda \eta \Delta \vec{u}) \vec{\xi} d\Omega = \\ & = -\lambda \mathcal{D}(\vec{\xi}, \vec{u}) - \int_{\Gamma_{12}} \left\{ -p + 2\lambda \eta \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right\} \xi_3 d\Gamma - \\ & - \lambda \int_{\Gamma_{12}} \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \eta \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha} \right) \right\} \xi_\alpha d\Gamma, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\vec{\xi}, \vec{u}) & := \\ & := \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) d\Omega. \end{aligned}$$

Подставляя (??) в уравнение (??) и умножая скалярно обе части полученного равенства на  $\vec{u}_i^*$  (звездочка означает комплексно сопряженную величину), после интегрирования по области  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  с использованием формулы (??) и условий (??), (??) будем иметь:

$$(\lambda^2 \mathcal{A} + \lambda \mathcal{D} + (\mathcal{B} - \mathcal{C})) c = 0, \quad (41)$$

$$c := (c_1, c_2, \dots, c_N)^t.$$

Здесь определенные ниже  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  – матрицы кинетической и потенциальной энергий;  $\mathcal{D}$  – матрица вязкой диссипации;  $\mathcal{C}$  – матрица МГД-взаимодействия.

Элементы  $a_{ik}$  матрицы  $\mathcal{A}$  имеют вид:

$$a_{ik} = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \rho \vec{u}_i^* \vec{u}_k d\Omega, \quad i, k = 1, \dots, N. \quad (42)$$

Элементы  $b_{ik}$  матрицы  $\mathcal{B}$  определены выражениями:

$$b_{ik} = \int_{\Gamma_{12}} g (\rho_1 - \rho_2) \zeta_i^* \zeta_k d\Gamma, \quad i, k = 1, \dots, N. \quad (43)$$

Отметим, что для поля скоростей, представляемого в виде выражения (??), (??), квадратичная форма  $c^t \mathcal{A} c$ , определяет кинетическую энергию

рассматриваемой системы, а квадратичная форма  $c^t \mathcal{B} c$  – потенциальную энергию системы. По этой причине  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  названы матрицами кинетической и потенциальной энергий соответственно.

Элементы  $c_{ik}$  матрицы МГД-взаимодействия  $\mathcal{C}$  определяются по формулам:

$$c_{ik} = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \vec{u}_i^* \cdot (\vec{j}_k \times \vec{B}_0) d\Omega, \quad i, k = 1, \dots, N. \quad (44)$$

Общее выражение для элементов  $d_{ik}$  матрицы диссипации  $\mathcal{D}$  имеет вид:

$$d_{ik} = D(\vec{u}_i^*, \vec{u}_k), \quad i, k = 1, \dots, N. \quad (45)$$

Квадратичный функционал  $\mathcal{D}(\vec{u}, \vec{u})$  и отвечающая ему квадратичная форма  $c^t \mathcal{D} c$  определяют диссипацию энергии, обусловленную вязкостью жидкостей, что и объясняет название матрицы  $\mathcal{D}$ .

Метод Галёркина позволил редуцировать исходную спектральную краевую задачу к алгебраической спектральной задаче для квадратичного пучка матриц (??). Введем  $n$ -мерный вектор-столбец  $b := \lambda c$ . Заметим также, что  $\mathcal{A}$  – эрмитова положительно определенная матрица, так что существует обратная матрица  $\mathcal{A}^{-1}$ . Нетрудно видеть, что (??) приводится к эквивалентному уравнению:

$$\left( \begin{array}{c|c} -\mathcal{A}^{-1} \mathcal{D} & -\mathcal{A}^{-1} (\mathcal{B} - \mathcal{C}) \\ \hline I & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} b \\ c \end{array} \right) = \lambda \left( \begin{array}{c} b \\ c \end{array} \right), \quad (46)$$

где  $I$  – единичная  $N \times N$  – матрица.

Собственные числа  $\lambda$  спектральной задачи (??), как и эквивалентной ей задачи (??), являются приближенными значениями собственных чисел краевой задачи (??) – (??), а собственные векторы  $c$  определяют моды колебаний возмущенных величин в соответствии с их представлениями (??). Забегая вперед, отметим, что собственные числа задачи (??) будут определяться численно с использованием  $QR$ -алгоритма [?].

### 2.2. Матрицы кинетической и потенциальной энергий

Приведенные выше формулировки эволюционной и спектральной задач, а также общая процедура метода Галёркина относятся к цилиндрическому сосуду с произвольным поперечным сечением. В дальнейшем будем считать, что поперечное сечение полости сосуда имеет прямоугольную форму. Кроме того, ограничимся рассмотрением жидкостей малой вязкости. Эффективным методом решения задач гидродинамики в случае маловязких

жидкостей является, как известно, метод пограничного слоя, позволяющий сравнительно просто находить асимптотические решения в виде рядов по степеням коэффициентов вязкости.

При реализации метода Галёркина представляется наиболее целесообразным использовать в качестве базисных функций  $\{\vec{u}_i\}_{i=1}^{\infty}$  собственные функции задачи о малых колебаниях рассматриваемой системы в отсутствие токов и магнитного поля. Эта задача описывается системой уравнений (??)–(??), где необходимо положить  $\vec{j} = 0$ .

В соответствии с общей процедурой метода пограничного слоя [?] представим функции  $\vec{u}_i(\vec{x})$  в виде

$$\vec{u}_i = \nabla \varphi_i(\vec{x}) + \vec{w}_i(\vec{x}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (47)$$

где  $\varphi$  – потенциал смещений частиц жидкостей;  $\vec{w}$  – вектор-функция, учитывающая влияние вязкости в тонких слоях, примыкающих к твердым стенкам и границе раздела жидкостей. Функции  $\varphi(\vec{x})$ ,  $\vec{w}(\vec{x})$ , в свою очередь, представим в виде рядов:

$$\varphi^{(k)} = \varphi^{0(k)} + \nu_k^{1/2} \varphi^{1(k)} + \dots,$$

$$\vec{w}^{(k)} = \vec{w}^{0(k)} + \nu_k^{1/2} \vec{w}^{1(k)} + \dots, \quad k = 1, 2,$$

где  $\nu_k$  – кинематическая вязкость  $k$ -ой жидкости. Комплексные собственные частоты колебаний также будем отыскивать в виде ряда:

$$\lambda = \lambda^0 + \nu^{1/2} \lambda^1 + \dots,$$

где под  $\nu$  можно понимать  $\nu_1$  или  $\nu_2$ , что приводит к одному и тому же результату.

Для практических расчетов, как правило, достаточно ограничиться первыми двумя членами асимптотического ряда для  $\lambda$ . Можно показать, что для их определения достаточно найти  $\varphi^{0(k)}$ ,  $\vec{w}^{0(k)}$ ,  $k = 1, 2$ .

Функции  $\varphi^{0(k)}$  описывают колебания системы идеальных жидкостей и определяются как решения краевой задачи:

$$\Delta \varphi^{(k)} = 0 \text{ в } \Omega_k, \quad k = 1, 2;$$

$$\zeta = \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_3} = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_3} \text{ на } \Gamma_{12};$$

$$(\lambda^0)^2 \left( \rho_1 \varphi^{(1)} - \rho_2 \varphi^{(2)} \right) + g (\rho_1 - \rho_2) \zeta = 0 \text{ на } \Gamma_{12};$$

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S_k, \quad k = 1, 2.$$

В случае цилиндра с прямоугольным поперечным сечением решения этой задачи легко выписываются в явном виде:

$$\begin{aligned} \varphi_j^{(1)} &= \frac{\text{ch}(\kappa_j(h_1 + x_3))}{\kappa_j \text{sh}(\kappa_j h_1)} \zeta_j(x_1, x_2), \\ \varphi_j^{(2)} &= -\frac{\text{ch}(\kappa_j(h_2 - x_3))}{\kappa_j \text{sh}(\kappa_j h_2)} \zeta_j(x_1, x_2), \\ \zeta_j &= \alpha_j \cos(\kappa_{1j} x_1) \cos(\kappa_{2j} x_2), \quad \lambda_j^0 = \pm i \omega_j^0, \\ \omega_j^0 &= \left( \frac{g(\rho_1 - \rho_2) \kappa_j}{\rho_1 \text{cth}(\kappa_j h_1) + \rho_2 \text{cth}(\kappa_j h_2)} \right)^{1/2}; \end{aligned} \quad (48)$$

$$\kappa_{1j} := \frac{\pi p_{1j}}{l_1}, \quad \kappa_{2j} := \frac{\pi p_{2j}}{l_2}, \quad \kappa_j := (\kappa_{1j}^2 + \kappa_{2j}^2)^{1/2},$$

$$p_{1j}, p_{2j} = 0, 1, 2, \dots; \quad p_{1j} + p_{2j} \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

Здесь  $h_1$  – толщина слоя нижней жидкости;  $h_2$  – толщина слоя верхней жидкости;  $l_1, l_2$  – горизонтальные размеры сосуда вдоль осей  $Ox_1, Ox_2$  соответственно;  $\omega_j^0$  – собственные частоты колебаний рассматриваемой двухслойной системы жидкостей в отсутствие вязкости, магнитного поля и токов.

Для определенности будем считать, что целочисленные параметры  $p_{1j}, p_{2j}$  выбираются так, чтобы волновые числа  $\kappa_j$  образовывали неубывающую последовательность. Произвол в выборе амплитудных множителей  $\alpha_j$  (с размерностью длины) можно использовать для той или иной нормировки собственных функций  $\zeta_j, \varphi_j^{(k)}$ ; в дальнейшем для упрощения записи элементов матриц, входящих в (??), (??), будем полагать  $\alpha_j = 1 \forall j = 1, 2, \dots$ .

При подсчете элементов матриц кинетической и потенциальной энергий погранслойными слагаемыми  $\vec{w}_i$  в представлении поля смещений частиц жидкостей (47) можно пренебречь. Используя выражения (48), элементы матрицы кинетической энергии нетрудно выписать в явном виде:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \delta_{ij} \frac{(\rho_1 \text{cth} \kappa_i h_1 + \rho_2 \text{cth} \kappa_i h_2) l_1 l_2 \varepsilon_i}{\kappa_i}, \quad (49) \\ \varepsilon_i &= \begin{cases} 1/2, & (\kappa_{1i} \kappa_{2i} = 0) \\ 1/4, & (\kappa_{1i} \kappa_{2i} \neq 0) \end{cases}. \end{aligned}$$

Для элементов матрицы потенциальной энергии будем иметь:

$$b_{ij} = \delta_{ij} (\rho_1 - \rho_2) g \varepsilon_i. \quad (50)$$

В выражениях (??), (??) через  $\delta_{ij}$ , как обычно, обозначены символы Кронекера.

### 2.3. Матрица вязкой диссипации

В отличие от матриц кинетической и потенциальной энергий элементы матрицы вязкой диссипации определяются в основном погранслойными функциями  $\vec{w}_j$ . Для вектор-функций  $\vec{w}_j$  вблизи твердых стенок имеем следующее общее выражение:

$$\vec{w}_j^{(k)} = -\nabla_\tau \varphi_j \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega_j^0}{\nu_k}} \xi\right), \quad k = 1, 2, \quad (51)$$

где  $\xi$  – координата, отсчитываемая вглубь жидкости по нормали к твердой стенке;  $\nabla_\tau$  – поверхностный градиент скалярной функции, определенный на соответствующей твердой стенке. Вблизи поверхности раздела жидкостей  $\vec{w}_j$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{w}_j^{(1)} &= -\frac{\rho_2 \sqrt{\nu_2} \vec{w}_{0j}}{\rho_1 \sqrt{\nu_1} + \rho_2 \sqrt{\nu_2}} \exp\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega_j^0}{\nu_1}} x_3\right), \\ \vec{w}_j^{(2)} &= \frac{\rho_1 \sqrt{\nu_1} \vec{w}_{0j}}{\rho_1 \sqrt{\nu_1} + \rho_2 \sqrt{\nu_2}} \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega_j^0}{\nu_2}} x_3\right), \end{aligned} \quad (52)$$

$$\vec{w}_{0j} := \kappa_j^{-1} (\text{cth} \kappa_j h_1 + \text{cth} \kappa_j h_2) \nabla_\tau \zeta_j.$$

Для элементов матрицы вязкой диссипации вместо (??) можно принять приближенное выражение

$$d_{ij} \approx \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \eta \frac{\partial \vec{w}_i^*}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \vec{w}_j}{\partial \xi} d\Omega, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (53)$$

Для тонких слоев жидкостей диссипацией энергии на боковых стенках сосуда можно пренебречь. В этом случае из выражения (??) с учетом (??), (??), будем иметь:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \delta_{ij} \sqrt{\frac{\omega_i}{2}} \left( \frac{\rho_1 \sqrt{\nu_1}}{\text{sh}^2(\kappa_i h_1)} + \frac{\rho_2 \sqrt{\nu_2}}{\text{sh}^2(\kappa_i h_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\text{cth}(\kappa_i h_1) + \text{cth}(\kappa_i h_2))^2 \rho_1 \rho_2 \sqrt{\nu_1 \nu_2}}{\rho_1 \sqrt{\nu_1} + \rho_2 \sqrt{\nu_2}} \right) \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (54)$$

Отметим, что для промышленных алюминиевых электролизеров толщина слоя металла  $h_1 = 20-30$  см, слоя электролита  $h_2 = 4-7$  см при ширине ванны порядка 4 м и длине, достигающей 15 м. Таким образом, применительно к алюминиевым электролизерам приближение, в котором получены выражения (??), можно считать вполне удовлетворительным.

### 2.4. Матрица МГД-взаимодействия

Выпишем компоненты матрицы МГД-взаимодействия, считая внешнее магнитное поле вертикальным,  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_3$ .

И. Д. Борисов, С. А. Пославский, Ю. И. Руднев



Как отмечалось ранее, базисные функции  $\psi_i^{(k)}$ ,  $k = \overline{1, 4}$  в представлении потенциала электрического поля определяются по функциям  $\zeta_i$  как решения краевой задачи (??)-(??) при  $\zeta = \zeta_i$ . Для цилиндрического сосуда прямоугольного сечения эти решения легко выписываются в явном виде:

$$\begin{aligned}\psi_i^{(1)} &= \frac{j_0}{\sigma_1} \alpha_{1i} \left[ \operatorname{sh}(\kappa_i h_4) \operatorname{ch}(\kappa_i (h_1 + x_3)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma_4}{\sigma_1} \operatorname{ch}(\kappa_i h_4) \operatorname{sh}(\kappa_i (h_1 + x_3)) \right] \zeta_i(x_1, x_2), \\ \psi_i^{(2)} &= \frac{j_0}{\sigma_2} \alpha_{2i} \left[ \operatorname{sh}(\kappa_i h_3) \operatorname{ch}(\kappa_i (h_2 - x_3)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma_3}{\sigma_2} \operatorname{ch}(\kappa_i h_3) \operatorname{sh}(\kappa_i (h_2 - x_3)) \right] \zeta_i(x_1, x_2), \\ \psi_i^{(3)} &= \frac{j_0}{\sigma_2} \alpha_{2i} \operatorname{sh}(\kappa_i (h_2 + h_3 - x_3)) \zeta_i(x_1, x_2), \\ \psi_i^{(4)} &= \frac{j_0}{\sigma_1} \alpha_{1i} \operatorname{sh}(\kappa_i (h_1 + h_4 + x_3)) \zeta_i(x_1, x_2). \quad (55)\end{aligned}$$

Коэффициенты  $\alpha_{1i}$ ,  $\alpha_{2i}$  в (??) определены выражениями:

$$\begin{aligned}\alpha_{1i} &= \frac{(1 - \sigma_2/\sigma_1) s_{2i}}{r_{2i} s_{1i} + (\sigma_2/\sigma_1) r_{1i} s_{2i}}, \\ \alpha_{2i} &= -\frac{(1 - \sigma_2/\sigma_1) s_{1i}}{r_{2i} s_{1i} + (\sigma_2/\sigma_1) r_{1i} s_{2i}},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}r_{1i} &= \operatorname{ch}(\kappa_i h_1) \operatorname{sh}(\kappa_i h_4) + (\sigma_4/\sigma_1) \operatorname{sh}(\kappa_i h_1) \operatorname{ch}(\kappa_i h_4), \\ r_{2i} &= \operatorname{ch}(\kappa_i h_2) \operatorname{sh}(\kappa_i h_3) + (\sigma_3/\sigma_2) \operatorname{sh}(\kappa_i h_2) \operatorname{ch}(\kappa_i h_3), \\ s_{1i} &= \operatorname{sh}(\kappa_i h_1) \operatorname{sh}(\kappa_i h_4) + (\sigma_4/\sigma_1) \operatorname{ch}(\kappa_i h_1) \operatorname{ch}(\kappa_i h_4), \\ s_{2i} &= \operatorname{sh}(\kappa_i h_2) \operatorname{sh}(\kappa_i h_3) + (\sigma_3/\sigma_2) \operatorname{ch}(\kappa_i h_2) \operatorname{ch}(\kappa_i h_3).\end{aligned}$$

Подставляя выражения (??) в (??) и учитывая при этом (47), получим выражения для элементов матрицы МГД-взаимодействия:

$$\begin{aligned}m_{ij} &= B_0 j_0 \times \\ &\times \left( \frac{\alpha_{1j}}{\kappa_i \operatorname{sh}(\kappa_i h_1)} \left( \operatorname{sh}(\kappa_j h_4) I_{1ij}^{(1)} + \frac{\sigma_4}{\sigma_1} \operatorname{ch}(\kappa_j h_4) I_{2ij}^{(1)} \right) + \right. \\ &+ \frac{\alpha_{2j}}{\kappa_i \operatorname{sh}(\kappa_i h_2)} \left( \operatorname{sh}(\kappa_j h_3) I_{1ij}^{(2)} + \frac{\sigma_3}{\sigma_2} \operatorname{ch}(\kappa_j h_3) I_{2ij}^{(2)} \right) \times \\ &\quad \left. \times (\kappa_{1i} \kappa_{2j} K_{1ij} K_{2ji} - \kappa_{1j} \kappa_{2i} K_{1ji} K_{2ij}) \right), \quad (56)\end{aligned}$$

где

$$I_{1ij}^{(m)} = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}(2\kappa_i h_m)}{4\kappa_i} + \frac{h_m}{2}, & \kappa_i = \kappa_j, \\ \frac{\operatorname{sh}(\kappa_i + \kappa_j) h_m}{2(\kappa_i + \kappa_j)} + \frac{\operatorname{sh}(\kappa_i - \kappa_j) h_m}{2(\kappa_i - \kappa_j)}, & \kappa_i \neq \kappa_j, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}I_{2ij}^{(m)} &= \begin{cases} \frac{1}{4\kappa_i} (1 - \operatorname{ch}(2\kappa_i h_m)), & \kappa_i = \kappa_j, \\ \frac{1 - \operatorname{ch}(\kappa_i + \kappa_j) h_m}{2(\kappa_i + \kappa_j)} + \frac{1 - \operatorname{ch}(\kappa_i - \kappa_j) h_m}{2(\kappa_i - \kappa_j)}, & \kappa_i \neq \kappa_j, \end{cases} \\ K_{sij} &= \begin{cases} 0, & p_{si} + p_{sj} \text{—четное число,} \\ \frac{2\kappa_{si}}{\kappa_{si}^2 - \kappa_{sj}^2}, & p_{si} + p_{sj} \text{—нечетное число.} \end{cases}\end{aligned}$$

Полученные выражения для матриц МГД-взаимодействия, диссипации, кинетической и потенциальной энергий используются в дальнейшем в численных исследованиях МГД-устойчивости поверхности раздела жидкостей.

### 3. ГРАНИЦА ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ

#### 3.1. Безразмерные параметры задачи

Как отмечалось выше, с точки зрения приложений наибольший интерес в данной задаче представляют критические значения геометрических и физических параметров рассматриваемой системы, соответствующие режиму возбуждения волн.

Введем безразмерный параметр

$$W = \frac{J_0 B_0}{(\rho_1 - \rho_2) g S}, \quad (57)$$

где  $S = l_1 l_2$  — площадь горизонтального сечения полости сосуда, содержащего жидкости. Параметр  $W$  характеризует, очевидно, отношение электромагнитных сил, действующих на жидкости, к силе тяжести и является одним из основных параметров, определяющих поведение рассматриваемой системы. В дальнейшем будем называть  $W$  параметром МГД-взаимодействия.

Обозначим через  $q$  совокупность всех остальных безразмерных параметров системы. В число этих параметров входят, в частности, геометрические безразмерные параметры:  $\bar{l} = l_2/l_1$ ,  $\bar{h}_k = h_k/L$ ,  $k = \overline{1, 4}$ , где  $L$  — характерный линейный размер задачи. Сразу же отметим, что в приведенных ниже результатах расчетов в качестве характерного линейного размера выбиралась величина  $L = S^{1/2}$ . Это объясняется тем, что для промышленных электролизеров площадь  $S$  определяет их мощность, так что при выборе оптимальных параметров электролизера заданной мощности удобно относить все линейные размеры к величине  $S^{1/2}$ .

В число безразмерных физических параметров входят отношения плотностей жидкостей  $\bar{\rho} := \rho_2/\rho_1$ , удельных электропроводностей сред  $\bar{\sigma}_k = \sigma_k/\sigma_1$ ,  $k = \overline{2,4}$  и числа Рейнольдса  $\mathbf{Re}_k = g^{1/2}L^{3/2}/\nu_k$ ,  $k = 1, 2$ . Таким образом, поведение рассматриваемой системы помимо  $W$  определяется совокупностью 11 параметров:

$$q = (\bar{l}, \bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4, \bar{\rho}, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_4, \mathbf{Re}_1, \mathbf{Re}_2).$$

Собственные числа рассматриваемой спектральной задачи зависят, очевидно, от всей совокупности безразмерных параметров, так что

$$\lambda_k = \gamma_k(W, q) + i \omega_k(W, q), k = 1, 2, \dots$$

В силу этих зависимостей спектральный признак устойчивости равновесия, сформулированный в предыдущем разделе, определяет области устойчивости (и неустойчивости) равновесных состояний системы в пространстве безразмерных параметров  $(W, q)$ . Граница области устойчивости в этом пространстве определяется равенством:

$$\max_k \gamma_k(W, q) = 0. \tag{58}$$

Разрешая уравнение (58) относительно  $W$ , найдем, очевидно, критические значения этого параметра в зависимости от  $q$ :  $W_{кр} = W_{кр}(q)$ . Зная  $W_{кр}(q)$ , уравнение границы области устойчивости можно записать в виде

$$W = W_{кр}(\bar{l}, \bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4, \bar{\rho}, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_4, \mathbf{Re}_1, \mathbf{Re}_2). \tag{59}$$

### 3.2. Результаты вычислений

Согласно равенства (59) построение границы области устойчивости равновесных состояний сводится к вычислению собственных чисел спектральной краевой задачи (57)-(58), выделению собственных чисел с максимальной вещественной частью с последующим уточнением значений безразмерных параметров  $W, q$ , при которых максимальная вещественная часть собственных чисел обращается в нуль. Расчет собственных чисел спектральной краевой задачи, как показано в предыдущем разделе, сводится к алгебраической задаче на собственные значения (57). Решение последней задачи осуществлялось численно с использованием QR-алгоритма. Уточнение параметров  $W, q$ , отвечающих нулевому значению максимальной вещественной части собственных чисел, проводилось с использованием стандартной процедуры метода дихотомии. Для реализации

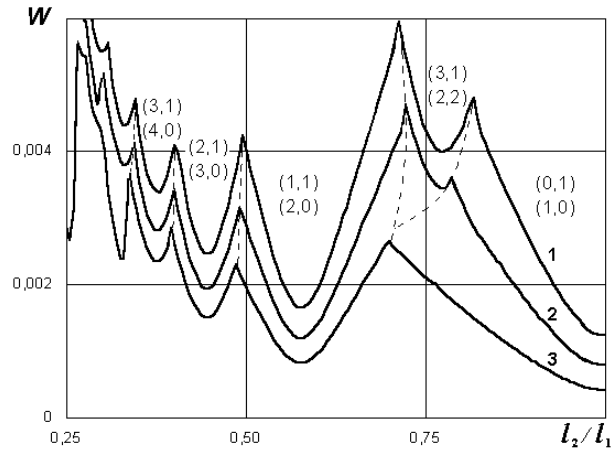


Рис. 2. Зависимость  $W_{кр}$  от соотношения горизонтальных размеров поверхности раздела жидкостей:  
1 -  $\sigma_4/\sigma_1 = 0.1$ ; 2 -  $\sigma_4/\sigma_1 = 0.05$ ; 3 -  $\sigma_4/\sigma_1 = 0.01$

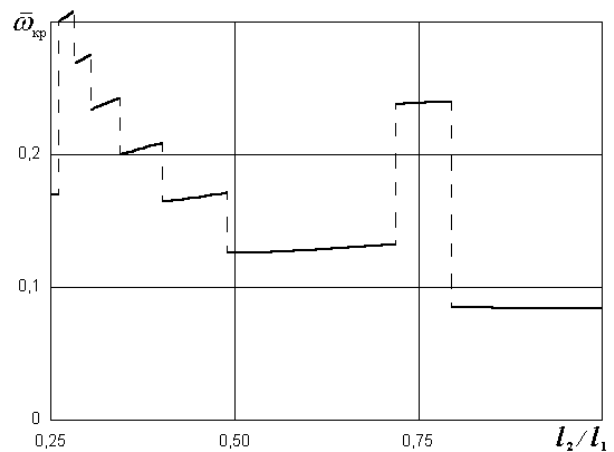


Рис. 3. Зависимость собственной частоты  $\bar{\omega}_{кр}$  от соотношения горизонтальных размеров поверхности раздела жидкостей

описанного процесса вычислений разработана программа расчета критических значений  $W_{кр}$  при произвольных значениях остальных безразмерных параметров  $q$ .

На рис. 2 приведены графики зависимости  $W_{кр}$  от соотношения горизонтальных размеров сосуда  $\bar{l} = l_2/l_1$  для различных значений параметра  $\bar{\sigma}_4$ . Для остальных параметров выбирались следующие значения:  $\bar{l} = 0.35$ ,  $\bar{h}_1 = 0.037$ ,  $\bar{h}_2 = 0.08$ ,  $\bar{h}_3 = 0.07$ ,  $\bar{h}_4 = 0.05$ ,  $\bar{\rho} = 0.913$ ,  $\bar{\sigma}_2 = 0.6 \cdot 10^{-4}$ ,  $\bar{\sigma}_3 = 0.82 \cdot 10^{-2}$ ,  $\mathbf{Re}_1 = 0.8 \cdot 10^8$ ,  $\mathbf{Re}_2 = 0.4 \cdot 10^8$ . Эти значения приблизительно соответствуют параметрам промышленных алюминиевых электролизеров.

Область устойчивости равновесных состояний

на рис. 2 расположена ниже соответствующей кривой. Изломы критических кривых объясняются сменой форм периодических колебаний жидкостей при изменении  $\bar{l}$ . Форма возбуждаемых волн определяется равенством:

$$\zeta = \sum_{k=1}^N (a_k \cos(\omega_{кр}t) - b_k \sin(\omega_{кр}t)) \zeta_k,$$

где  $a_k = Re(c_k)$ ,  $b_k = Im(c_k)$ . Как показали расчеты, обычно два коэффициента  $c_k$  по модулю значительно больше остальных. Соответствующие им функции  $\zeta_k$  будем называть главными взаимодействующими модами колебаний. Номера главных взаимодействующих мод ( $p_{1k}$ ,  $p_{2k}$ ) указаны на рис. 2 над гладкими участками критических кривых.

Обращает на себя внимание значительное влияние на устойчивость системы параметра  $\sigma_4/\sigma_1$ ; с увеличением этого параметра растет значение  $W_{кр}$ . Иными словами, увеличение удельной электропроводности нижнего электрода способствует расширению области МГД-устойчивости рассматриваемой системы.

Смена форм колебаний сопровождается скачкообразными изменениями собственной частоты  $\omega_{кр}$ . Введем безразмерную собственную частоту колебаний жидкостей  $\bar{\omega}$ , полагая  $\bar{\omega} = g^{-1/2} L^{1/2} \omega$ . Зависимость  $\bar{\omega}_{кр}$  от соотношения горизонтальных размеров поверхности раздела показана на рис. 3 для значений параметров, отвечающих кривой 2 на рис. 2. Вычисления показали, что собственная частота  $\omega_{кр}$  близка к собственным частотам гидродинамических колебаний системы, отвечающих главным взаимодействующим модам в отсутствие магнитного поля и токов. При совпадении этих частот параметр  $W_{кр}$  принимает локально минимальные значения. Таким образом, генерируемые на поверхности раздела жидкостей волны носят характер своеобразного резонансного взаимодействия собственных мод колебаний системы с совпадающими или близкими частотами.

На рис. 4 приведены графики зависимости  $W_{кр}$  от безразмерной толщины слоя нижней жидкости  $\bar{h}_1 = h_1/L$  для различных значений  $\bar{l}$ ; значения остальных параметров отвечают кривой 3 на рис. 2. Для малых  $\bar{h}_1$  зависимость  $W_{кр}(\bar{h}_1)$  носит примерно линейный характер, что полностью соответствует имеющимся экспериментальным данным [??, ??]. При увеличении  $\bar{h}_1$  параметр  $W_{кр}$  возрастает и выходит на установившиеся значения.

Расширение области устойчивости при увеличении  $\bar{h}_1$ , как и при увеличении  $\bar{\sigma}_4$ , легко объясняется тем, что с ростом этих параметров уменьша-

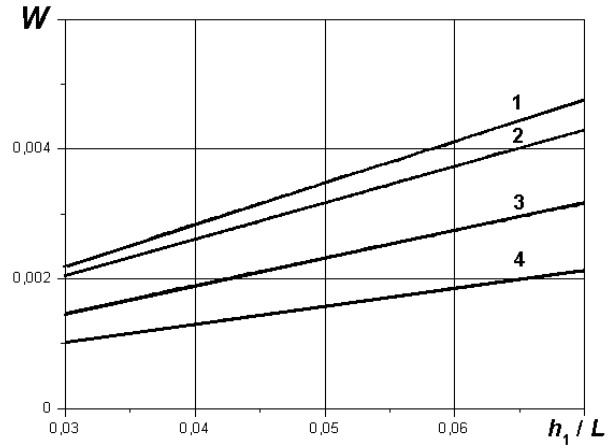


Рис. 4. Зависимость  $W_{кр}$  от толщины слоя нижней жидкости  $h_1/L$ :  
 $1 - \bar{l} = 0.35; 2 - \bar{l} = 0.52; 3 - \bar{l} = 0.71; 4 - \bar{l} = 0.75$

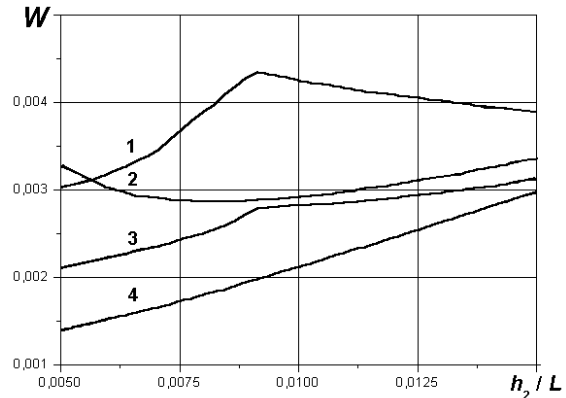


Рис. 5. Зависимость  $W_{кр}$  от толщины слоя верхней жидкости  $h_2/L$ :  
 $1 - \bar{l} = 0.35; 2 - \bar{l} = 0.52; 3 - \bar{l} = 0.71; 4 - \bar{l} = 0.75$

ются горизонтальные составляющие возмущений тока в расплаве, взаимодействие которых с вертикальным магнитным полем является причиной генерации волн.

Зависимость  $W_{кр}$  от толщины слоя верхней жидкости  $\bar{h}_2$  показана на рис. 5 для различных значений  $\bar{l}$ ; остальные безразмерные параметры выбирались такими же, как для кривой 3 на рис. 2. Как видно из приведенных графиков, увеличение  $\bar{h}_2$ , в отличие от  $\bar{h}_1$ , может приводить к уменьшению  $W_{кр}$ . Отметим, что на промышленных электролизерах нейтрализация влияния волновых процессов на процесс электролиза осуществляется подъемом анодного массива, т. е. путем увеличения параметра  $\bar{h}_2$ .

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках линейной теории проведено исследование устойчивости равновесных состояний системы несмешивающихся токнесущих жидкостей, взаимодействующих с внешним магнитным полем. Показано, что увеличение параметра МГД-взаимодействия (пропорционального силе тока и индукции магнитного поля) неизбежно приводит к потере устойчивости равновесия и появлению волн на поверхности раздела жидкостей. Показано также, что вязкость жидкостей определяет пороговый характер МГД-неустойчивости системы. В отсутствие вязкости равновесное состояние рассматриваемой системы всегда неустойчиво.

Электромагнитные силы, действующие на расплавы алюминия и электролита в промышленных электролизерах, малы по сравнению с гравитационными силами. Этим объясняется то, что длинноволновые колебания расплава, наблюдаемые на электролизерах большой мощности, имеют период, близкий к периоду обычных гравитационных волн. Решающую роль в процессе генерации волн играет, как правило, взаимодействие двух мод собственных колебаний жидкостей с совпадающими или близкими частотами (периодами).

В случае цилиндрического сосуда прямоугольного сечения основным параметром, определяющим собственные частоты колебаний рассматриваемой системы, является отношение размеров поперечного сечения сосуда. Рациональный выбор размеров сосуда (при сохранении площади поперечного сечения и других геометрических и физических величин) позволяет существенно повысить пороги волнообразования.

1. Ветюков М. М., Цыплаков А. М., Школьников С. Н. Электрометаллургия алюминия и магния. – М.: Металлургия, 1987. – 320 с.
2. Мещеряков С. М. О влиянии магнитных полей оцинковки на работу электролизных ванн // Цветные металлы. – 1955. – N 6. – С. 22–25.
3. Urata N., Mori S., Ikeuchi H. Behaviour of bath and molten metal in aluminium electrolytic cell // Keikin-zoku. – 1976. – 26, N 11. – P. 573–600.
4. Sele T. Instabilities of the metal surface in electrolytic alumina reduction cells // Metall. Trans. B. – 1977. – 8B. – P. 613–618.
5. Абрамов А. А., Скворцов А. П., Пряхин Г. С. Анализ причин нестабильной работы мощных алюминиевых электролизеров // Цветные металлы. – 1985. – N 6. – С. 44–47.
6. Sneyd A. D. Stability of fluid layers carrying a normal electric current // J.Fluid Mech. – 1985. – 156. – P. 223–236.
7. Исследование МГД-явлений в алюминиевых электролизерах большой мощности: Отчет о НИИ (промежуточн.) / Харьковский гос. ун-т им. А.М.Горького; №ГР 0186.0130987; Инв.№ 0288.0 069389. – Харьков, 1988. – 82 с.
8. Sneyd A. D., Wang A. Interfacial instability due to MHD mode coupling in aluminium reduction cells // J.Fluid Mech. – 1994. – 263. – P. 243–259.
9. Bojarevich V., Romerio M. V. Long waves instability of liquid metal - electrolyte interface in aluminium electrolysis cells: a generation of Sele's criterion // Euro.J.Mech., B/Fluids. – 1994. – 13 N 1. – P. 33–56.
10. Davidson P. A. An energy analysis of unstable, aluminium reduction cells // Euro.J.Mech., B/Fluids. – 1994. – 13 N 1. – P. 15–32.
11. Lindsay J. R., Davidson P. A. Application of new stability criteria to industrial cell design // Light Metals. – 1997. – P. 423–428.
12. Davidson P. A., Lindsay J. R. A new model of interfacial waves in aluminium reduction cells // Light Metals. – 1997. – P. 437–442.
13. Davidson P. A., Lindsay J. R. Stability of interfacial waves in aluminium reduction cells // J.Fluid Mech. – 1998. – 362. – P. 273–295.
14. Morris S. J. S., Davidson P. A. Hydromagnetic edge waves and instability in reduction cells // J.Fluid Mech. – 2003. – 493. – P. 121–130.
15. Деркач А. С., Скворцов А. П., Цибуков И. К., Шрамко В. А., Калимов А. Г., Сведенцов М. Л. Трехмерная модель расчета МГД-параметров алюминиевого электролизера // Цветные металлы. – 2000. – № 1. – С. 30–34.
16. Lukyanov A., El G., Molokov S. Instability of MHD-modified interfacial gravity waves revisited // Physics Letters A. – 2001. – 290. – P. 165–172.
17. Kurenkov A., Thess A., Zikanov O., Segatz M., Droste Ch., Vogelsang D. Stability of aluminium reduction cells with mean flow // Magnetohydrodynamics. – 2004. – 40 N 2. – P. 203–212.
18. Sun H., Zikanov O., Ziegler D. P. Non-linear two-dimensional model of melt flows and interface instability in aluminum reduction cells // Fluid Dynamics Research. – 2004. – 35. – P. 255–274.
19. Sun H., Zikanov O., Finlayson B. A. Effect of background melt flow and interface distortion on the stability of Hall-Heroult cells // Magnetohydrodynamics. – 2005. – 41 N 3. – P. 273–287.
20. Борисов И. Д., Никифоров С. А., Пацегон Н. Ф., Руднев Ю. И., Скворцов А. П. Математическое моделирование МГД-процессов в алюминиевых электролизерах // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки. – 2002. – N 1. – С. 195–199.
21. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
22. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970. – 564 с.
23. Черноусько Ф. Л. Динамика твердого тела с полостями содержащими вязкую жидкость. – М.: ВЦ АН СССР, 1968. – 342 с.