

УДК 532.526

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОДКОВООБРАЗНОГО ВИХРЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

А. А. ГУРЖИЙ*, В. В. МЕЛЕШКО**,
Е. И. НИКИФОРОВИЧ*, Р. Дж. АДРИАН***

* Институт гидромеханики НАН Украины, Киев,

** Национальный университет им.Т.Г.Шевченко, Киев,

*** Иллинойский университет в Урбане-Шампейн, Чикаго, США

Получено 19.06.2005

Рассматривается взаимодействие системы подковообразных (шпилькообразных) вихрей в пограничном слое с профилем невозмущенного ламинарного и усредненного турбулентного слоев над твердой поверхностью. Сформирована модель вихря, основанная на тонкой вихревой трубке в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. Проведен сравнительный анализ кинематических и динамических характеристик результатов численного моделирования с результатами реального эксперимента и известными теоретическими решениями. Изучены основные закономерности взаимодействия системы подковообразных вихревых структур в сдвиговом течении над твердой поверхностью. Сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными дает незначительное отклонение в скорости удаления подковообразных вихревых структур от твердой поверхности. Эта скорость характеризуется углом Θ . Данные численного моделирования и эксперимента совпадают, $\Theta \approx 6^\circ$. Замечено, что скорость удаления вихрей остается неизменной в течение достаточно долгого промежутка времени и, вероятно, не зависит от геометрии вихря. Исследования показывают, что динамика подковообразных вихрей над твердой плоскостью определяется в основном типом профиля сдвигового течения и толщиной пограничного слоя, а не абсолютным значением скорости набегающего потока.

Розглядається взаємодія системи підковоподібних (шпилькоподібних) вихорів у прикордонному шарі з профілем необуреного ламінарного і усередненого турбулентного шарів над твердою поверхнею. Сформовано модель вихора, яка заснована на тонкій вихревій трубці в рамках моделі ідеальної нестисливої рідини. Проведено порівняльний аналіз кінематичних і динамічних характеристик результатів чисельного моделювання з результатами реального експерименту і відомих теоретичних рішень. Вивчено основні закономірності взаємодії системи підковоподібних вихрових структур у сдвиговій течії над твердою поверхнею. Порівняння результатів чисельного моделювання з експериментальними даними дає незначне відхилення у швидкості віддалення підковоподібних вихрових структур від твердої поверхні. Ця швидкість характеризується кутром Θ . Дані чисельного моделювання та експерименту збігаються, $\Theta \approx 6^\circ$. Помічено, що швидкість віддалення вихорів залишається незмінною протягом досить довгого проміжку часу і, імовірно, не залежить від геометрії вихора. Дослідження позують, що динаміка підковоподібних вихорів над твердою площиною визначається в основному типом профілю сдвигової течії і товщиною прикордонного шару, а не абсолютним значенням швидкості потоку, що набігає.

The interaction of system of horseshoe (hairpin) vortices in a boundary layer with profile of unperturbed laminar and averaged turbulent layers above a firm surface is considered. A vortex model based on thin vortex tube within the framework of model of an ideal incompressible fluid is formed. The comparative analysis of kinematic and dynamic characteristics of results of numerical modeling with results of real experiment and known theoretical solutions is carried out. The main regularity of interaction of hairpin system of vortex structures in shift flow above a firm surface are investigated. The comparison of numerical modeling results with experimental data gives an insignificant deviation in a removal velocity of horseshoe vortical structures from a firm surface. Removal velocity of vortices from firm surfaces is characterized by a corner Θ . The numerical modeling data and experimental data coincide, $\Theta \approx 6^\circ$. Note that the removal velocity of vortices remains constant during enough long time interval and, probably, does not depend on a vortex geometry. Researches shows that dynamics of horseshoe vortices above a firm plane is defined basically by the type of a shift flow profile and boundary layer thickness, instead of absolute value of an external velocity flow.

ВВЕДЕНИЕ

В течение многих десятилетий усилия исследователей при изучении турбулентного пограничного слоя были направлены на изучение усредненного движения пульсаций поля скорости. Статистическое описание и некоторые модели турбулентности [1–5] игнорируют в пограничном слое вклад в результирующее поле скорости крупномасштабных, квази-периодических вихревых образований. Имеется ряд экспериментальных работ [6–10], в которых была обнаружена определенная органи-

зованность крупномасштабных вихревых структур в турбулентном пограничном слое. Однако полученные в этих работах результаты, связанные с изучением основных особенностей и закономерностей вихревого движения в пограничных областях течения, несоизмеримы с усилиями, которые были направлены на изучение “внутренней” структуры турбулентности, что в конечном итоге и отражает фундаментальную сложность явления турбулентности [1, 11, 12]. Вот почему исследования внутренней структуры турбулентности имеют большее значение с позиций понимания динамики пограничного слоя, управления его развития и, в ко-

нечном итоге, снижения сопротивления движения тел в сплошной среде.

Общепринято [1–3, 12] что именно исследование развития усредненных параметров пограничного слоя при умеренных числах Рейнольдса ($Re < 5000$) внесли определяющий вклад в понимание внутренней структуры турбулентного пограничного слоя. Несмотря на то, что методы усреднения явно не объясняют существование когерентных движений в турбулентности, отдельный вид мгновенного упорядоченного движения можно проследить и в усредненных параметрах турбулентного погранслоя. Примером может служить высокая корреляция продольной и поперечной составляющих пульсаций скорости в вязком подслое и в переходных областях [1, 11, 13, 14].

В последнее время значительные усилия многих исследователей в области турбулентного пограничного слоя направлены на обнаружение и изучение особенностей эволюции крупномасштабных вихревых структур. Вероятно, начиная с работы [15], в литературе стало доступным понятие “когерентное движение” для турбулентных потоков. Большой вклад в понимание особенностей эволюции крупномасштабных вихревых структур в пограничном слое внесли многочисленные экспериментальные исследования (интересный обзор работ можно найти, например, в [1, 13]). Хотя большинство экспериментов остается восприимчивым к предыстории развития потока и ограничено низкими числами Рейнольдса Re , современные методы визуализации обладают высокой разрешающей способностью и большим числом каналов регистрации информации, что позволяет обрабатывать большие поля скорости турбулентного пристеночного течения [16–18]. Современные экспериментальные методы регистрации полей течения в пограничном слое и мощные вычислительные средства, привлекаемые к обработке данных, позволяют успешно выделять в поле скорости пространственные вихревые структуры и проследить их развитие в пограничном слое на различных этапах [19–21].

Тщательно проведенные экспериментальные исследования во многом стимулировали численно-аналитические методы изучения крупномасштабных вихревых структур в пограничном слое. Среди многочисленных подходов к решению задач течения жидкости в пограничном слое можно выделить, пожалуй, два основных направления [1, 22, 23], интенсивно развиваемых в вычислительной гидродинамике: моделирование течения жидкости в приповерхностном слое системой крупномасштабных вихрей и прямое численное моделирование

течения в пограничном слое.

К первому направлению можно отнести во многом оказавшиеся удачными попытки моделирования пристеночной турбулентности системой вихрей малого масштаба. Такой подход основан на экспериментально выявленных свойствах мелкомасштабной турбулентности. Замечено [5], что поведение мелкомасштабных вихрей обладает определенной универсальностью и относительной стабильностью, в то время как крупномасштабные вихри в основном определяют геометрию и параметры потока. Отметим, что прямое численное моделирование течения в пограничном слое в отношении широкого диапазона масштабов вихрей встречает множество вычислительных трудностей, является весьма трудоемким и требует больших вычислительных ресурсов [22, 24].

В настоящее время не существует единой методики выделения когерентных вихревых структур в экспериментальных срезах полей скоростей пристеночного течения. Несмотря на то, что имеется ряд оригинальных методов визуализации течения (см., например, [16, 21, 25]), часто исследователи прибегают к численным методам обработки полей, среди которых следует указать методы идентификации вихревых структур из систем вихревых линий [5], из распределений амплитуды вихрей [26], из собственных значений тензора деформаций [27], из продольных областей низкого давления [22] и некоторые другие. К сожалению, все упомянутые численные и экспериментальные методы не являются универсальными. Обсуждение их преимуществ и недостатков продолжается по сегодняшний день. По этой причине в настоящее время существует множество различных форм и топологий вихрей в турбулентном пограничном слое: продольные вихревые структуры [28], поперечные вихри различного масштаба [29], петлеобразные вихри [20, 30, 31].

Во многих экспериментах, среди широкого класса выделенных трехмерных вихрей, особое место занимают так называемые подковообразные, или шпилькообразные, вихревые структуры [22, 32]. На рис. 1 приведен снимок [33], на котором запечатлен момент образования системы подковообразных вихревых структур на последних стадиях развития ламинарного пограничного слоя на пластине. В диапазоне чисел Рейнольдса $500 < Re < 17500$ такие вихревые структуры являются доминирующими в области раздела пограничного слоя с внешним течением. Подковообразные вихри имеют вытянутую вдоль потока форму, образуя характерный угол $\approx 45^\circ$ к плоскости стенки [22, 23]. При малых числах Рейнольдса под-

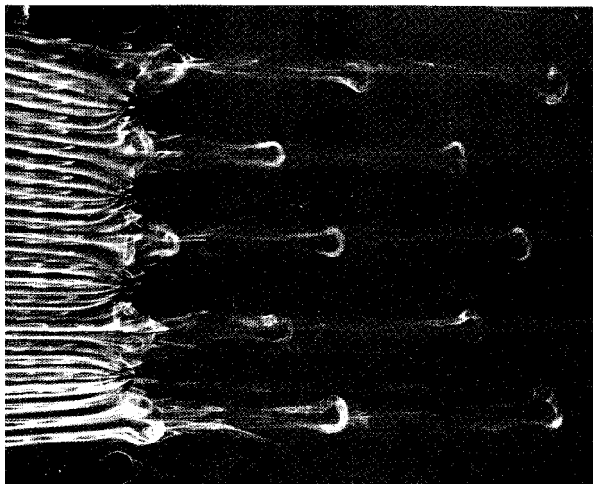


Рис. 1. Подковообразные вихревые структуры в ламинарном пограничном слое (вид сверху) [33]

ковообразные вихри менее вытянуты и часто образуют вихревые пакеты, состоящие из двух или нескольких крупномасштабных вихрей [19, 34, 35].

Одну из первых моделей подковообразных вихрей, полученную из уравнения переноса вихрей, предложил Теодорсен [36]. В этой модели вихри формируются в пристеночной области, где градиенты скорости еще остаются небольшими, с завихренностью, наведенная компонента скорости которой направлена против течения. Подход Теодорсена был предложен для мгновенного детерминированного описания динамики пристеночной турбулентности. В этой модели принято склонение вихря под углом 45° вниз по течению по отношению к твердой поверхности. Несмотря на большое количество допущений, вихревая модель Теодорсена удовлетворительно описывает локальную структуру поля скорости в пристеночной турбулентности, которая наблюдается во многих экспериментах [17–19, 28, 32, 34].

Более сложная концептуальная модель пограничного слоя предложена Блэком (1966) (подробности можно найти в обзоре [22]). Рассматривается система подковообразных вихрей одного масштаба, но различного размера на последовательных стадиях своего роста в пограничном слое. Начальная конфигурация каждого вихря представляет прямоугольный четырехугольник. В подходе Блэка пакет вихревых структур, несмотря на свою идеализированную геометрию, удовлетворительно описывает медленные движения жидкости через плоскость вихря, а также процессы разрушения и зарождения новых вихревых структур, которые

приводят к неустойчивому развитию и разрушению в конечном итоге пограничного слоя.

Несколько позже Смит [32] представил другую концептуальную модель подковообразных вихрей в пристеночном течении. Его модель обладает более сложной структурой и в значительной степени описывает более точно кинематику и динамику подковообразных вихрей (при сравнении с данными экспериментов) и их реакцию на малые возмущения в потоке. Модель позволяет качественно анализировать захват сдвиговым течением внешнего потока, образование вторичной завихренности в пограничном слое. Показано, что изначально сформированный подковообразный вихрь, с течением времени вырывается из пограничного слоя за счет взаимодействия самоиндукции и внешнего сдвигового течения. При этом опоры вихря остаются в пристеночной области, формируя поток жидкости из пограничного слоя во внешнее течение между его опорами [37].

Несмотря на обширный теоретический и экспериментальный материал, сегодня остаются недостаточно изученными особенности взаимодействия подковообразных вихревых структур в турбулентном пограничном слое. Каждая из рассматриваемых моделей достаточно точно описывает процессы формирования, эволюцию и отрыв подковообразных вихревых структур, а также некоторые вторичные эффекты (например, перенос жидкости через центральную часть подковообразных вихрей, зарождения и разрушения вторичных вихревых структур меньшего масштаба и некоторые другие). Однако анализ влияния параметров сдвигового течения на особенности эволюции одиночного подковообразного вихря (или пакета таких вихревых структур, которые наблюдаются в эксперименте, рис 1) до настоящего времени исследователями практически не проводился.

Цель настоящей работы – исследование механизмов неустойчивости ламинарного и турбулентного пограничного слоев на основе моделирования динамики вихревых структур. Объектом исследования является система подковообразных вихревых структур, сформированных на плоской пластине на основе данных реального эксперимента. Подход использует начальную конфигурацию вихрей, которая наблюдается в реальном эксперименте, и вычисляет ее эволюцию во времени. Последовательность подковообразных вихрей смоделирована системой вихревых трубок и вложена в невозмущенное сдвиговое течение, которое представляет собой пограничный слой плоской пластины в эксперименте. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными.

1. МОДЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Для достижения главной цели исследований в настоящем разделе формируется численная модель для изучения динамики когерентных вихревых структур. Подковообразные вихри представляются системой тонких вихревых трубок, пространственное положение которых определяется формой подковообразных вихревых структур в реальном эксперименте. Внешнее пристеночное течение задается в виде невозмущенного пограничного слоя, в котором развиваются вихри. Основное внимание исследований направлено на процесс разрушения и трансформации потока в турбулентный. Настоящие исследования основаны на экспериментах, представленных в работах [8, 9], а полученные результаты сравниваются с данными прямого численного моделирования [23].

1.1. Экспериментальные данные

В переходном режиме течения жидкости пограничного слоя профиль поля скорости развивается от первоначально гладкого ламинарного распределения к заключительному, турбулентному профилю скорости. В экспериментах можно наблюдать устойчивые трехмерные возмущения в переходной области потока. Они могут быть описаны как Λ -образные (или подковообразные) вихри. Такие вихревые структуры направлены по течению (часто их называют вихрями K -типа), иногда вихри образуют ступенчатые структуры вниз по течению (говорят, система вихрей H -типа), часто в эксперименте наблюдается их комбинация в зависимости от возбужденных резонансных мод. Экспериментальные исследования показывают, что в достаточно широком диапазоне параметров течения наклон плоскости подковообразных вихревых структур к твердой поверхности (угол наклона) составляет величину порядка 45° , в то время как склонение пакета (прямая, проведенная через точки вихрей, максимально удаленные от твердой поверхности) лежит в достаточно широких пределах, $(5 \dots 30)^\circ$ (см., например [20, 34, 35]).

Схематический вид экспериментальной установки показан на рис. 2. Опыты [9, 10] проводились при обтекании потоком воздуха со скоростью $U_\infty = 9.18$ м/с плоской пластинки. Начальные возмущения, вносимые в исследуемый поток, генерировались тонкой резиновой лентой, помещенной на расстоянии $x=250$ мм от края пластинки. Частота колебаний ленты в эксперименте составила

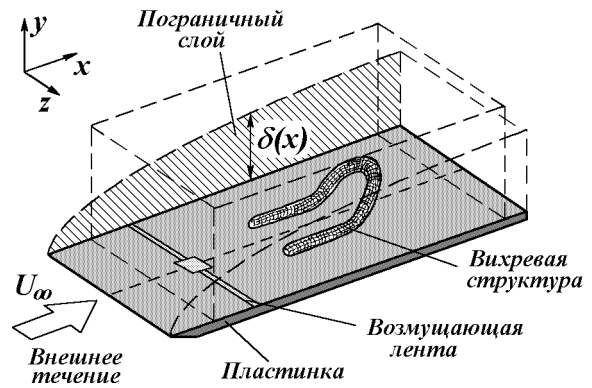


Рис. 2. Схема экспериментальной установки для генерации подковообразных вихрей в эксперименте [9]

$f_1=96.4$ Гц. Поле скорости потока над твердой поверхностью измерялось в области от $x_{ст}=300$ мм до $x_{фин}=700$ мм с помощью раскаленного проводного анемометра. Амплитуда вносимых в поток колебаний подбиралась такой, чтобы первые детектируемые амплитуды возмущений в поле скорости регистрировались на расстоянии $x=430$ мм от края пластинки. Для фиксации поперечной координаты образующихся в потоке вихревых структур в эксперименте применялась система периодически расположенных турбулезаторов, прикрепленных к возмущающей ленте.

Визуализация течения и детектирование вихревых структур значительно усложняются при наложении наведенного ими поля скорости на нестационарное пристеночное течение. Их суперпозиция приводит к различной интерпретации деталей изучаемого потока [38]. Подковообразные вихри являются не просто связанной областью, а имеют дополнительные переходные области (вихревые мосты) и некоторое число обрывов. В экспериментах замечено, что возмущенный поток, имеющий место около плоскости симметрии, может сформировать систему отдельных дискретных вихрей с достаточно сложной структурой. В результате процесс выделения вихревых структур в сдвиговом нестационарном течении становится достаточно проблематичным. В этом случае рекомендуется применять методы сглаживания и интерполяции [38], которые позволяют выделять из поля завихренности области, изначально принадлежавшие исследуемой вихревой структуре. Один из примеров выделения вихря из потока над плоской пластинкой из результатов эксперимента представлен на рис. 3, на котором пространственные координаты пронормированы на толщину пограничного

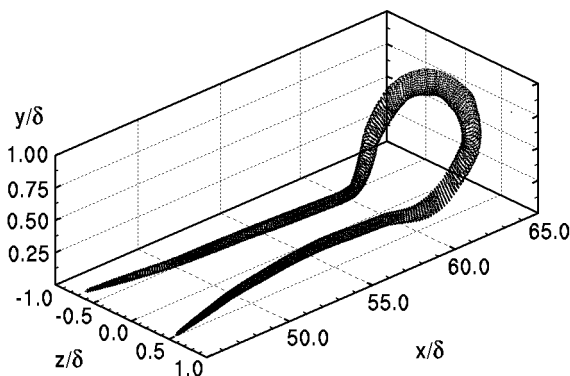


Рис. 3. Пример выделения подковообразного вихря из экспериментальных данных распределения поля скорости в пограничном слое над пластинкой

слоя δ в головной части вихря.

1.2. α -модель тонкой вихревой трубки

Один из подходов, который часто используется при численном моделировании динамики вихревых структур, основан на представлении пространственного положения реального вихря с конечным поперечным сечением в виде бесконечно тонкой *вихревой трубки*, или *вихревой нити* [20, 39]. Из условия конечности циркуляции в пределах бесконечно маленького поперечного сечения вихря (*ядра вихря*) следует, что завихренность имеет бесконечную величину. В этом случае поле завихренности вдоль пространственной кривой C , которая описывает положение вихря, может быть представлено выражением

$$\omega(\mathbf{x}) = \Gamma \int_C \delta[\mathbf{x} - \mathbf{r}(\xi)] \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi'} d\xi', \quad (1)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi)$ – радиус-вектор текущей точки вихря, который является функцией длины образующей ξ' вихря от произвольно выбранной начальной точки (маркера); δ -функция Дирака; Γ – интенсивность вихревой нити,

$$\Gamma = \int_S \omega \cdot d\mathbf{S} = \text{const}, \quad (2)$$

S – площадь поперечного сечения вихря, $d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}$, \mathbf{n} – единичная нормаль к поперечному сечению вихря. В рамках модели идеальной несжимаемой жидкости циркуляция вихря остается величиной неизменной [2, 40].

Вычисление поля скорости, наведенного вихрем в безграничной среде, основано на интегрировании закона Био-Савара

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{x} - \mathbf{r}(\xi')] \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi'}}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}'|^3} d\xi' + \nabla \phi, \quad (3)$$

где ϕ – потенциал скорости, определяющий распределение поля скорости, накладываемого внешним сдвиговым течением. Закон является хорошим приближением для конечного ядра реальной вихревой структуры до тех пор, пока \mathbf{x} остается на расстояниях, больших, по сравнению с характерным радиусом ядра, для любой из частей рассматриваемого вихря.

С вычислительной точки зрения, начальное распределение завихренности в пределах вихревой трубки должно быть заданным. Однако бесконечно малая толщина вихревой нити совместно с бесконечной завихренностью приводит к логарифмической особенности при вычислении самоиндуцированной скорости и, как следствие, к бесконечной скорости распространения вихревой нити. По этой причине вихревые методы обычно используют такие модельные представления вихревой трубки, в которых завихренность гладко распределена в пределах конечного поперечного сечения вихревого ядра с характерным радиусом σ [20, 39].

Вероятно, впервые Розенхед (1930) и позднее Мур (1965) предприняли попытку усовершенствования модели тонкой вихревой трубки (подробности можно найти в [41, 42]). В их подходах математическое описание нормированного распределения завихренности вдоль вихревой трубки задается в виде

$$\gamma(\mathbf{x} - \mathbf{r}(\xi')) = \frac{3\alpha\sigma^2}{4\pi(|\mathbf{x} - \mathbf{r}(\xi')|^2 + \alpha\sigma^2)^{5/2}} \quad (4)$$

с нормировкой

$$\int \gamma(\mathbf{x} - \mathbf{r}(\xi')) d\mathbf{x} = 1. \quad (5)$$

В приведенных уравнениях \mathbf{x} – локальная координата; \mathbf{r} описывает пространственное положение трубки в зависимости от значения параметра ξ' ; σ – характерный радиус ядра вихря, который рассматривается как свободный параметр; α – некоторая константа, значение которой будет определено позднее.

Если заменить функцию Дирака в выражении (1) введенной ранее нормированной функцией распределения завихренности (4), то получим выражение для поля завихренности в вихре, который в

в общем случае может иметь произвольную форму

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \Gamma \int_C \gamma(\mathbf{x} - \mathbf{r}(\xi')) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi'} d\xi'. \quad (6)$$

Представление этих результатов известно в литературе как *приближение Розенхеда-Мура*.

Если рассматриваемая система состоит из N вихревых трубок, то суммирование следует проводить по всем трубкам. В результате выражение для наведенного поля скорости принимает вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = - \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{4\pi} \int_{r_j} \frac{[\mathbf{x} - \mathbf{r}(\xi')] \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi'}}{[|\mathbf{x} - \mathbf{r}_j|^2 + \alpha \sigma_j^2]^{3/2}} + \nabla \phi, \quad (7)$$

где Γ_j – циркуляция соответствующей вихревой трубки, $j = 1, \dots, N$.

В предложенной модели используется допущение, что изменения в распределении завихренности тонкой вихревой трубки на малых масштабах не являются существенными. Если учесть, что размер поперечного сечения трубки мал по сравнению с размером вихревой структуры и с расстоянием до твердой поверхности, то оказывается, что влияние стенки не приводит к существенным деформациям поперечного сечения вихревой трубки. В этих условиях предложенная вычислительная модель находит хорошее соответствие с имеющимися экспериментальными данными и данными прямого численного моделирования [41, 42].

Для сокращения вычислений в правой части выражения (7) может быть достигнута симметрия при замене σ_j на геометрическое среднее значение $\sigma_{ij} = \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}$ для тонких вихревых трубок с индексами i и j при определении взаимных наведенных компонент скорости. В этом случае получается точное выполнение закона сохранения линейного и углового импульса, а выражение для определения наведенных компонент скорости принимает следующий вид [41]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_i(\xi, t)}{\partial t} = & \quad (8) \\ = - \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{4\pi} \int_{r_j} \frac{[\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j(\xi', t)] \times \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \xi'}}{[|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 + \alpha \sigma_{ij}^2]^{3/2}} d\xi' + \nabla \phi. \end{aligned}$$

В приведенном выражении параметр α выбирается таким, чтобы наведенные компоненты скорости, вычисленные с помощью (8), совпадали с результатами других известных модельных представлений тонкой вихревой трубки. В частности,

в работе [41] показано, что для вихревого кольца радиуса R с поперечным малым сечением σ ($\sigma \ll R$) и Гауссовским распределением завихренности в поперечном сечении вихревого кольца, получается значение $\alpha = 0.413$. Для других распределений завихренности значение α отличается незначительно от указанной величины. В дальнейшем предложенную в работе [41] модель вихря будем называть как α -модель вихревой трубки.

В более общем случае, радиус поперечного сечения вихревого ядра может меняться со временем. Часто для того, чтобы сохранять полный объем вихревой трубки при численном моделировании, дополнительно навязывают условие сохранения объема вихревой трубки

$$\frac{d}{dt}(\sigma_i^2 L_i) = 0, \quad (9)$$

где $L_i(t)$ – мгновенная длина сегмента рассматриваемой вихревой трубки при текущем радиусе ядра σ_i . Для этого случая в работе [41] было показано, что полная энергия системы вихрей сохраняется вплоть до того момента, когда вихревые трубки, приближаясь друг к другу, начинают по результатам вычислений накладываться друг на друга.

При численном анализе динамики подковообразных вихревых структур каждая тонкая вихревая трубка моделируется трехмерной пространственной кривой $\mathbf{r}_i(\xi_i, t)$, где i – номер трубки, а ξ_i – текущая координата (длина) пространственной кривой. Для реализации численного алгоритма вихри формируются системой дискретных узловых точек (часто их именуют *маркерами*) и в некоторых случаях координата на вихре ξ_i может быть заменена текущим номером узла. Динамика вихря описывается движением во времени этих узловых точек. При необходимости пространственная кривая может быть восстановлена по этим узловым точкам в рассматриваемый момент времени.

Из представления линии системой маркеров следует, что каждая тонкая вихревая трубка может рассматриваться как совокупность прямолинейных отрезков. Поэтому скорость, наведенная одной из трубок, является суммой наведенных компонент скоростей всеми составляющими вихревую трубку отрезками. Последующее суммирование вкладов в поле скорости, наведенное всеми вихревыми трубками в рассматриваемой системе, приводит к определению поля скорости в текущей точке течения.

Поскольку отрезок вихревой трубки является прямой линией, интеграл в (8) может быть вычислен аналитически для каждого текущего отрезка

трубки. Если n – индекс узловой точки (маркера), то каждый отдельный отрезок тонкой вихревой трубки может быть представлен вектором по отношению к его начальной $\mathbf{r}_j(n, t)$ и конечной $\mathbf{r}_{j+1}(n, t)$ точкам. В этом случае вектор направления представляет разность

$$\mathbf{l} = \mathbf{r}_j(n + 1, t) - \mathbf{r}_j(n, t) \quad (10)$$

и отрезок вихревой трубки может быть определен как

$$\mathbf{r}_j(\xi') = \mathbf{r}_j(n, t) + \xi' \mathbf{l}, \quad 0 \leq \xi' \leq 1. \quad (11)$$

Таким образом, динамика системы подковообразных вихрей описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с соответствующими начальными условиями для каждого из маркеров, которые задают пространственное положение тонкой вихревой трубки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_i(m, t)}{\partial t} = & - \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{4\pi} \sum_{n=1}^{N_m} \left[\frac{1-p}{\sqrt{(1-p)^2 + \lambda^2}} + \frac{p}{q} \right] \times \\ & \times \frac{[(\mathbf{x} - \mathbf{r}_j(n, t)) \times \mathbf{l}]}{\lambda^2 |\mathbf{l}|^3} \end{aligned} \quad (12)$$

с обозначениями

$$\begin{aligned} p &= \frac{\mathbf{l} \cdot (\mathbf{r}_i(m, t) - \mathbf{l}_j(n, t))}{|\mathbf{l}|^2}, \\ \lambda^2 &= q^2 - p^2, \\ q &= \sqrt{\frac{|\mathbf{r}_i(m, t) - \mathbf{r}_j(n, t)|^2 + \alpha(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}{|\mathbf{l}|^2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь m представляет индекс маркера текущей вихревой трубки с номером i .

Предложенная модель тонкой вихревой трубки с точки зрения организации вычислений обладает определенными преимуществами и некоторыми недостатками по сравнению с другими методами, используемыми в вычислительной гидродинамике при решении аналогичных задач [24]. Прежде всего к достоинствам модели можно отнести:

- аналитическое интегрирование закона Био-Савара;
- учет изменения поперечного сечения вихревой трубки.

Среди недостатков следует указать:

- представление вихревой трубки ломаной кривой;

- необходимость формирования тонкой вихревой трубки большим числом маркеров.

В дальнейшем, при моделировании движения вихря над твердой поверхностью необходимо выполнить граничные условия на плоской твердой поверхности:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\sigma} = 0, \quad (14)$$

где \mathbf{n} – нормальный вектор к поверхности σ . Это условие часто трактуется как граничное условие *непроницаемости*. Несмотря на то, что оно соответствует модели идеальной жидкости, выражение (14) часто используется при моделировании течений в вязком пограничном слое [1, 20, 22, 38].

Приведенное граничное условие можно выполнить, воспользовавшись *методом изображений* [2, 24, 39, 44], который предусматривает отображение рассматриваемой вихревой трубки относительно плоской твердой поверхности, $y = 0$. При этом формируется мнимый вихрь, интенсивность которого берется с противоположным знаком. В результате рассматривается движение уже двух вихрей (действительного и мнимого), но в безграничном пространстве. Нормальная компонента скорости к твердой поверхности при $y = 0$ в силу симметрии течения автоматически обращается в нуль.

Таким образом, наведенное поле скорости в точке $\mathbf{r}_j(n, t) \equiv \mathbf{x}$ системой N вихрей над твердой поверхностью во внешнем течении для α -модели тонкой вихревой трубки определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = & - \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{4\pi} \sum_{n=1}^{N_m} \left[\frac{1-p}{\sqrt{(1-p)^2 + \lambda^2}} + \frac{p}{q} \right] \times \\ & \times \frac{[(\mathbf{x} - \mathbf{r}_j(n, t)) \times \mathbf{l}]}{\lambda^2 |\mathbf{l}|^3} + \\ & + \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{4\pi} \sum_{n=1}^{N_m} \left[\frac{1-p^*}{\sqrt{(1-p^*)^2 + (\lambda^*)^2}} + \frac{p^*}{q^*} \right] \times \\ & \times \frac{[(\mathbf{x} - \mathbf{r}_j^*(n, t)) \times \mathbf{l}^*]}{(\lambda^*)^2 |\mathbf{l}^*|^3} + \nabla \phi, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} p &= \frac{\mathbf{l} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{l}_j(n, t))}{|\mathbf{l}|^2}, \quad p^* = \frac{\mathbf{l}^* \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{l}_j^*(n, t))}{|\mathbf{l}^*|^2}, \\ \lambda^2 &= q^2 - p^2, \quad (\lambda^*)^2 = (q^*)^2 - (p^*)^2, \\ q^2 &= \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_j(n, t)|^2 + \alpha(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}{|\mathbf{l}|^2}, \\ (q^*)^2 &= \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_j^*(n, t)|^2 + \alpha(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}{|\mathbf{l}^*|^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\mathbf{r}_j(n, t)$ – пространственная кривая, описывающая положение основного (реального) вихря, а

$\mathbf{r}_j^*(n, t)$ – его отображение относительно твердой поверхности, $y = 0$.

1.3. ε -модель тонкой вихревой трубки

В настоящих исследованиях предлагается использовать другую модель вихревой трубки для численного анализа динамики подковообразного вихря в пограничном слое. Известно [39, 40], что тонкая вихревая трубка оказывается наиболее подходящей при описании поля скорости течения в точках, удаленных от вихревых структур на достаточно большие расстояния по сравнению с радиусом поперечного сечения вихрей. Выражение для поля скорости, наведенного одиночной вихревой трубкой, следует из закона Био-Савара [2, 40]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_C \frac{[\mathbf{x} - \mathbf{r}(\xi')] \times \frac{\partial \mathbf{r}(\xi')}{\partial \xi'} d\xi'}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(\xi')|^3}, \quad (17)$$

где интегрирование необходимо проводить вдоль кривой C , описывающей пространственное положение вихревой трубки.

Интегралы в (17) имеют общую структуру вида

$$U = \int F(s) ds. \quad (18)$$

Характерный пример изменения подинтегральной функции $F(s)$ для текущего маркера $s = 0$ (здесь s – текущее расстояние до рассматриваемого маркера вдоль тонкой вихревой трубки) показан сплошной линией на рис. 4. Видно, что при s , стремящемся к нулю, $F(s)$ стремится к бесконечности. В результате получаем бесконечное значение самоиндуцированной скорости для бесконечно тонкой вихревой нити. Упомянутая ранее α -модель устраняет эту сингулярность посредством введения в знаменатель выражения (8) малой величины $\alpha\sigma_{ij}^2$. В этом случае в подинтегральной функции устраняется сингулярность (штрихпунктирная линия на рис. 4). Штриховкой на рисунке показана площадь, численное значение которой равно величине самоиндуцированной скорости, наведенной отрезком тонкой вихревой трубки. Заметим, что на больших расстояниях от рассматриваемого участка вихря, $\sigma \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, слагаемое $\alpha\sigma_{ij}^2$ в (8) существенного влияния на результат не оказывает.

В настоящих исследованиях динамики вихревых структур в пограничном слое предлагается другой способ преодоления сингулярности

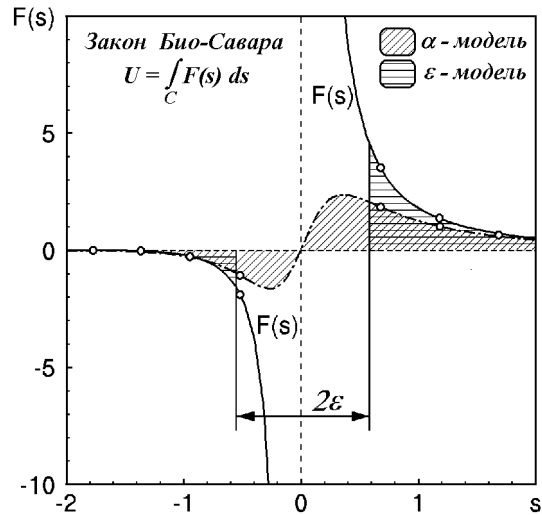


Рис. 4. Интегрирование выражений закона Био-Савара в различных модельных представлениях тонких вихревых структур

при интегрировании закона Био-Савара. Основная идея заключается во введении вдоль тонкой вихревой трубки некоторой $\pm\varepsilon$ -окрестности, окружающей каждый маркер с обеих сторон (см. рис. 4). Вклад в поле скорости исследуемого маркера вносят все участки трубки s , за исключением ε -окрестности. Площадь под кривой $F(s)$, которая определяет значение самоиндуцированной скорости, также показана штриховкой на рисунке. В дальнейшем это модельное представление вихря будем условно называть ε -моделью вихревой трубки.

Рассматриваемая ε -модель допускает увеличение порядка интерполяции кривых для определения расстояний между маркерами, на основе которых формируется аргумент подинтегральной функции в выражении (18). Интерполяцию тонкой вихревой трубки можно проводить сегментами окружностей, которые формируются с помощью трех близлежащих маркеров [43], включая текущий. В результате, расстояния между маркерами будут определяться с большей точностью по сравнению с α -моделью (11), в которой отрезки вихревой трубки интерполируются прямолинейными отрезками. Как и для ε -модели, при определении самоиндуцированной скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ необходимо проводить суммирование вкладов всех фрагментов, формирующих рассматриваемую тонкую вихревую трубку.

С вычислительной точки зрения ε -модель вихревой трубки обладает определенными преимуществами по сравнению с α -моделью и другими чи-

сленными методами [24]. К достоинствам ε -модели вихревой трубки можно отнести:

- возможность применения численного интегрирования к выражениям для компонент поля скорости, используя формулы различного порядка,
- учет поперечного сечения вихревой трубки,
- представление тонкой вихревой трубки плавной пространственной кривой,
- пространственное описание вихревой трубки меньшим числом маркеров.

К явным недостаткам модели следует отнести:

- большой объем вычислений при увеличении порядка интерполяционных формул при интегрировании выражений для компонент поля скорости.

В дальнейшем, при моделировании движения вихря над твердой поверхностью, необходимо выполнить граничное условие (14) на твердой поверхности. Применяя метод изображения, формируем мнимый вихрь, интенсивность которого принимается равной по модулю, но с противоположным знаком. Таким образом, наведенное поле скорости системой N вихрей в точке с координатами \mathbf{x} над твердой поверхностью во внешнем течении для ε -модели тонкой вихревой трубки определяется выражением

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = - \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi} \int_{L_j} \frac{\Gamma_j(\xi') (\mathbf{x} - \mathbf{r}) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi'} d\xi'}{\{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_j|^2 + \alpha \sigma_j^2\}^{3/2}} + \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi} \int_{L_j^*} \frac{\Gamma_j(\xi') (\mathbf{x} - \mathbf{r}^*) \times \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \xi'} d\xi'}{\{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_j^*|^2 + \alpha \sigma_j^2\}^{3/2}} + \nabla \phi, \quad (19)$$

где $\mathbf{r}(\xi)$, $\mathbf{r}^*(\xi)$ – пространственные кривые, описывающие положение действительного и мнимого вихрей соответственно. Заметим, что введение переменной циркуляции вихревой трубки $\Gamma_j(\xi')$ под знак интеграла позволяет модели учитывать распределение циркуляции вихревой трубки вдоль ее образующей.

2. ТЕСТИРОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ

Рассматриваемые модели для описания движения вихрей над твердой поверхностью в сдвиговом внешнем течении имеют по одному неизвестному параметру α или ε соответственно, числен-

ное значение которых можно определить, сравнивая самоиндуцированные скорости тонких вихревых трубок со значением соответствующих скоростей (аналитических, по-возможности, выражений) вихревых структур при различных значениях поперечного сечения σ вихрей. Такой вихревой структурой является осесимметричное вихревое кольцо с малым, но конечным поперечным сечением в идеальной безграничной несжимаемой жидкости, так называемое *вихревое кольцо Дайсона* [45].

2.1. Вихревое кольцо Дайсона

Рассмотрим осесимметричное вихревое кольцо в виде тонкого тора радиуса R ,двигающегося в безграничной идеальной жидкости, спокойной на бесконечности. Пусть завихренность распределена равномерно внутри вихревого ядра (без азимутальной закрутки) радиуса a ($a/R \ll 1$) с интенсивностью Γ . Такое изолированное вихревое кольцо движется стационарно, без изменения размеров и формы, в соответствии с самоиндуцированной скоростью, направленной нормально к плоскости кольца [40, 46]:

$$U_c = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left(\ln \frac{8R}{a} - \frac{1}{4} \right) + O\left(\frac{a}{R}\right)^2. \quad (20)$$

Рассмотрим взаимодействие двух одинаковых в начальном момент вихревых колец,двигающихся вдоль общей оси симметрии. На динамику каждого кольца оказывает влияние поле скорости, наведенное со стороны другого вихревого кольца. Дайсон [45] получил уравнения движения для двух тонких осесимметричных вихревых колец в идеальной безграничной жидкости. При анализе он предполагал, что ядра вихревых колец при взаимодействии не деформируются, остаются круговыми в поперечном сечении, тонкими по сравнению с радиусами колец и не пересекаются с течением времени. Эти условия выполняются только в том случае, если расстояния между ядрами вихревых колец остаются большими по сравнению с размерами самих ядер.

Уравнения движения двух вихревых колец с интенсивностями Γ_1 и Γ_2 , которые описывают изменение радиусов колец R_1 , R_2 и осевых положений Z_1 и Z_2 , могут быть представлены в виде [44, 45, 47]:

$$\dot{R}_1 = \frac{\Gamma_2 Z_{12}}{2\pi R_1 R_{max}} \left(\mathbf{W}(k) - \frac{2R_1 R_2 \mathbf{E}(k)}{R_{min}^2} \right),$$

$$\dot{R}_2 = \frac{-\Gamma_1 Z_{12}}{2\pi R_2 R_{max}} \left(\mathbf{W}(k) - \frac{2R_1 R_2 \mathbf{E}(k)}{R_{min}^2} \right),$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= \frac{\Gamma_1}{4\pi R_1} \left(\ln \frac{8R_1}{a_1} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\Gamma_2}{2\pi R_{max}} \times \\ &\times \left(\mathbf{W}(k) - \frac{2R_2(R_1 - R_2)\mathbf{E}(k)}{R_{min}^2} \right), \quad (21) \\ \dot{Z}_2 &= \frac{\Gamma_2}{4\pi R_2} \left(\ln \frac{8R_2}{a_2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\Gamma_1}{2\pi R_{max}} \times \\ &\times \left(\mathbf{W}(k) - \frac{2R_1(R_2 - R_1)\mathbf{E}(k)}{R_{min}^2} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_{max}^2 &= Z_{12}^2 + (R_1 + R_2)^2, & Z_{12} &= Z_1 - Z_2, \\ R_{min}^2 &= Z_{12}^2 + (R_1 - R_2)^2, & k^2 &= \frac{4R_1R_2}{R_{max}^2}, \\ \mathbf{W}(k) &= \mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{K}(k)$ и $\mathbf{E}(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Система уравнений (21) должна вычисляться совместно с условием постоянства объема вихревых ядер

$$a_1^2 R_1 = \text{const}, \quad a_2^2 R_2 = \text{const}. \quad (22)$$

Можно показать, что система уравнений (21) имеет два независимых инварианта движения

$$P_z = P_1 + P_2 = \Gamma_1 R_1^2 + \Gamma_2 R_2^2 = \text{const}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} E_{tot} &= E_1 + E_2 + E_{1-2} = \\ &= \frac{\Gamma_1^2 R_1}{2} \left(\ln \frac{8R_1}{a_1} - \frac{7}{4} \right) + \frac{\Gamma_2^2 R_2}{2} \left(\ln \frac{8R_2}{a_2} - \frac{7}{4} \right) + \\ &+ \Gamma_1 \Gamma_2 \sqrt{R_1 R_2} \left[\frac{2}{k} \mathbf{W}(k) - k \mathbf{K}(k) \right] = \text{const}, \quad (24) \end{aligned}$$

которые выражают законы сохранения импульса вдоль оси симметрии и кинетической энергии поля течения, соответственно. Общая энергия E_{tot} состоит из кинетической энергии изолированных вихревых колец E_1 , E_2 и слагаемого E_{1-2} , выражающего энергию взаимодействия двух вихревых колец. При интегрировании уравнений движения инварианты (23) и (24) используются для контроля точности проведенных вычислений.

Теперь рассмотрим тонкую вихревую трубку в виде кольца радиуса R с постоянным распределением интенсивности Γ вдоль образующей кольца. Для точного определения значения компонент скорости, наведенной двумя кольцами, в рамках α -модели необходимо неограниченно увеличивать число маркеров, $N \rightarrow \infty$. Тогда, при условии $\phi = 0$, интегрирование уравнений (7) вдоль окружности радиуса R приводит к следующему выражению для осевой компоненты самоиндуцированной скорости одиночного вихревого кольца:

$$U_\alpha^{(c)} = \frac{\Gamma k}{4\pi R} \left[\mathbf{K}(k^*) - \mathbf{E}(k^*) \right], \quad (25)$$

$$(k^*)^2 = \frac{4R^2}{4R^2 + \alpha\sigma^2}.$$

В то же время, применение ε -модели к тонкому вихревому кольцу с аналогичными параметрами приводит к следующему выражению для самоиндуцированной скорости одиночного вихревого кольца:

$$U_\varepsilon^{(c)} = \frac{\Gamma}{4\pi R} \ln \left(\frac{4R}{\varepsilon} \right). \quad (26)$$

Приравнявая выражения (25) и (26) со значением самоиндуцированной скорости одиночного кольца (21), получаем зависимость параметров α и ε от радиуса a поперечного сечения вихревого кольца Дайсона. Для α -модели $\alpha \approx 0.223$ в достаточно широком диапазоне толщин вихревого кольца $0 < a/R < 0.2$. Зависимость $\varepsilon(a)$ представляет собой в первом приближении линейную функцию

$$\varepsilon \approx \frac{\exp(1/4)}{2} \frac{a}{R} = 0.642 \frac{a}{R}, \quad \text{при} \quad \frac{a}{R} \rightarrow 0. \quad (27)$$

Полученные зависимости будут использоваться в выражениях (15), (16) для α -модели и в (19) для ε -модели в дальнейшем при тестировании моделей для описания динамики взаимодействия двух тонких вихревых колец и при анализе процессов взаимодействия подковообразных вихрей с твердой поверхностью в сдвиговом потоке.

2.2. Сравнение самоиндуцированной скорости вихревых колец

Рассмотрим зависимость ошибки при вычислении самоиндуцированной скорости одиночного тонкого вихревого кольца от числа маркеров N , формирующих вихрь для обеих моделей. Начальное расстояние между маркерами принимаем одинаковым. Точное значение $U^{(c)}$ самоиндуцированной скорости определяется выражением (20), а ошибку в вычислении скоростей установим разностью значений

$$Err_{ct} = |U^{(c)} - U_{\text{мод}}^{(c)}|, \quad (28)$$

где $U_{\text{мод}}^{(c)}$ – значение осевой скорости, полученное при использовании выражения (12) для α -модели или выражения (17) для ε -модели.

На рис. 5 представлены ошибки вычисления самоиндуцированной скорости одиночного вихревого кольца с поперечным сечением $a = 0.05$ для рассматриваемых моделей в зависимости от числа маркеров N , формирующих кольцо. Сплошной

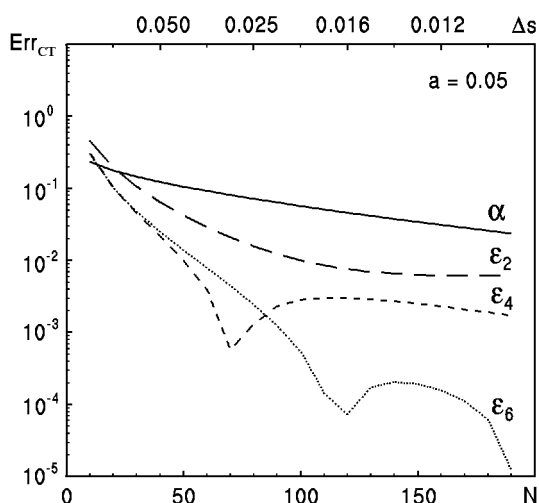


Рис. 5. Ошибки вычисления самоиндуцированной скорости для одиночного вихревого кольца толщиной $a = 0.05$ при разном числе маркеров обеих численных моделей

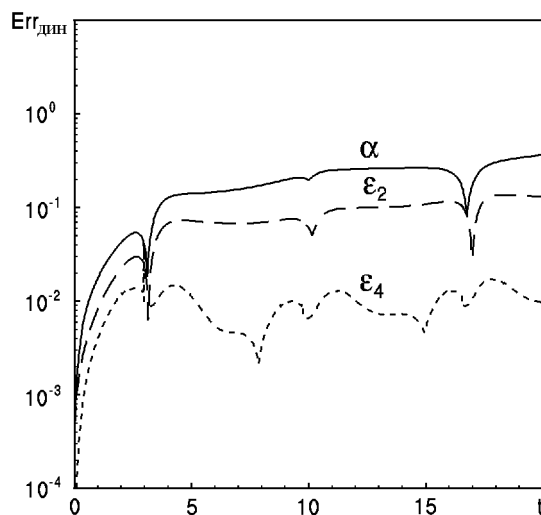


Рис. 7. Ошибка в определении траектории первого вихревого кольца различными моделями при взаимодействии двух осесимметричных вихревых колец в безграничной среде

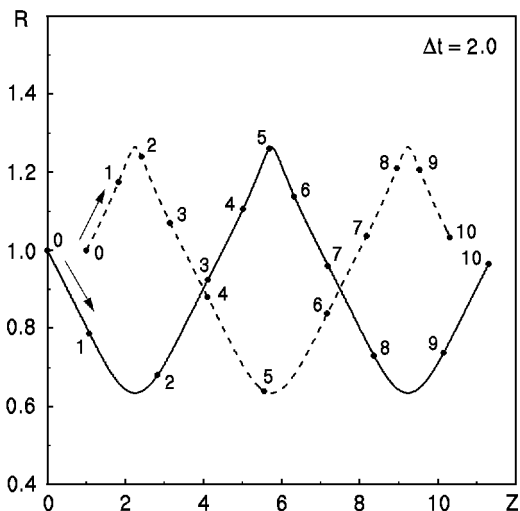


Рис. 6. Траектории движения двух осесимметричных вихревых колец в идеальной безграничной среде (модель Дайсона)

линией на рисунке представлена ошибка $Err_{ст}$, возникающая при использовании конечного числа маркеров в вихревом кольце для α -модели. Видно, что увеличение числа маркеров в нити уменьшает ошибку при определении значения скорости кольца.

Аналогичные оценки точности вычислений самоиндуцированной скорости вихревого кольца для ϵ -модели представлены на рис. 5 штриховыми линиями. Кривая, обозначенная ϵ_2 , получена при интегрировании выражений (17) численными мето-

дами второго порядка. Кривая, обозначенная ϵ_4 , получена при использовании численных методов четвертого порядка, а кривая ϵ_6 – методов шестого порядка. Во всех случаях значения необходимых производных находились численно с использованием методов аналогичного порядка [43, 48]. Видно, что увеличение числа маркеров, формирующих кольцо, приводит к более точному определению самоиндуцированной скорости (при $N \rightarrow \infty$ оба метода дают точные результаты), равно как и увеличение порядка используемого численного метода. В верхней части рисунка нанесена шкала расстояний между маркерами Δs , которая определяется числом маркеров N при формировании вихревого кольца.

Сравнение результатов показывает, что величина самоиндуцированной скорости изолированного вихревого кольца более точно определяется у ϵ -модели. Например, для вычисления скорости с точностью до двух значащих цифр, α -модель требует использования 200 маркеров, в то время как для ϵ_2 -модели достаточно 100 маркеров. Для достижения аналогичной точности для ϵ_6 -модели можно использовать всего 40 маркеров, что существенно сокращает объем вычислений.

2.3. Сравнение траекторий движения двух вихревых колец

Теперь рассмотрим точность вычисления траекторий взаимодействия двух одинаковых вихре-

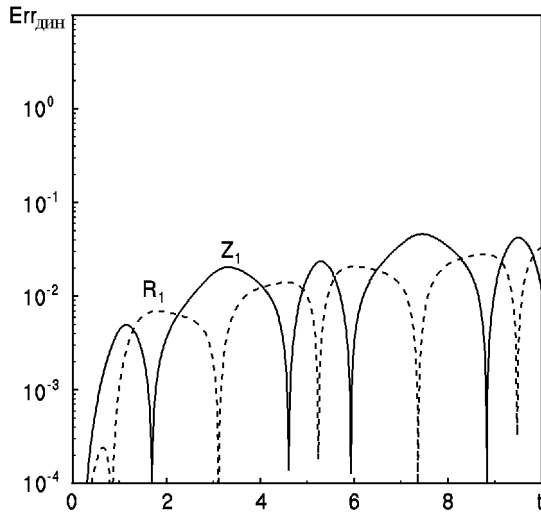


Рис. 8. Составляющие ошибки $Err_{дин}$ при определении траектории движения двух осесимметричных колец и неизменном числе маркеров, формирующих вихревое кольцо

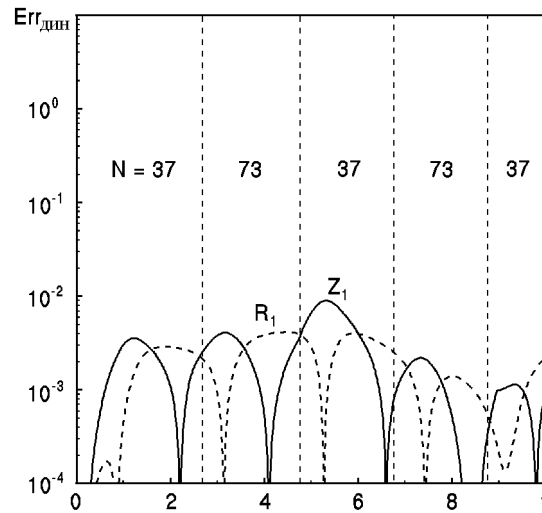


Рис. 9. Составляющие ошибки $Err_{дин}$ при определении траектории движения двух осесимметричных колец и переменном числе маркеров, формирующих вихревое кольцо

вых колец в безграничной жидкости, используя α - и ε -модели. Пусть два вихревых кольца с радиусами $R_1^0 = R_2^0 = R = 1.0$, с интенсивностями $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1.0$ и с поперечными сечениями $a_1^0 = a_2^0 = 0.05R$ расположены на оси симметрии в точках с координатами $Z_1^0 = 0.0$ и $Z_2^0 = 1.0$ в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) .

Траектории движения колец представлены на рис. 6. Вихри движутся в сторону положительных значений оси oz . Сплошной линией представлена траектория первого (заднего) вихревого кольца, а штриховой – второго (переднего). Кружочками с соответствующими цифрами на рисунке обозначены положения колец через одинаковые промежутки времени, $\Delta t = 2.0$. При взаимодействии переднее вихревое кольцо начинает замедляться и увеличивать свой радиус, в то время как заднее кольцо ускоряется и уменьшает свой радиус. Затем заднее вихревое кольцо проскакивает сквозь переднее, и кольца меняются “названиями”. Теперь переднее кольцо замедляется и увеличивает свой радиус, а заднее, наоборот, уменьшает свой радиус и ускоряется. Такое периодическое взаимодействие получило название “чехарда” вихревых колец, и в рамках идеальной жидкости это взаимодействие продолжается неограниченно долго [44, 45, 47].

Периодическое взаимодействие вихревых колец Дайсона может быть смоделировано с использованием α - и ε -моделей. При сравнении моделей будем следить за изменением ошибки в определении координат первого вихревого кольца с течением вре-

мени. Пространственное положение вихря можно определить как

$$\rho(t) = \sqrt{R_1^2(t) + Z_1^2(t)}, \quad (29)$$

где $R_1(t)$ – радиус кольца, равный расстоянию от любого из маркеров в кольце (например первого) до оси симметрии; $Z_1(t)$ – осевое положение первого вихревого кольца. Тогда величину ошибки в вычислениях координат можно оценить, вычисляя значение

$$Err_{дин}(t) = |\rho(t) - \rho_{мод}(t)|, \quad (30)$$

где $\rho(t)$ – пространственное положение вихрей в текущий момент времени для точного решения (вихревые кольца Дайсона); $\rho_{мод}(t)$ – соответствующее значение пространственного положения (29), полученного при использовании α - или ε -моделей.

На рис. 7 представлены ошибки при вычислении пространственного положения первого вихревого кольца с течением времени. Рассматривается случай $N = 250$, где N – количество маркеров, формирующих вихревые кольца для обеих моделей. Ошибка $Err_{дин}$ в определении пространственного положения кольца для α -модели нанесена сплошной линией, а для ε -модели – штриховыми линиями с использованием численных методов второго и четвертого порядков.

Видно, что представление вихревого кольца системой $N = 250$ маркеров отслеживает траекторию взаимодействия вихревых колец для α -модели с

точностью до одного знака. Применение ϵ -модел с использованием численных процедур второго порядка не увеличивает существенно точность определения траектории кольца. Однако увеличение порядка (до четвертого) численных схем позволяет вычислять траектории взаимодействия вихревых колец с точностью до двух знаков в рассматриваемом временном диапазоне.

При взаимодействии вихрей с твердой поверхностью вихревые нити подвергаются растяжению. Для уменьшения вычислительных ошибок, связанных с растяжением вихревых нитей в работе используется метод кусочной сплайн-интерполяции, который позволяет на каждом временном шаге интегрирования уравнений движения определять координаты дополнительных маркеров на образующей вихревой трубки [49, 50]. В качестве параметра кривой, который описывает пространственное положение системы маркеров используется длина вихревой нити от произвольного выбранного первого маркера. Каждый раз все координаты маркеров описываются интерполяционной формулой и при необходимости вычисляются координаты дополнительных маркеров с приблизительно равномерным их распределением вдоль образующей исследуемой вихревой нити. Обычно координаты первого и последнего маркеров при описании замкнутой кривой совпадают. В то же время, если расстояние между маркерами меньше некоторого критического значения, метод кусочной сплайн-интерполяции позволяет сокращать количество маркеров при формировании образующей вихря, сокращая при этом общий объем вычислений.

На рис. 8 показаны составляющие ошибки $Err_{дин}$ (30) в определении траектории первого вихря, которые получаются при численном интегрировании уравнений движения системы двух вихрей, сформированных неизменным количеством маркеров. Рассматривается случай $N = 37$, в вычислениях применяется ϵ_6 -модель. Сплошной линией показана ошибка в вычислениях осевой координаты первого маркера Z_1 , а штриховой – ошибка в определении расстояния от этого маркера до оси симметрии R_1 . Видно, что на рассматриваемом временном интервале точность определения обеих координат составляет порядка трех знаков.

На рис. 9 показаны составляющие ошибки $Err_{дин}$ в определении координат первого вихря при использовании переменного количества маркеров. На начальной стадии движения, пока первое вихревое кольцо уменьшает свой собственный радиус, количество маркеров, используемых при

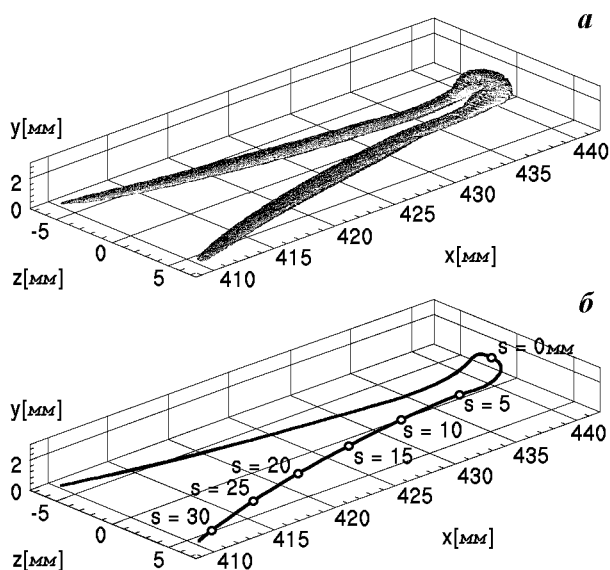


Рис. 10. Модельное представление подковообразного вихря тонкой вихревой нитью

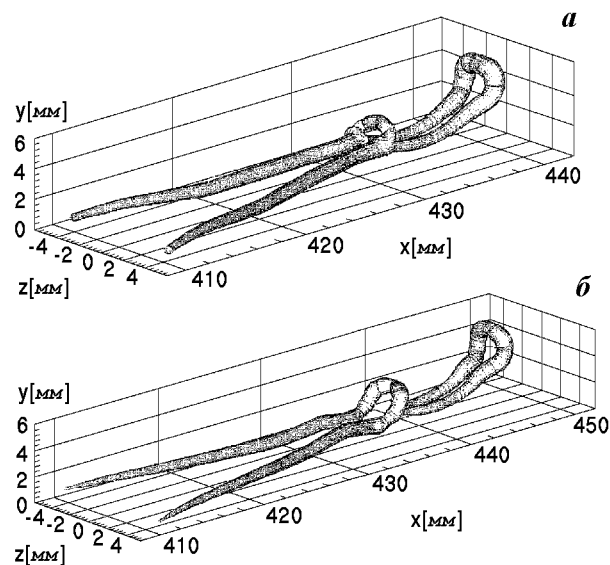


Рис. 11. Динамика развития подковообразного вихря над твердой поверхностью (эксперимент)

описании пространственного положения кольца, составляет $N = 37$. В тот момент, когда кольцо увеличивает свой радиус, количество маркеров, необходимых для описания вихря, увеличивается до $N = 73$. Затем, в силу периодичности движения, вихрь снова уменьшает свой радиус, количество необходимых маркеров снова уменьшается до $N = 37$. Важно отметить, что применение переменного количества маркеров улучшает точность численного решения задачи примерно на порядок.

Табл 1. Нормированные начальные данные

Название	Обозначение	Значение
Форма вихревой трубки	$r(s)$	из эксперимента
Распределение интенсивности	$\Gamma(s)$	из эксперимента
Распределение толщины вихря	$a(s)$	из эксперимента
Толщина пограничного слоя	δ	$0.5 < \Delta < 1.5$
Скорость внешнего течения	U_0	$5.0 < U_0 < 6.0$
Профиль внешнего течения	γ	$0.15 < \gamma < 0.6$
Временной интервал	t	$t < 4.0$

Поэтому есть основания полагать, что применение вычислений с переменным числом маркеров существенно улучшит точность вычисления динамики системы подковообразных вихрей, которые подвергаются растяжению в сдвиговом течении над твердой поверхностью.

3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Исследования в этом разделе направлены на выявление основных особенностей и закономерностей движения подковообразных вихрей в сдвиговом течении над плоской твердой поверхностью. При проведении численного эксперимента в качестве начальных параметров вихрей принимаются данные, полученные из экспериментов [9, 10]. Вихри помещаются в невозмущенный сдвиговый ламинарный поток жидкости с начальным профилем, полученным также из данных реального эксперимента. В дальнейшем систему подковообразных вихрей представляют системой тонких вихревых трубок и в расчетах используют ϵ_6 -модель с переменным числом маркеров, которая показала наилучшие результаты при проведении статического и динамического тестирования.

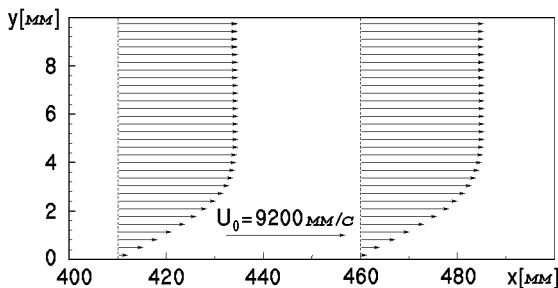


Рис. 12. Усредненный профиль скорости в пограничном слое (эксперимент)

3.1. Исходные данные

Применение процедур сглаживания и интерполяции экспериментальных данных, а также отслеживание предыстории развития вихря позволяют выделять вихревые структуры из распределения поля скорости в погранслое. В определенный момент вихри приобретают форму гладкой шпильки (рис. 10, а) и значительно растянуты в направлении потока (ось ox). Экспериментальные данные показывают, что основная часть завихренности подковообразного вихря сосредоточена в его головной части, а поперечное сечение вихря остается практически неизменным вдоль его образующей.

Пример представления подковообразного вихря тонкой вихревой нитью показан на рис. 10, б. В дальнейшем будем нумеровать маркеры, начиная от маркера, который находится в головной части и является наиболее удаленным от твердой поверхности. Этот маркер отмечен на рисунке значением $s = 0$. Вихрь имеет длину порядка (25–30) мм, подкова у основания раздвинута на расстояние порядка (8–10) мм. Головная часть имеет радиус кривизны порядка (2.0–2.5) мм при максимальном удалении (2.0–3.0) мм от твердой поверхности [9, 23, 38].

Система подковообразных вихрей (вихревой пакет) проявляет довольно быстрое развитие во времени. На рис. 11 показано пространственное положение вихрей, полученное по результатам прямого численного моделирования [23] по данным экспериментов [10, 51]. Моменты времени, соответствующие рисункам с индексами “а” и “б”, отличаются всего на $\Delta t \approx 0.001$ с. Исследования показали, что за достаточно короткий промежуток времени (порядка 0.01 с) головная часть вихря (точка $s = 0$ на рис. 10, б) быстро удаляется от поверхности, с расстояния 5.0 до 6.0 мм.

Подковообразные вихревые структуры развиваются в пограничном слое в сдвиговом воздушном

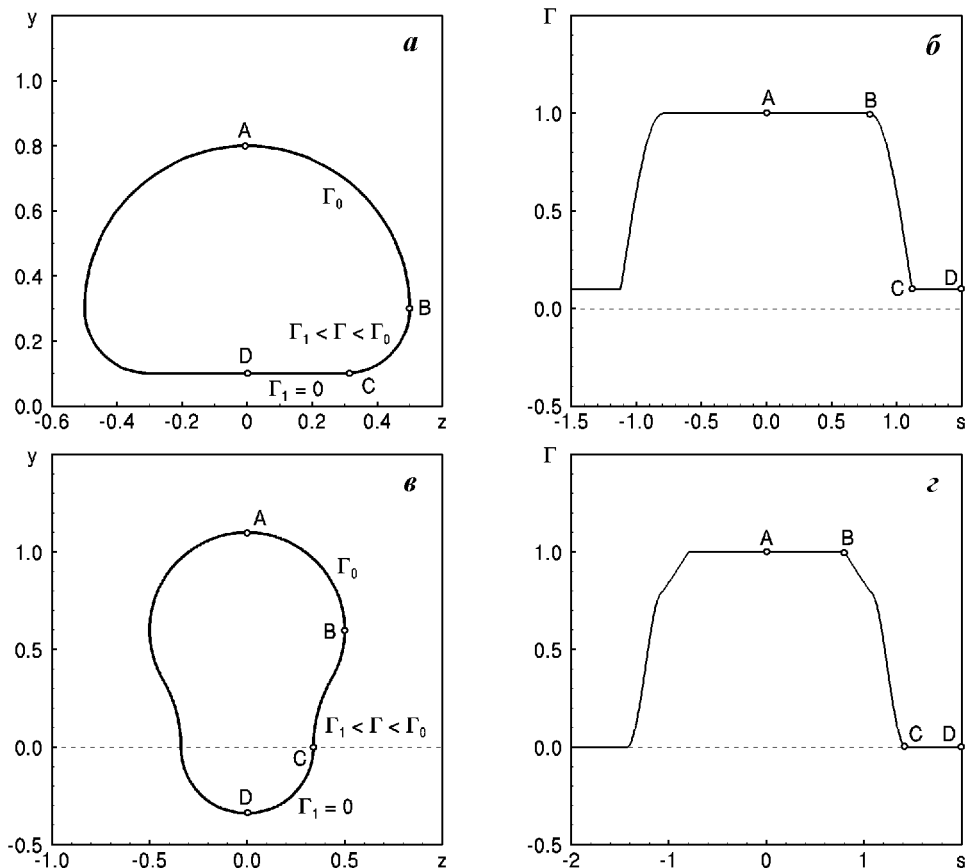


Рис. 13. Начальные конфигурации и распределение завихренности вдоль вихревых трубок при численном эксперименте:
 а, б – деформированное вихревое кольцо, е, з – подковообразное вихревое кольцо

потоке. Усредненный профиль скорости, полученный из данных эксперимента на срезах с координатами $x=410$ мм и $x=460$ мм от края пластины при скорости набегающего потока $U_0=9200$ мм/с, приведен на рис. 12. Важно отметить, что приведенный профиль скорости в эксперименте меняется незначительно в пределах рассматриваемой области течения.

Для последующего анализа задачи все параметры необходимо обезразмерить. В качестве основных обезразмеривающих параметров выбираем:

- $D = 5$ мм – диаметр головной части подковообразного вихря,
- $\Gamma = -8200$ мм²/с – интенсивность завихренности в головной части вихря.

Далее все геометрические величины L относим к D , скорость U пронормируем на отношение $D/|\Gamma|$, а время t относим к величине $|\Gamma|/D^2$.

Таким образом, начальными исходными данными для численного моделирования являются: начальная форма вихревой трубки $r(s)$, распреде-

ление интенсивности $\Gamma(s)$ и поперечного сечения $a(s)$ вдоль подковообразного вихря, толщина δ и профиль $U_x(y)$ скорости в пограничном слое, временной диапазон исследований. Диапазон значений используемых в дальнейшем начальных исходных данных приведен в табл. 1.

В дополнение отметим, что число Рейнольдса по отношению к толщине пограничного слоя δ в эксперименте лежит в диапазоне

$$Re = \frac{U_0 \delta}{\nu} \approx (0.8 \dots 2.5) \cdot 10^3, \quad (31)$$

где ν – кинематическая вязкость воздуха.

Нормированное распределение скорости внешнего невозмущенного потока вдоль плоской пластины принимаем в виде

$$U_x(y) = U_0 \left(\frac{y}{\delta} \right)^\gamma, \quad (32)$$

где U_0 – скорость набегающего потока вдали от поверхности; γ – коэффициент, описывающий крутизну изменения профиля скорости в пограничном

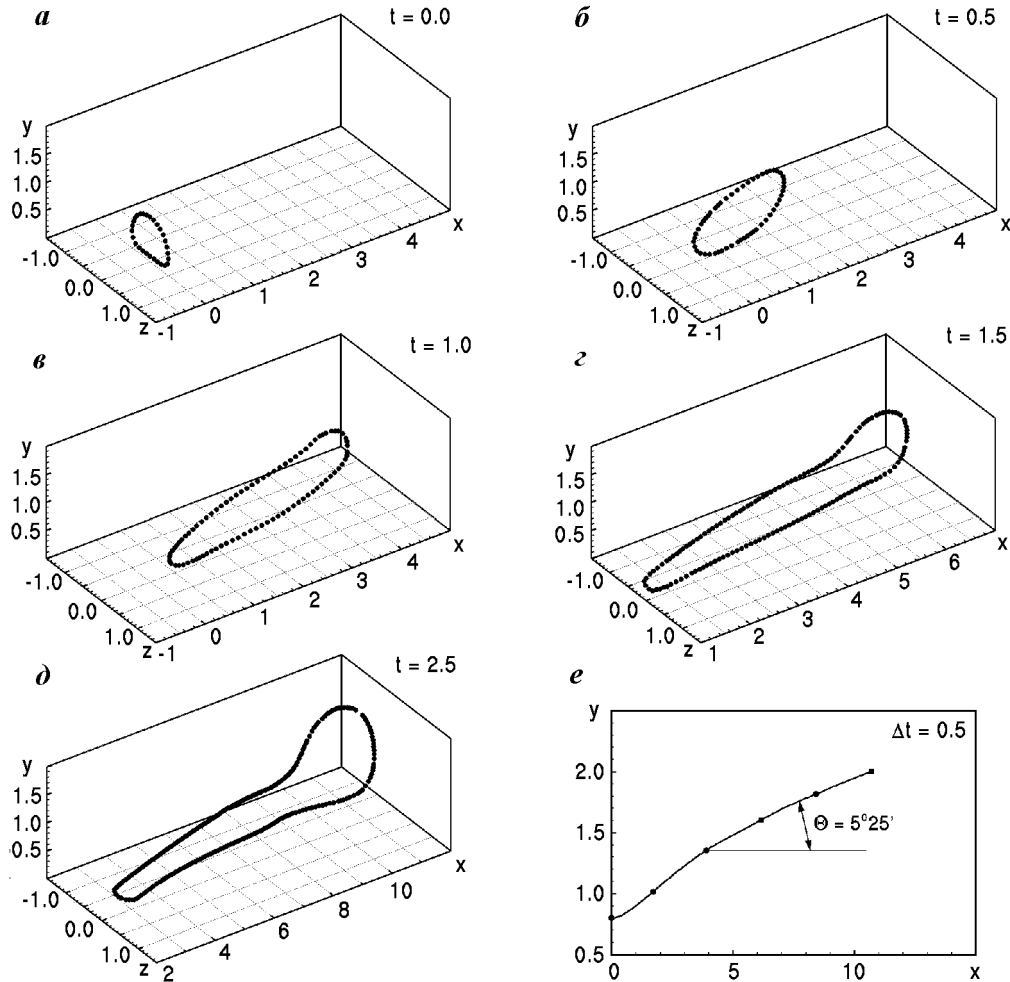


Рис. 14. Движение деформированного вихревого кольца над твердой поверхностью в сдвиговом течении: $\delta = 1.1$, $U_0 = 5.7$, $\gamma = 0.5$

слое. Значение $\gamma = 0.5$ соответствует ламинарному течению, а $\gamma \approx 0.15$ описывает в первом приближении профиль турбулентного пограничного слоя.

3.2. Одиночный вихрь над твердой поверхностью

Как отмечено ранее, выявить начальное распределение завихренности, особенно в хвостовой части подковообразного вихря (наиболее приближенной к твердой поверхности), оказывается достаточно сложно. Поэтому в качестве начального распределения рассмотрим две разные конфигурации вихрей, пространственное распределение параметров которого ближе всего соответствует данным эксперимента. На рис. 13, *a* показано деформированное вихревое кольцо. Внешняя, наиболее удаленная часть кольца, обладает единичной

нормированной завихренностью, $\Gamma = 1.0$, в то время как нижняя часть, наиболее близкая к поверхности, имеет интенсивность $\Gamma_1 = 0.1\Gamma$. Распределение интенсивности такого кольца показано на рис. 13, *б*. При анализе распределения интенсивности вдоль кольца следует обратить внимание на переходную область *BC*, в которой интенсивность завихренности меняется от значения Γ в верхней части кольца до значения Γ_0 , которое по модулю на порядок меньше интенсивности кольца в верхней части. Пусть в первом приближении начальное распределение толщины вихревого кольца остается неизменным, $a(s) = 0.05$. В этом случае закон изменения $\Gamma(s)$ вдоль вихря наиболее точно отражает распределение завихренности подковообразного вихря вдоль образующей вихревого кольца.

Другое нормированное начальное распределе-

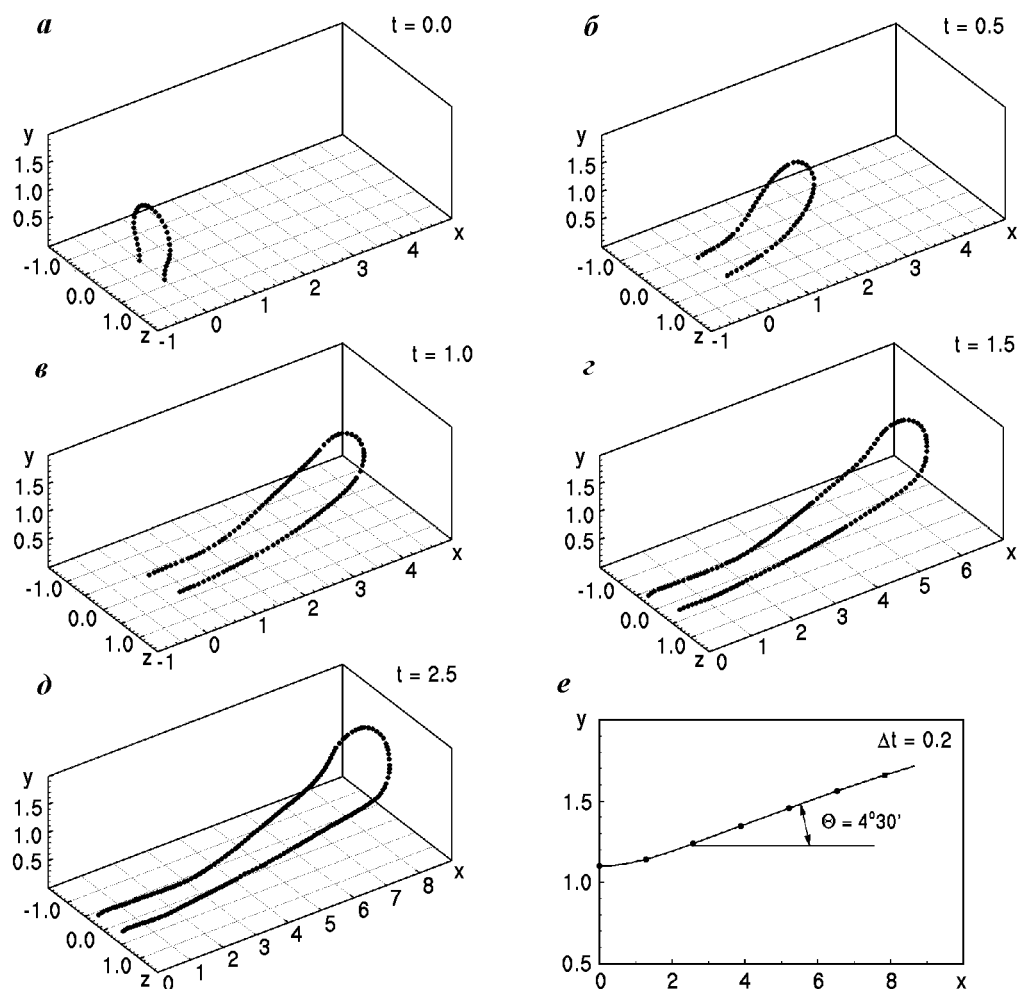


Рис. 15. Подковообразное вихревое кольцо над твердой поверхностью в сдвиговом течении: $\delta = 1.1, U_0 = 5.7, \gamma = 0.5$

ние параметров подковообразного вихря представлено на рис. 13, в. В начальный момент времени вихрь имеет плоскую структуру, форма которой имеет вид подковы. Верхняя часть имеет интенсивность $\Gamma = 1.0$ и характерную нормированную ширину $D = 1.0$. Нижняя часть вихря замыкается “под поверхностью”, здесь интенсивность вихревой трубки равна нулю¹. Как и в предыдущем случае, промежуточная область BC имеет переменную интенсивность завихренности (рис. 13, з), которая достигает нулевого значения на твердой поверхности. Начальное распределение толщины вихревой нити также принимаем неизменным, $a(s) = 0.05$.

¹При численном моделировании удобно пользоваться замкнутыми вихревыми трубками. Поскольку интенсивность этой части подковообразного вихря равна нулю, то присутствие вихря “под плоскостью” не оказывает влияния на эволюцию верхней части подковообразного вихря.

Динамика взаимодействия деформированного вихревого кольца над твердой поверхностью в сдвиговом течении представлена на рис. 14 при следующих параметрах внешнего течения: $\delta = 1.1, U_0 = 5.7, \gamma = 0.5$. Положение вихря в момент времени $t = 0$ показано на рисунке с индексом “а”. На начальной стадии вихрь под действием сдвигового внешнего течения подвергается растяжению и удлиняется в направлении потока (рисунки с индексами “б” и “в”). При этом головная часть вихря, которая обладает наибольшей интенсивностью, оказывается на большем расстоянии от поверхности по сравнению с формирующейся хвостовой частью. К моменту времени $t = 2.0$ (рис. 14, з) головная часть вихря увеличивается в размерах и трансформируется в характерную для подковообразных вихрей кольцевую структуру.

В дальнейшем вихревая структура достаточ-

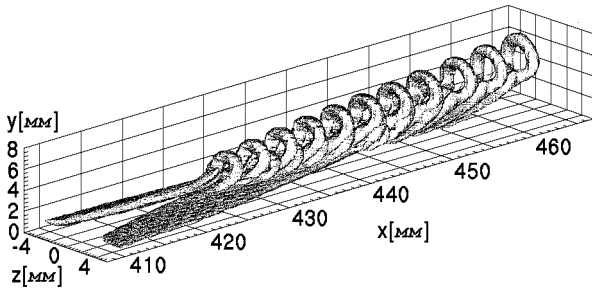


Рис. 16. Динамика одиночного подковообразного вихря (по данным эксперимента)

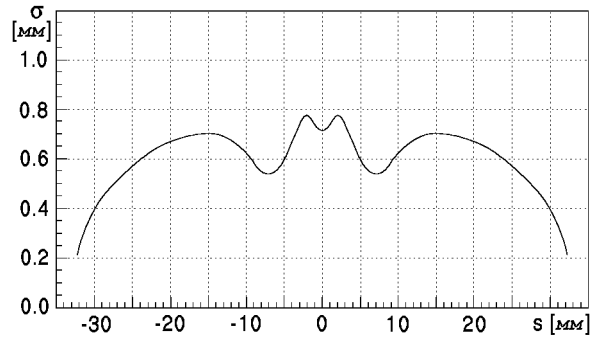


Рис. 19. Изменение толщины одиночной подковообразной вихревой структуры вдоль линии вихря (эксперимент)

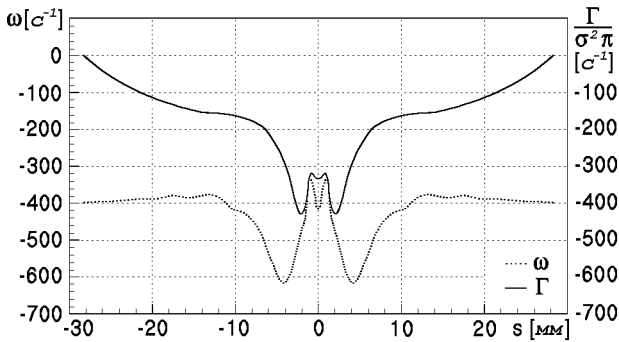


Рис. 17. Изменение интенсивности одиночной подковообразной вихревой структуры вдоль линии вихря (эксперимент)

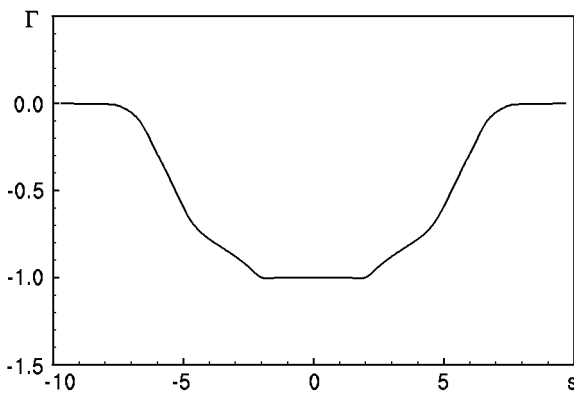


Рис. 18. Изменение интенсивности одиночной подковообразной вихревой структуры вдоль линии вихря (моделирование)

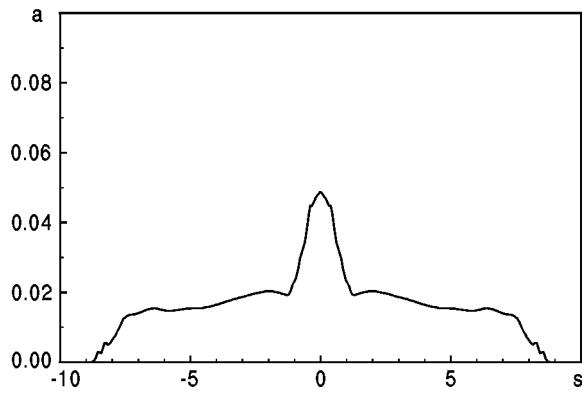


Рис. 20. Изменение толщины одиночной подковообразной вихревой структуры вдоль линии вихря (моделирование)

но интенсивно сносится потоком и отдаляется от твердой поверхности. Несмотря на сильное растяжение, кормовая часть подковообразного вихря, интенсивность которой остается наименьшей в вихревой структуре, взаимодействуют с твердой поверхностью значительно медленнее. Заметим, что общая тенденция развития подковообразного вихря качественно совпадает с данными эксперимента (см. рис. 11). Динамика движения самой уда-

ленной точки деформированного вихревого кольца по отношению к поверхности показана на рис. 14, е. Кружочками отмечены положения самого удаленного маркера через эквидистантные моменты времени, $\Delta t = 0.5$. Анализ данных численного эксперимента показывает, что угол склонения головной части вихря над твердой поверхностью составляет величину $\Theta = 5^\circ 25'$.

Аналогичные особенности развития подковообразного вихря можно проследить на рис. 15. Параметры внешнего течения над твердой поверхностью выбираем аналогичными: $\delta = 1.1$, $U_0 = 5.7$, $\gamma = 0.5$. Начальное положение вихря показано на рис. 15, а. В рассматриваемом случае основания шпилек практически не двигаются, в то время как головная часть вихря проявляет почти аналогичный сценарий движения, формируя угол склонения $\Theta = 4^\circ 30'$ над твердой поверхностью, несколько меньший по сравнению с деформированным вихревым кольцом (рис. 15, е).

Анализ экспериментальных данных показывает, что головная часть подковообразных вихрей достаточно быстро формирует кольцевую структуру (рис. 16, *a*), которая движется практически с постоянной скоростью в направлении от твердой поверхности, формируя угол склонения над плоскостью порядка $\Theta = 6.0^\circ$. Отметим хорошее количественное совпадение углов склонения в эксперименте и при численном моделировании.

На рис. 17 представлены распределения завихренности и циркуляции подковообразного вихря, полученные из данных эксперимента. Видно, что наибольшей по модулю циркуляцией обладает головная часть вихря, а циркуляция в опорах постепенно уменьшается от головной части к кормовой. Аналогичная тенденция прослеживается в численном эксперименте (рис. 18), однако длина опор подковообразных вихрей здесь оказывается несколько меньшей по сравнению с экспериментальными данными.

Интересно отметить качественное совпадение распределения толщины поперечного сечения подковообразных вихревых структур в реальном эксперименте (рис. 19) и при численном моделировании (рис. 20). Головная часть вихря обладает наибольшим поперечным сечением. Это означает, что головная часть вихря растягивается меньше по сравнению с опорами подковообразных вихрей. Очевидно по этой причине возникают наибольшие трудности при идентификации в эксперименте опор вихрей около поверхности, как это отмечено в работах [20, 31, 34].

Рассмотрим влияние параметров внешнего потока на значение угла склонения подковообразного вихря. На рис. 21, *a* показана зависимость угла склонения от толщины пограничного слоя для различных значений скорости течения ламинарного пограничного слоя, $\gamma = 0.5$. Видно, что с увеличением толщины пограничного слоя угол склонения вихря увеличивается. Интересно, что эта тенденция сохраняется при различных значениях скорости внешнего потока в пределах $U_0 = 5.0 \dots 6.0$.

На рис. 21, *b* показана аналогичная зависимость для различных значений скорости внешнего потока при фиксированной толщине пограничного слоя. Анализ данных позволяет заключить, что значение скорости внешнего потока не оказывает существенного влияния на образующийся угол склонения подковообразного вихря над твердой поверхностью, хотя в целом наблюдается тенденция уменьшения значения угла с увеличением скорости для достаточно широкого диапазона значений толщин пограничного слоя.

Наконец, рис. 21, *в* иллюстрирует зависимость

угла склонения вихрей в зависимости от типа профиля скорости в пограничном слое при фиксированном значении его толщины, $\delta = 1.1$. Вихри в ламинарных течениях (при $\gamma \approx 0.5$) удаляются от поверхности быстрее, чем вихри в турбулентных профилях пограничного слоя (при $\gamma < 0.2$). В целом, эта тенденция сохраняется при различных значениях скорости внешнего потока U_0 .

3.3. Два вихря над твердой поверхностью

Проанализируем взаимодействие двух подковообразных вихрей в невозмущенном пограничном слое. Пусть в начальный момент вихри с диаметрами $D_1 = D_2 = 1.0$, интенсивностями $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1.0$ и с поперечными сечениями $a_1 = a_2 = 0.05$ расположены перпендикулярно к плоскости границы и имеют продольные координаты в направлении потока $x_1 = 0.0$, $x_2 = 1.0$. Сначала рассмотрим взаимодействие деформированных вихревых колец. Начальное положение вихрей показано на рис. 22, *a*. Параметры внешнего потока соответствуют ламинарному пограничному слою: $\delta = 1.1$, $U_0 = 5.0$, а $\gamma = 0.5$.

С течением времени вихри проявляют характерное взаимодействие с твердой поверхностью, которое приводит к наклону плоскости колец по отношению к поверхности и постепенному удалению от нее (рис. 22, *b*). Однако на это движение накладывается влияние соседнего кольца, которое выражается в замедлении переднего вихревого кольца и одновременном ускорении заднего вихря (рис. 22, *в*). При этом образующаяся кормовая часть переднего кольца направляется во внутрь заднего кольца, что отчетливо наблюдается в момент времени $t = 1.5$, (рис. 22, *д*). Интересно, что, несмотря на взаимное влияние вихрей друг на друга, кольца удаляются от поверхности с практически постоянной скоростью, формируя угол склонения порядка $\Theta_1 \approx 8^\circ$ для заднего вихря и $\Theta_2 \approx 7^\circ$ для переднего вихревого кольца. На приведенном рисунке представлены положения вихрей вплоть до момента времени $t = 1.5$. Необходимо отметить, что дальнейшие вычисления с использованием численной модели подковообразных вихрей в виде тонкой вихревой трубки провести не удастся, поскольку кормовая часть переднего вихревого кольца приближается достаточно близко к боковой части заднего кольца. В рамках модели вязкой жидкости такое приближение вихрей друг к другу часто сопровождается перезамыканием вихрей. Используемая в вычислениях модель идеальной жидкости процессы перезамыкания описать не может. В ре-

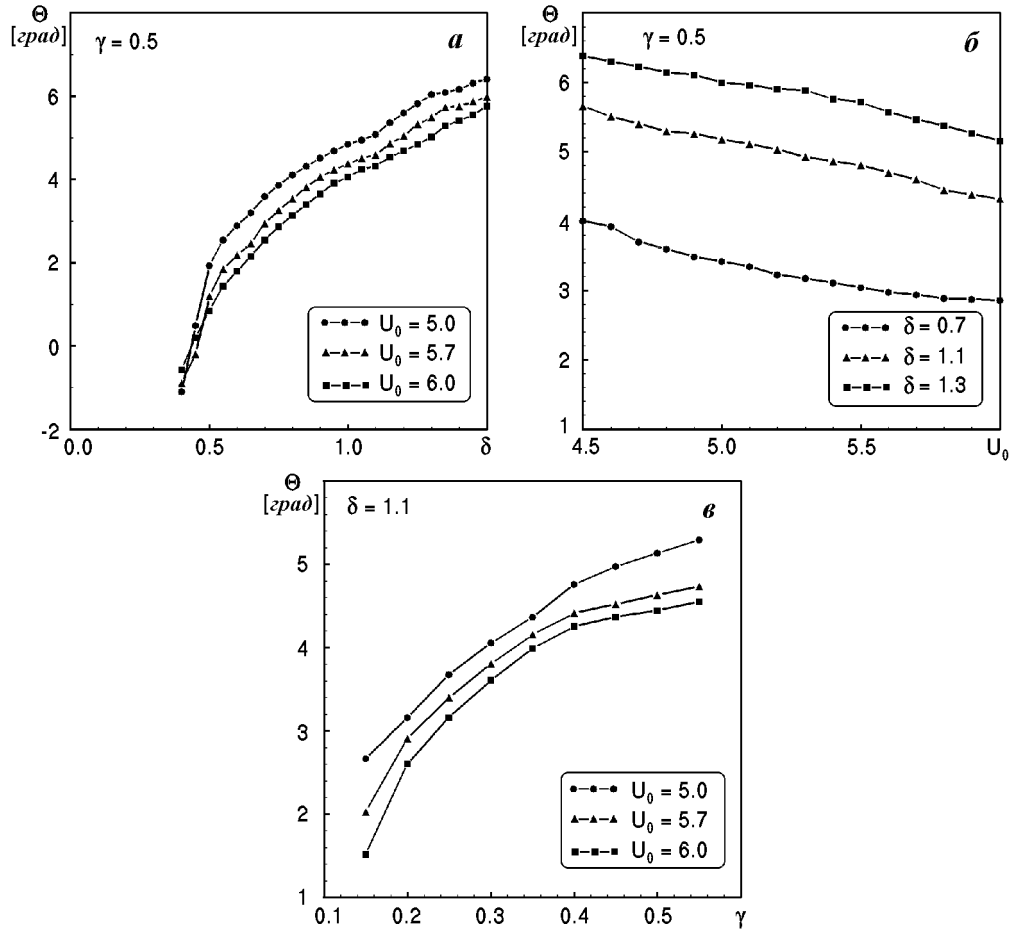


Рис. 21. Зависимость наклона переднего фронта одиночного подковообразного вихря от параметров внешнего сдвигового потока: а – от толщины пограничного слоя, б – от скорости внешнего потока, в – от профиля пограничного слоя

зультате приближающиеся друг к другу части вихрей испытывают сильное взаимное закручивание, и в конечном итоге такое взаимодействие приводит к потере точности вычислений и последующему их численному прерыванию.

Похожий сценарий взаимодействия вихрей можно наблюдать для двух одинаковых в начальный момент подковообразных вихрей и аналогичных предыдущему случаю параметрах сдвигового течения. Результаты численного моделирования представлены на рис. 23. Сравнение результатов позволяет заметить определенные отличия в формировании кормовых частей вихрей, которые в рассматриваемом случае лучше всего соответствуют данным реального эксперимента. Имеется отличие также в размерах подковообразных вихрей: диаметр головной части заднего вихря несколько превышает соответствующий размер переднего вихря, что не соответствует эксперимен-

тальным наблюдениям. Увеличение начального удаления вихрей друг от друга в направлении набегающего потока приводит к уменьшению влияния вихрей друг на друга. В результате наблюдается движение двух подковообразных вихрей с практически одинаковыми геометрическими размерами.

ВЫВОДЫ

Приведенный сравнительный кинематический и динамический анализ взаимодействия осесимметричных вихревых колец в безграничной идеальной несжимаемой жидкости позволяет заключить, что численное моделирование взаимодействия вихрей, основанное на представлении крупномасштабных вихревых структур системой тонких вихревых трубок, может быть выполнено с достаточ-

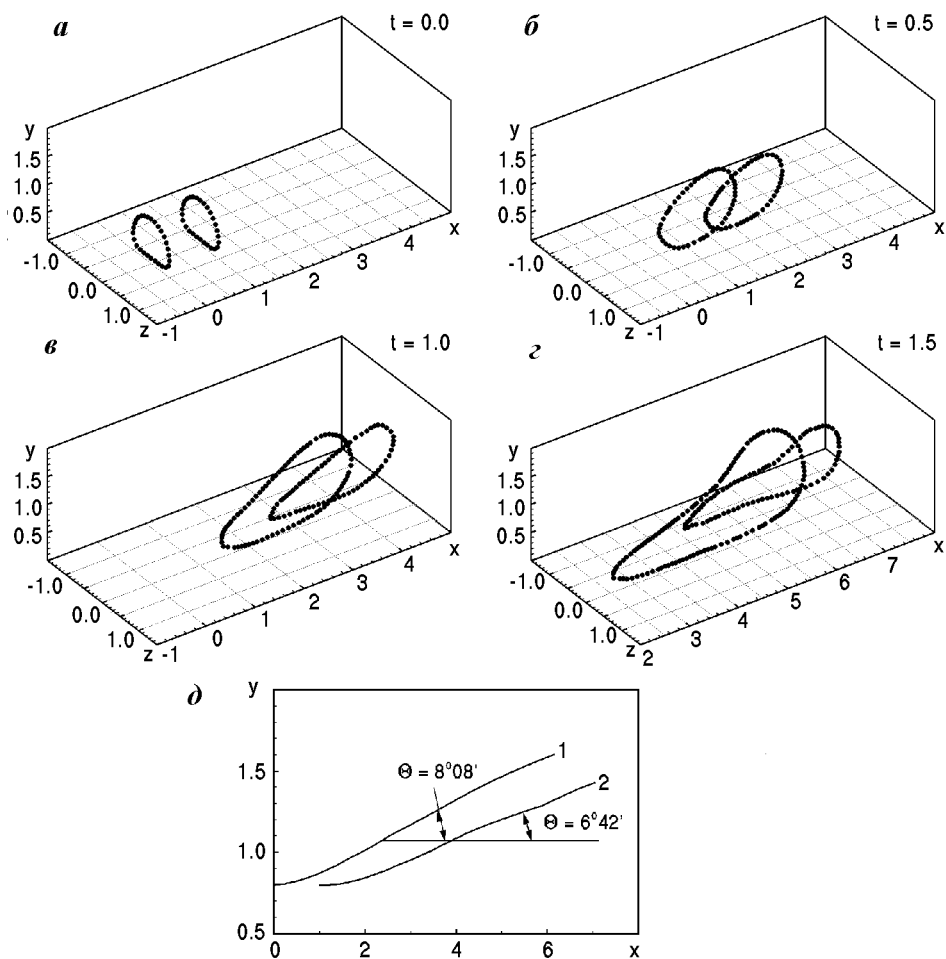


Рис. 22. Динамика двух кольцевых вихрей над твердой поверхностью в сдвиговом течении:
 $\delta = 1.1, U_0 = 5.0, \gamma = 0.5$

но высокой точностью. Для численного моделирования движения вихревых структур различной формы предлагается использовать два численных метода. Первый (α -модель) основан на уравнениях движения, в которых устранена сингулярность в законе Био-Савара для компонент поля скорости путем введения дополнительного параметра, значение которого зависит от величины радиуса поперечного сечения исследуемой вихревой трубки. Второй численный метод базируется на уравнениях движения, в которых упомянутая сингулярность устраняется введением некоторой ε -окрестности при интегрировании выражений закона Био-Савара, вклад которой в значение наведенного вихрем самоиндуцированной скорости не учитывается. Размер ε -окрестности также определяется значением радиуса поперечного сечения вихря.

Сравнительный анализ обеих численных моделей подковообразных вихревых структур на примере взаимодействия двух осесимметричных вихревых колец в безграничной идеальной жидкости показывает, что точность вычисления траекторий вихрей в обоих подходах сильно зависит от точности определения длины исследуемой вихревой нити. В исследованиях образующая вихря формируется последовательностью пассивных жидких частиц (маркеров), которые в соответствии с теоремой Гельмгольца [2, 40, 44] можно интерпретировать как точечные вихри с нулевой циркуляцией. Численный анализ показывает, что ε -модель, интерполирующая нить между маркерами с помощью сегментов окружностей, определяет динамику колец приблизительно на порядок точнее по сравнению с α -моделью для одинакового числа используемых маркеров при формировании обра-

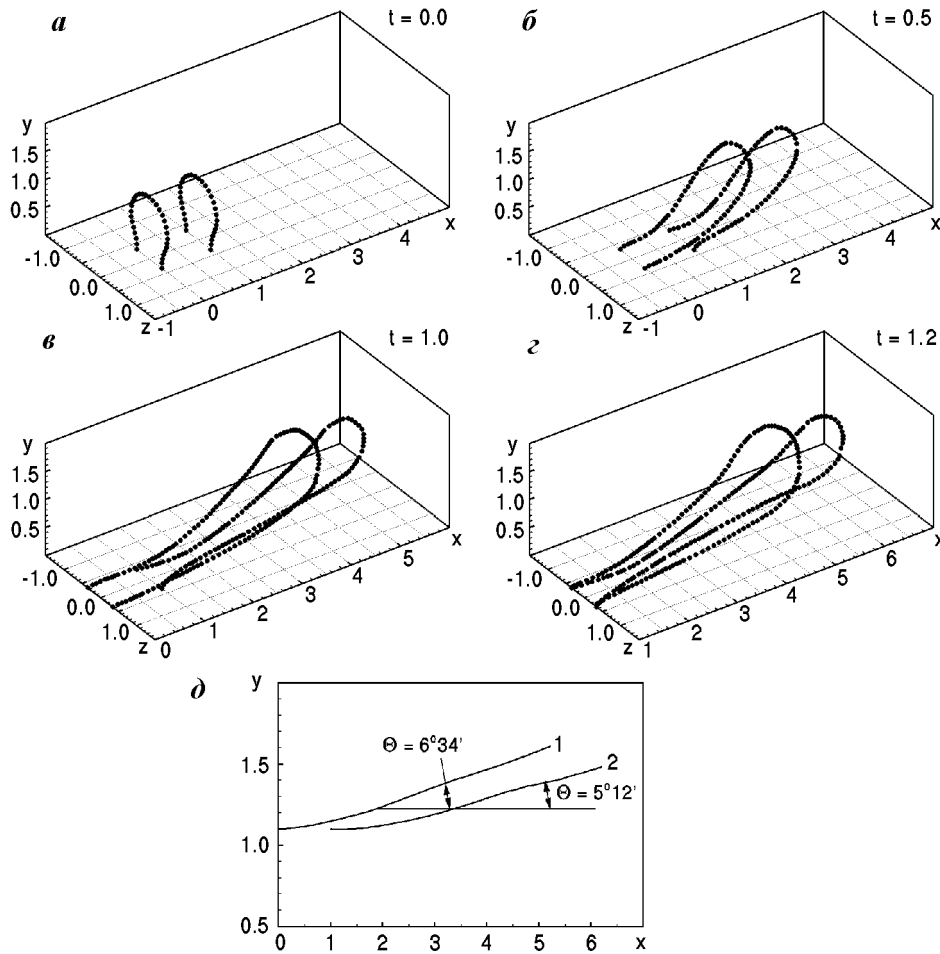


Рис. 23. Динамика двух подковообразных вихрей над твердой поверхностью в сдвиговом течении:
 $\delta = 1.1$, $U_0 = 5.0$, $\gamma = 0.5$

зующей вихревых колец.

В целом можно заключить, что с позиций численного моделирования ε -модель оказывается более эффективной по сравнению с α -моделью для изучения и анализа движения системы вихревых структур при взаимодействии с твердыми поверхностями, или при отсутствии симметрии в пространственном положении вихрей.

Сравнение результатов численного моделирования динамики одиночного подковообразного вихря в невозмущенном сдвиговом потоке над твердой поверхностью с экспериментальными данными показывает незначительное отклонение в вертикальной скорости удаления подковообразных вихревых структур от поверхности. Неизменная вертикальная скорость удаления вихрей от поверхности характеризуется углом склонения Θ , значение которого при численном моделиро-

вании практически совпадает с экспериментальными данными и составляет в среднем величину $\Theta \approx 6.0^\circ$. Численный эксперимент показывает, что скорость удаления вихря от поверхности остается с течением времени практически постоянной и, по всей вероятности, не зависит от геометрии головной части подковообразного вихря в сдвиговом течении над плоской поверхностью.

Анализ решений показывает, что увеличение толщины пограничного слоя приводит к увеличению скорости удаления (или увеличению угла склонения Θ) подковообразных вихревых структур от твердой поверхности. К аналогичному результату приводит увеличение крутизны профиля скорости набегающего сдвигового течения: вихри быстрее удаляются от твердой поверхности в усредненном турбулентном пограничном слое по сравнению с невозмущенным ламинарным пограничным слоем.

Увеличение абсолютного значения скорости набегающего потока в пристеночной области не оказывает существенного влияния на скорость удаления подковообразных вихревых структур от твердой поверхности.

Однако имеются некоторые отличия в результатах численного моделирования по сравнению с экспериментальными данными при описании взаимодействия подковообразных вихревых структур над плоскостью. К основным отличиям можно отнести:

- 1) более быстрое формирование наклона вихревых опор по отношению к поверхности;
- 2) быстрое взаимное приближение опор друг к другу;
- 3) интенсивное расширение головной части вихря.

Первое отличие наблюдается только в области, близлежащей к головной части подковообразного вихря. Эта часть наиболее удалена от поверхности и от опор вихря, которые размещаются значительно ближе к твердой поверхности. Взаимная индукция от двух опор объясняет вертикальное движение головной части в соответствии с направлением циркуляции: вверх вовнутрь и вниз на внешней стороне опор. В то же время, большое влияние на динамику передней части подковообразного вихря оказывает профиль скорости сдвигового течения, который стремится наклонить плоскость головной части вихря по отношению к твердой поверхности, другими словами поток уменьшает угол наклона Θ подковообразного вихря над твердой поверхностью.

Второе отличие может быть объяснено отсутствием вязкости при численном моделировании. Индуцированная скорость действительного и мнимого вихрей смещает опоры подковообразных вихрей друг к другу, не встречая сопротивления, вызванного вязкостью в приповерхностном слое.

При взаимодействии со стенкой головная часть подковообразного вихря растет в диаметре, поскольку опоры вихрей наводят скорость, направленную наружу по отношению к плоскости, которую формирует головная часть. Одновременно, с другой стороны плоскости, мнимый вихрь наводит компоненты поля скорости, которые способствуют расширению петли. К тому же, наведенная скорость со стороны быстро сближающихся опор имеет ненулевую компоненту, которая также приводит к расширению головной части вихря. Другими словами, третье отличие – наблюдаемое в эксперименте расширение головной части подковообразного вихря над твердой поверхностью в основном связано с геометрией подково-

образного вихря. Можно предположить, что причина быстрого расширения головной части вихря при численном моделировании по отношению к данным эксперимента кроется в отсутствии диссипации в рассматриваемом течении и пренебрежении появления вторичной завихренности меньшего масштаба над плоской поверхностью, которая имеет место в реальном эксперименте.

Настоящие исследования выполнены в рамках проекта UP2-2429-KV-02 (2002), спонсированного Civilian Research and Development Foundation (C.R.D.F.), США.

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.– М.: Наука, 1969.– 742 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987.– 840 с.
3. Федяевский К.К., Гиневский А.С., Колесников А.В. Расчет турбулентного пограничного слоя.– Л.: Судостроение, 1973.– 266 с.
4. Ross D., Robertson I. An empirical method for calculation of the growth of a turbulent boundary layer // J. Aeron. Sci.– 1954.– **21**.– P. 355–358.
5. Moin P., Kim J. The structure of the vorticity field in turbulent channel flow. Part I. Analysis of instantaneous fields and statistical correlations // J. Fluid Mech.– 1985.– **155**.– P. 441–464.
6. Homme S.E., Adrian R.J. Similarity of apparently random structures in the outer region of wall turbulence // Experiments in Fluids.– 2002.– **33**.– P. 5–12.
7. Hoyt J.W., Sellin H.R.J. Three-dimensional visualization of large structures in the turbulent boundary layer // Experiments in Fluids.– 2001.– **30**.– P. 295–301.
8. Klebanoff P.S., Tidstrom K.D., Sargent L.M. The three-dimensional nature of boundary layer instability // J. Fluid Mech.– 1962.– **12**.– P. 1–34.
9. Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Ю. Нелинейное развитие волн в пограничном слое // Акад. наук СССР. МЖГ.– 1977.– N.3.– С. 49–53.
10. Kachanov Y.S., Kozlov V.V., Levchenko V.Y., Ramazanov M.P. On the nature of K-breakdown of laminar boundary layer; new experimental data / In "Laminar-turbulent transition" (ed.V.V.Kozlov) // Berlin.– Springer.– 1985.– P. 209–247.
11. Perry A.E., Chong M.S. On the mechanism of wall turbulence // J. Fluid Mech.– 1973.– **119**.– P. 173–217.
12. Alfredsson P.H., Johansson A.V. Time scales in turbulent channel flow // Phys. Fluids.– 1984.– **27**.– P. 1974–1981..
13. Хинце И.О. Турбулентность.– М: Физматгиз, 1963.– 352 с.
14. Гиневский А.С., Илизарова Л.И., Шубин Ю.М. Исследование микроструктуры турбулентной струи в спутном потоке // Акад. наук СССР. МЖГ.– 1966.– 4.– С. 81–88.
15. Hussain A.K.M.F. Coherent structures and turbulence // J. Fluid Mech.– 1986.– **173**.– P. 306–356.

16. *Adrian R.J.* Particle-imaging techniques for experimental fluid mechanics // *Annu. Rev. Fluid Mech.*– 1991.– **23**.– P. 261–304.
17. *Nychas S.G., Hershey H.C., Brodkey R.S.* A visual study of turbulent shear flow // *J. Fluid Mech.*– 1973.– **61**.– P. 513–540.
18. *Wark C.E., Nagib H.M.* Experimental investigation of coherent structures in turbulent boundary layers // *J. Fluid Mech.*– 1991.– **230**.– P. 183–208.
19. *Adrian R.J., Chritensen K.T., Liu Z.-C.* Analysis and interpretation of instantaneous turbulent velocity fields // *Exp. Fluids.*– 2000.– **29**.– P. 275–290.
20. *Adrian R.J., Meinhart C.D., Tomkings C.T.* Vortex organization in the outer region of the turbulent boundary layer // *J. Fluid Mech.*– 2000.– **442**.– P. 1–57.
21. *Foss J.F., Wallace J.M.* The measurement of velocity in transitional and fully developed turbulent flows / In “Frontiers in experimental fluid mechanics” // Berlin.– Springer-Verlag.– 1989.– P. 344.
22. *Robinson S.K.* Coherent motions in the turbulent boundary layer // *Annu. Rev. Fluid Mech.*– 1991.– **23**.– P. 601–639.
23. *Rist U., Fasel H.* Direct numerical simulation of controlled transition in a transition in a flat-plate boundary-layer // *J. Fluid Mech.*– 1995.– **298**.– P. 211–248.
24. *Роч П.* Вычислительная гидродинамика.– М.: Мир, 1980.– 616 с.
25. *Ярин Л.П., Генкин А.Л., Кукес В.И.* Термоанемометрия газовых потоков.– Л.: Машиностроение, 1983.– 180 с.
26. *Kim J.* Evolution of a vortical structure associated with the bursting event in a channel flow / In “Turbulent shear flows” // Berlin.– Springer-Verlag.– 1987.– P. 221–233.
27. *Chong M.S., Perry A.E., Cantwell B.J.* A general classification of three dimensional flow fields // *Phys. Fluids A.*– 1990.– **1**.– P. 122–136.
28. *Kasagi N., Hirata M., Nishino K.* Streamwise pseudo-vortical structures and associated vorticity in the near-wall region of a wall-bounded turbulent shear flow // *Exp. Fluids.*– 1986.– **4**.– P. 309–318.
29. *Kim J., Kline S.J., Reynolds W.C.* The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer // *J. Fluid Mech.*– 1989.– **50**.– P. 133–160.
30. *Christensen K.T., Adrian R.J.* Statistical evidence of hairpin vortex packets in wall turbulence // *J. Fluid Mech.*– 2001.– **431**.– P. 433–443.
31. *Zhou J., Adrian R.J., Balachandar S., Kendall T.M.* Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices in channel flows // *J. Fluid Mech.*– 1999.– **387**.– P. 353–396.
32. *Smith C.R., Walker J.D.A., Haidari A.H., Sobrun U.* On the dynamics of near-wall turbulence // *Phil. Trans. of Roy. Soc. London.*– 1991.– **A336**.– P. 131–175.
33. *Ван-Дайк М.* Альбом течения жидкости и газа / пер. с англ.– М.: Мир, 1986.– 180 с.
34. *Brown G.L., Thomas A.S.W.* Large structures in a turbulent boundary layer // *Phys. Fluids.*– 1977.– **10**.– P. 243–251.
35. *Falco R.E.* Combined simultaneous flow visualization / hot-wire anemometry for study of turbulent flow // *J. Fluid Eng.*– 1980.– **102**.– P. 174–183.
36. *Theodorsen T.* Mechanism of turbulence / In *Proceeding of the 2nd Midwestern Conference on Fluid Mechanics* // Ohio.– Ohio State University, Columbus.– 1952.– P. 1–19.
37. *Meinhart C.D., Adrian R.J.* On the existence of uniform momentum zones in a turbulent boundary layer // *Phys. Fluids.*– 1995.– **7**.– P. 694–696.
38. *Muller K., Rist U., Wagner S.* Enhanced visualization of late-stage transitional structures using vortex identification and automatic feature extraction / In *Papailiou et al., editor, Computational Fluid Dynamics'98*.– London: John & Sons Ltd, 1998.– 786–791 p.
39. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости.– М.: Мир, 1973.– 758 с.
40. *Lamb H.* *Hydrodynamics.*– Cambridge: Cambridge University Press, 6th ed., 1967.– 677 p.
41. *Leonard A.* Vortex methods for flow simulation // *J. Comp. Phys.*– 1980.– **37**.– P. 289–335.
42. *Tomkins D., Adrian R.J.* Spanwise structure and scale growth in turbulent boundary layers // *TAM Rep. N.1006.*– UILU-ENG-2002-6014.– 2002.– P. 40.
43. *Korn C.A., Korn T.M.* *Mathematical Handbook for scientists and engineers.*– New York: McGraw-Hill Publ, 1968.– 1130 p.
44. *Мелешко В.В., Константинов М.Ю.* Динамика вихревых структур.– Киев: Наукова думка, 1993.– 283 p.
45. *Dyson F.W.* The potential of an anchor vortex ring. II // *Phil. Trans. R. Soc. London.*– 1893.– **A184**.– P. 1041–1106.
46. *Thomson W.* The translatory velocity of a circular vortex ring // *Phil. Mag.*– 1867.– **33**.– P. 511–512.
47. *Гуржий А.А.* О классификации взаимодействий двух тонких вихревых колец в идеальной безграничной жидкости // *Гидромеханика.*– 1994.– **68**.– С. 79–85.
48. *Абрамовиц А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям.– М.: Наука, 1979.– 832 с.
49. *Гуржий О.А., Мелешко В.В., ван Хейст Г.Я.Ф.* Метод кусковой сплан-интерполяції в задачі про адвекцію пасивної домішки у відомому полі швидкості // *Доповіді АН України.*– 1996.– **8**.– С. 48–54.
50. *Гуржий А.А., Мелешко В.В., ван Хейст Г.Я.Ф.* Режимы хаотического перемешивания жидкости в круге парой точечных вихрей / в кн. “Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей” под ред. Борисова А.В. и др. // Москва, Ижевск.– Ин-т компьютерных исследований.– 2003.– С. 441–467.
51. *Kachanov Y.S., Levchenko V.Y.* The resonant interaction of disturbances at laminar-turbulent transition in a boundary layer // *J. Fluid Mech.*– 1984.– **138**.– P. 209–247.