

УДК 532.516

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ОТРЫВ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

А. А. ПРИХОДЬКО*, О. Б. ПОЛЕВОЙ**

* Днепропетровский национальный университет,

** Институт транспортных систем и технологий НАН Украины

Получено 05.12.2004

Развивается единый методологический подход к моделированию пространственного отрыва турбулентного пограничного слоя на основе полных трехмерных нестационарных и упрощенных уравнений Навье-Стокса. Обсуждаются современные направления развития численных методов решения уравнений Навье-Стокса, а также методов их замыкания моделями турбулентности. Реализация развиваемого подхода выполнена в рамках разработанного пакета прикладных программ. Приводится анализ результатов расчетов обтекания сверхзвуковым набегающим потоком цилиндра, под углами атаки профиля, комбинации сфера-цилиндр, пространственного угла из двух клиньев, стреловидного угла сжатия, вертикального клина и кругового цилиндра, установленных на пластине.

Розвивається єдиний методологічний підхід до моделювання просторового відриву турбулентного пограничного шару на основі повних тривимірних нестационарних і спрощених рівнянь Нав'є-Стокса. Обговорюються сучасні напрямки розвитку чисельних методів розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса, а також методів їхнього замикання моделями турбулентності. Реалізація розвинутого підходу виконана в рамках розробленого пакета прикладних програм. Наводиться аналіз результатів розрахунків обтікання надзвуковим потоком циліндра, під кутами атаки профіля, комбінації сфера-циліндр, просторового кута із двох клинів, стрілоподібного кута стиску, вертикального клина та кругового циліндра, встановлених на пластині.

The unified methodological approach for simulating the spatial turbulent boundary layer separation is developed on the base of full three-dimensional non-stationary and simplified Navier-Stokes equations. State-of-art in numerical methods for solving the Navier-Stokes equations, and also in methods for closing the equations by turbulence models are discussed. Realization of the approach is implemented within the framework of the applied program package, developed by the authors. Numerical results of supersonic flow around a cylinder, airfoil, a sphere-cylinder combination at the angle of attack, a spatial corner with two intersected wedges, a swept compression corner, an unswept sharp fin and a circular cylinder, fixed on a plate are presented.

ВВЕДЕНИЕ

Современные представления о механизме сопротивления тел, находящихся в потоке газа, связаны с понятием пограничного слоя, его развития и отрыва с обтекаемой поверхности. Исследования в этом направлении ведутся уже целое столетие, начиная с классической работы Прандтля 1904 г. [1], в которой было сформулировано определение пограничного слоя. Экспериментальные методы изучения пограничных слоев позволили выявить их фундаментальные свойства, основные закономерности и взаимосвязи определяющих параметров. В то же время, экспериментальный подход нуждается в тесном взаимодействии с теорией, позволяющей проводить адекватную интерпретацию получаемых данных, особенно учитывая ограниченный объем данных по полю течения, доступный при продувках и летных экспериментах. На современном этапе теоретические исследования опираются на численные методы решения уравнений Навье-Стокса, являющихся наиболее полной и обоснованной системой уравнений механики жидкости и газа.

В настоящей работе развивается единый методологический подход, включающий в себя как полную систему трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса, так и ее упрощения. Такой подход позволяет, с одной стороны, выбирать модель течения, соответствующую той или иной стадии аэродинамического проектирования. С другой стороны, наличие иерархии газодинамических моделей дает возможность проводить надежную многостороннюю верификацию численных методов и облегчает их интеграцию в общий разрабатываемый пакет прикладных программ [2].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математические модели динамики вязкого газа. Система уравнений Навье-Стокса, выведенная в первой половине XIX века, до сих пор является основой теоретических исследований вязких явлений в аэрогидродинамике. Уравнения Навье-Стокса, использующие законы сохранения массы, импульса, энергии в сочетании с основными термодинамическими и реологическими законами, содержат минимальное количество исходных пред-

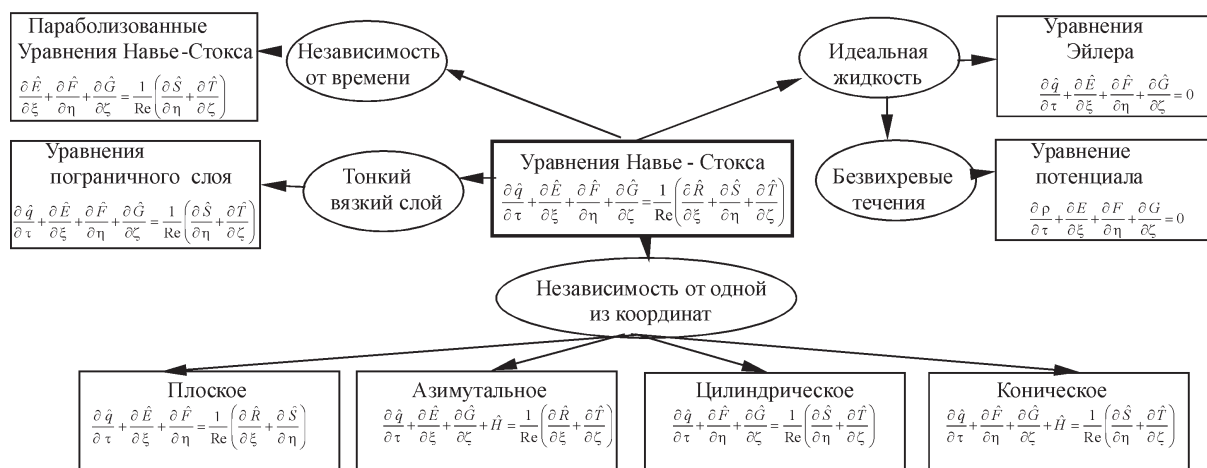


Рис. 1. Уравнения Навье-Стокса и их упрощения

положений, что делает их наиболее полной и обоснованной системой уравнений механики жидкости и газа. В то же время, с математической точки зрения они составляют самую сложную систему уравнений математической физики, применяемых к изучению реальных объектов.

Характерной особенностью данной системы уравнений является ее нелинейность при наличии дифференциальных слагаемых второго порядка с малым параметром. Хотя существующий уровень вычислительной техники позволяет использовать полную постановку начально-краевой трехмерной задачи в рамках осреднения по Рейнольдсу или Фавру, практическая реализация в промышленных приложениях такого подхода остается слишком трудоемкой. Зачастую целесообразно применять, особенно при параметрических исследованиях, упрощения исходных уравнений. На рис. 1 представлена взаимосвязь основных упрощающих предположений, используемых авторами настоящей работы при решении практических задач [2].

Вычислительная аэродинамика в своем развитии прошла основные четыре стадии [3]. Каждая последующая стадия использует все более полное приближение уравнений Навье-Стокса:

- 1 – аналитические приближения и линеаризованные уравнения;
- 2 – уравнения газовой динамики и гидродинамики без учета диссипативных эффектов;
- 3 – осредненные полные и упрощенные уравнения Навье-Стокса;
- 4 – неосредненные уравнения Навье-Стокса.

Полные и линеаризованные уравнения потенциала, уравнения пограничного слоя относятся к

первой стадии развития вычислительной аэродинамики. Предположение о безвихревой структуре течения, разбиение области течения на невязкую зону и пограничный слой позволяют на несколько порядков снизить затраты ресурсов ЭВМ по сравнению с трехмерными нестационарными уравнениями Навье-Стокса. Опыт решения уравнений потенциала, сравнение результатов расчетов по нелинейному уравнению потенциала скорости с расчетами на основе уравнений Эйлера и экспериментальными данными свидетельствуют об эффективности и надежности такого подхода для оценки распределения давления и интегральных аэродинамических характеристик. Методы нелинейной теории потенциала скорости целесообразно применять для расчетов обтекания трансзвуковым и сверхзвуковым потоком тел с относительно небольшими углами наклона поверхности к набегающему потоку, когда изменение энтропии не приводит к искажению картины течения [4].

На второй стадии развития вычислительной аэродинамики вместо уравнений потенциала в основу положены уравнения Эйлера, которые выводятся из законов сохранения массы, импульса и энергии [5-7]. Модель обеспечивает более точное описание локальных и интегральных характеристик, особенно при сверхзвуковых режимах обтекания. Недостатками подходов первой и второй стадий являются необходимость разделения течения на области невязкого и вязкого течений, а также сращивание решений. Модель пограничного слоя не применима для случая сильного вязко-невязкого взаимодействия.

На третьей стадии развития вычислительной аэродинамики используется система уравнений

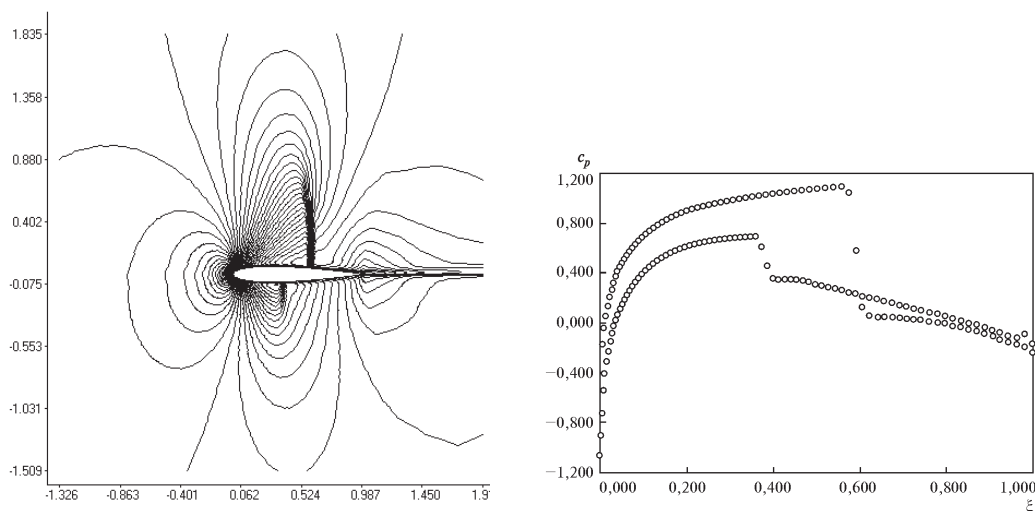
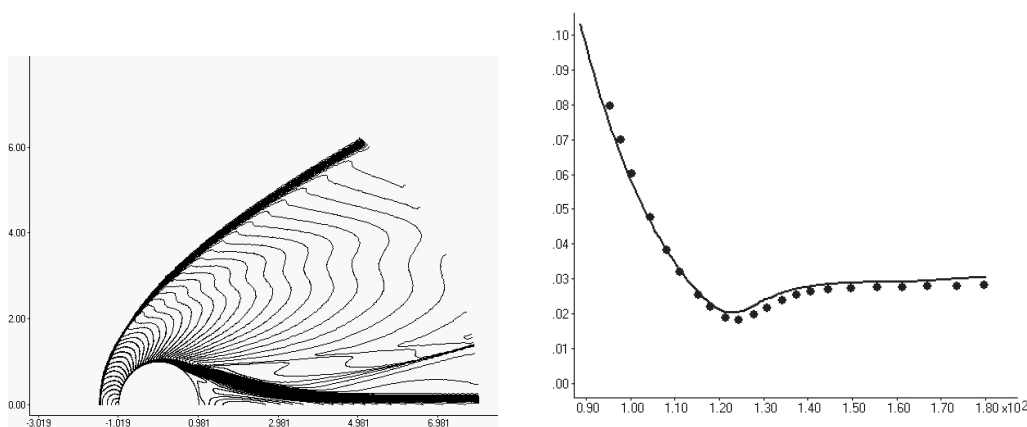


Рис. 2. Изомахи в расчетной области и распределение давления на поверхности профиля

Рис. 3. Изомахи в расчетной области и распределение давления на поверхности цилиндра:
● – эксперимент [63], — – настоящая работа

Навье-Стокса, осредненная по Рейнольдсу либо по Фавру с применением “сквозного счета” без дополнительного разбиения расчетной области на зоны с отдельными видами взаимодействий [2, 8, 9].

Основным предположением данной стадии, упрощающим исходную систему уравнений Навье-Стокса, является наличие моделей турбулентной вязкости, обусловленное использованием сравнительно грубых сеток ($\sim 50 \div 500$ узлов в каждом направлении). Хотя мощности современной вычислительной техники позволяют рассчитывать трехмерные течения, в реальной практике успешно применяются упрощения, снижающие затраты ресурсов ЭВМ до уровня двумерных задач. Напри-

мер, предположение о стационарности сверхзвукового течения дает возможность использовать маршевые (по пространству) методы интегрирования параболизированных уравнений Навье-Стокса.

Наиболее часто используемым допущением является предположение о плоско-параллельном или осесимметричном (азимутально-инвариантном) характере течения. Кроме того, для данного класса течений накоплено большое количество экспериментальных данных, которые могут быть использованы для верификации разрабатываемых пакетов прикладных программ.

При решении большого класса задач аэродинамики справедливо коническое приближение уравнений Навье-Стокса, основанное на предположе-

нии о постоянстве характеристик течения вдоль лучей, проведенных из вершины обтекаемого тела (полюса конического течения). Ранее такая модель применялась для расчета невязких течений [5, 10]. Известны работы по ее использованию для исследования вязких течений при обтекании кругового конуса [11], кругового конуса и крыла [12], треугольного крыла [13], внешнего двугранного угла [14]. В настоящей работе коническое и аналогичное ему цилиндрическое приближения уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа используются для расчета турбулентных отрывных течений, обладающих режимами “конической” и “цилиндрической” симметрии.

На четвертой стадии развития вычислительной аэродинамики решаются неосредненные уравнения Навье-Стокса с учетом турбулентных осцилляций, физико-химических превращений и т. д. В отличие от модельных, решение практических задач в такой постановке в настоящее время не представляется возможным из-за отсутствия адекватных методов их решения и очень больших затрат ресурсов ЭВМ [8, 15, 16].

Модели турбулентной вязкости. Математическое описание явления турбулентности остается одним из проблемных мест современной вычислительной аэродинамики, особенно на фоне общего прогресса в численных методах, в мощности ЭВМ, в методах построения разностных сеток, визуализации течения.

Причинно-следственный механизм возникновения турбулентной неустойчивости основан на гипотезах. Модели турбулентной вязкости основаны на эмпирических базах данных, полученных, как правило, для свободных сдвиговых течений и слабо учитывают внешний градиент давления, кривизну поверхности обтекаемого тела и ряд других существенных параметров. Кроме того, решение прикладных задач механики жидкости и газа приводит к некоторому формальному противоречию. С одной стороны, обычно полагают, и не без оснований, что более сложные модели турбулентности точнее отражают структуру и динамику турбулентного переноса. С другой стороны, реальная практика расчетов многофакторных течений, таких как взаимодействие скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем, обтекание решеток турбомашин, показывают, что применение алгебраических моделей нередко приводит к лучшему совпадению численных и экспериментальных результатов с меньшими затратами ресурсов ЭВМ.

В настоящее время существуют три основных

направления замыкания уравнений Навье-Стокса:

1) моделирование мелкомасштабной турбулентности при осреднении исходной системы по Рейнольдсу либо по Фавру (RANS);

2) учет крупномасштабной турбулентности моделированием крупных и отсоединенных вихрей (LES, DES) на базе технологии “подсеточного моделирования”;

3) прямое численное моделирование турбулентности (DNS).

Первое направление включает в себя алгебраические, дифференциальные одно- и двухпараметрические модели турбулентной вязкости. Начав развиваться в конце 60-х годов, они совершенствуются до сих пор. Среди многочисленных алгебраических методов замыкания хорошо зарекомендовали себя модели Болдвина-Ломакса [17], Себечи-Смита [18], Совершенного В.Д. [19]. Из однопараметрических моделей выделяются модели Глушко-Рубезина [20, 21] и популярная сейчас Спаларта-Аллмараса [22]. В рамках замыкания уравнений Навье-Стокса двумя дополнительными уравнениями турбулентного переноса высокую надежность показали $k-\epsilon$ модели Джонса-Лаундера [23], Уилкокса [24] и их модификация – $k-\omega$ модель Ментера [25].

Одним из авторов настоящей статьи был выполнен сравнительный анализ эффективности алгебраических и дифференциальных моделей турбулентности [26]. Главный вывод заключается в том, что модели, относящиеся к первому направлению, могут хорошо передавать распределение основных гидрогазодинамических характеристик во всей расчетной области, давая качественное и количественное совпадение с экспериментальными данными в рамках установившихся течений. Это позволяет внедряться методам решения RANS в повседневную практику инженерных промышленных расчетов. Опыт применения RANS показывает, что для получения приемлемого численного решения требуются разностные сетки, содержащие порядка 10^4 узловых точек для двумерных задач и порядка $10^5 \div 10^6$ для трехмерных. Соответствующие затраты процессорного времени обычного персонального компьютера типа Pentium IV с тактовой частотой 2.4 ГГц исчисляются десятками минут для двумерных задач и десятками часов для трехмерных.

Основной недостаток данного направления к расчету параметров турбулентности состоит в недостаточности качественной передаче тонких структур течений, особенно при наличии отрыва потока. Кроме того, применение данных моделей приво-

дит к “гладким” решениям, что не соответствует общей природе хаоса в турбулентности.

В конце 90-х годов начали интенсивно развиваться такие подходы как LES, DES, DNS, в рамках которых предпринимаются попытки устранить недостатки, присущие методам первого направления.

Учет крупномасштабных вихрей базируется на выявлении “порядка в хаосе” при турбулентном переносе. Использование технологии “подсеточного моделирования” позволяет устанавливать “фильтры”, разделяющие крупно- и мелкомасштабную турбулентность. Существенной особенностью является исходная трехмерная постановка задачи, не допускающая упрощения на плоскопараллельный случай. Реализация подходов LES, DES требует $10^7 \div 10^{11}$ узлов расчетной сетки, что выполнимо только на кластерах персональных компьютеров или супермощных ЭВМ. Это ограничивает в настоящее время применение данных подходов, особенно LES, модельными задачами, не выходящими, за редким исключением, за круг верификационных тестов. И хотя получаемые результаты выглядят многообещающими, следует признать, что концепция “крупных турбулентных вихрей” пока еще слабо обоснована. Как отмечают авторы обзоров [27, 28], “LES – это искусство балансирования на грани ошибки”.

Наиболее полным подходом к описанию турбулентности считается ее прямое численное моделирование (DNS). Идея DNS состоит в осреднении не исходных уравнений, а получаемых нестационарных результатов. В ходе расчетов на основе уравнений Навье-Стокса с обычной молекулярной вязкостью выделяются “устойчивая” и “пульсационная” части решения. На основе “пульсационной” составляющей рассчитывается турбулентная вязкость и другие параметры турбулентного переноса. Реализация DNS требует исключительно подробной сетки, состоящей из $10^{15} \div 10^{17}$ узлов. По данным обзоров [28, 29], даже с учетом прогресса в вычислительной технике, широкое применение DNS возможно только во второй половине XXI века.

Методы дискретизации расчетной области.

Одной из первых проблем, возникающих при численном моделировании вязких течений, является задача выбора метода дискретизации расчетной области. В настоящее время существуют три базовых подхода к разбиению непрерывного пространства вокруг обтекаемого тела на дискретные ячейки. К ним относятся:

а) регулярные сетки, связанные с обтекаемой по-

верхностью;

б) неструктурированные сетки;

в) прямоугольные декартовы сетки с дробными ячейками.

Наиболее традиционен подход, использующий регулярные сетки. Он позволяет строить разностные сетки, учитывающие характерные особенности обтекаемых поверхностей при сохранении возможности введения криволинейных координат. Отображение физического пространства в единичный куб расчетной области дает возможность разрабатывать универсальные алгоритмы решения уравнений Навье-Стокса, зависящие только от характера отображения и постановки граничных условий. Главным недостатком регулярных сеток является высокая трудоемкость их построения, и, по-видимому, отсутствие универсальных алгоритмов для тел произвольной формы, особенно при наличии угловых конфигураций.

Прямоугольные декартовы и неструктурированные сетки позволяют рационально использовать ограниченное число узлов во внешней области течения. Кроме того, применение данных типов сеточного разбиения дает возможность создавать эффективные автоматизированные алгоритмы построения сеток около тел произвольной конфигурации. Однако при сгущении узлов вблизи криволинейной поверхности для адекватного учета вязких эффектов приходится вводить ячейки с ребрами одного порядка длины во всех трех координатных направлениях, чтобы избежать малых углов между гранями ячеек. Это, в свою очередь, ведет к избыточному числу узлов непосредственно в пограничном слое и существенно снижает конечную эффективность алгоритмов численного решения уравнений Навье-Стокса.

Прогресс в данном направлении связывается с разработкой гибридных сеток, сочетающих в себе преимущества описанных выше подходов.

Исходные уравнения. Нестационарные уравнения Навье-Стокса сжимаемого газа записываются в векторной интегральной форме [30, 31]:

$$\iiint_V \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} dV + \iint_{\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{n}) d\Omega = 0, \quad (1)$$

где V – объем ячейки; Ω – площадь ее поверхности. Векторы состояния \mathbf{q} , конвективного $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ и диффузионного $\mathbf{F}_v \cdot \mathbf{n}$ потоков в приближении тонкого

слоя определяются соотношениями

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho U u + n_x p \\ \rho U v + n_y p \\ \rho U w + n_z p \\ (e + p)U \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_v \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \left(u_n + \frac{1}{3} n_x U_n \right) \\ \mu \left(v_n + \frac{1}{3} n_y U_n \right) \\ \mu \left(w_n + \frac{1}{3} n_z U_n \right) \\ f_{5v} \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$f_{5v} = \frac{k(a^2)_n}{Pr(\gamma - 1)} + \frac{\mu}{2} (u^2 + v^2 + w^2)_n + \frac{\mu}{3} U U_n;$$

$U = n_x u + n_y v + n_z w$ – скорость в направлении внешней единичной нормали к поверхности ячейки; n_x, n_y, n_z – компоненты единичного вектора внешней нормали \mathbf{n} к грани контрольного объема; $U_n = n_x u_n + n_y v_n + n_z w_n$.

В уравнениях приняты следующие обозначения: u, v, w – компоненты вектора скорости в направлениях x, y, z ; ρ, p, e – плотность, давление и полная энергия единицы объема газа соответственно.

Система уравнений дополняется уравнением состояния

$$p = p(\varepsilon, \rho),$$

где ε – внутренняя энергия, которая определяется соотношением

$$\varepsilon = \frac{e}{\rho} - \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2).$$

Граничные условия. К настоящему времени хорошо отработаны методы постановки граничных условий во внешних областях течения для всех диапазонов скоростей (несжимаемые, дозвуковые, трансзвуковые, сверх- и гиперзвуковые режимы обтекания). На поверхности тел обычно задаются условия прилипания, температурный режим и условия для градиента давления.

2. ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ

За десятилетия существования вычислительной аэродинамики были созданы целые классы численных методов решения уравнений Навье-Стокса. В процессе своего развития численные методы взаимно обогащаются за счет объединения в одном алгоритме сразу нескольких идей. Своим

становлением вычислительная аэрогидродинамика обязана группе численных методов, использующих конечно-разностные аппроксимации на основе центральных либо центрированных разностей с применением искусственной диссипации. В работе [32] авторами проведены сравнительные исследования двенадцати численных методов решения уравнений Навье-Стокса на задаче о двумерном взаимодействии скачка уплотнения с ламинарным пограничным слоем. В дополнение к известным явной и неявной схемам Мак-Кормака [33, 34], неявной факторизованной разностной схеме Бима-Уорминга [35], методам Стегера [36], Ли [37] и Ковени-Яненко [38], диагонализированному методу Шоссе-Пуллиама [39], LU схеме [40] подвергнуты сравнению предложенные авторами численные алгоритмы: один из вариантов повышения точности для метода Стегера [41], два смешанных явно-неявных метода [42, 43] и диагонализированный алгоритм повышенной точности [32, 44]. Сравнились затраты времени процессора на один шаг интегрирования, количество шагов до установления, число Куранта, принятое в расчетах, коэффициент затрат машинного времени по отношению к методу Стегера [36].

Дальнейший прогресс в развитии численных методов связан с усложнением используемых алгоритмов. Главным направлением здесь является учет структуры течения в процессе численного расчета. Речь идет о схемах с TVD свойствами, методах решения задачи Римана, а также использовании предобуславливателей (preconditioning) для расчета течений с очень малыми числами Маха.

Дискретизацию дифференциальных уравнений можно выполнить с помощью рядов Тейлора, вариационного метода, метода взвешенных невязок, а также метода контрольного объема. Алгоритмы, использованные в работе [32], основаны на методе конечных разностей. В настоящее время при использовании неструктурированных сеток для получения дискретных аналогов дифференциальных уравнений все чаще применяется метод контрольных объемов. Данный метод в значительной степени сходен с интегральным методом и имеет ясную физическую интерпретацию. В методе контрольных объемов расчетная область разбивается на непересекающиеся контрольные объемы. Дифференциальные уравнения интегрируют по каждому контрольному объему. При вычислении интегралов используют кусочно-гладкие профили, которые описывают изменение параметров потока между узловыми точками. Таким образом, искомое решение в каждом контрольном объеме

и всей расчетной области удовлетворяет законам сохранения массы, импульса и энергии.

Запишем дискретный аналог исходных интегральных уравнений (1):

$$C^n \cdot \Delta \mathbf{q}^n = \mathbf{R}^n, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^n &= -\frac{\Delta t}{V} \iint_{\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{n}) d\Omega = \\ &= -\frac{\Delta t}{V} \sum_{k=1}^6 [\mathbf{F}(\mathbf{q}_k) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{F}_v(\mathbf{q}_k) \cdot \mathbf{n}] \cdot \Omega_k \end{aligned}$$

– невязка разностного уравнения (5);

$$C^n = I - \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}} \right)^n$$

– блочная матрица невязной части; I – единичная матрица; $\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n + \Delta \mathbf{q}^n$ – значения параметров и приращения потоков на временных слоях $t = (n+1)\Delta t$ и $t = n\Delta t$. Следует заметить, что конечно-объемный подход допускает реализацию на структурированных и неструктурированных сетках.

Алгоритм расчета на каждом временном слое можно условно разбить на три этапа. Вначале проводится аппроксимация (реконструкция) параметров потока \mathbf{q}_L , \mathbf{q}_R с двух сторон грани контрольного объема (L, R – индексы левой и правой сторон грани k). Затем проводится расчет потоков через грань, и, наконец, формируется и решается система алгебраических уравнений.

Можно показать, что, как формально-математическую аппроксимацию с заданным порядком точности, так и применение ограничителей потоков, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_L &= \mathbf{q}_{k-} + \psi_{k-}(\Delta \mathbf{q}_{k-}, \Delta \mathbf{q}_k, \Delta \mathbf{q}_{k+}), \\ \mathbf{q}_R &= \mathbf{q}_{k+} - \psi_{k+}(\Delta \mathbf{q}_{k-}, \Delta \mathbf{q}_k, \Delta \mathbf{q}_{k+}), \end{aligned}$$

где \mathbf{q}_{k-} , \mathbf{q}_{k+} – значения параметров потока в узлах непосредственно до и после k -й грани; $\psi(\Delta \mathbf{q}_{k-}, \Delta \mathbf{q}_k, \Delta \mathbf{q}_{k+})$ – функция, зависящая от разностей параметров потока на интервалах сетки, прилегающих к k -й грани; $\Delta \mathbf{q}_k$ определяется на интервале, охватывающем грань: $\Delta \mathbf{q}_k = \Delta \mathbf{q}_{k+} - \Delta \mathbf{q}_{k-}$; $\Delta \mathbf{q}_{k-}$, $\Delta \mathbf{q}_{k+}$ соответствуют интервалам, находящимся до и после k -го интервала.

Первому порядку точности интерполяции соответствует $\psi = 0$. Для построения схемы более высокого порядка точности переменные экстраполируются на поверхности ячеек. В схеме второго

порядка точности против потока переменные определяются с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_L &= \mathbf{q}_{k-} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{q}_{k-}, \\ \mathbf{q}_R &= \mathbf{q}_{k+} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{q}_{k+}. \end{aligned}$$

В схеме третьего порядка против потока

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_L &= \mathbf{q}_{k-} + \frac{1}{8} (3\Delta \mathbf{q}_k + \Delta \mathbf{q}_{k-}), \\ \mathbf{q}_R &= \mathbf{q}_{k+} - \frac{1}{8} (3\Delta \mathbf{q}_k + \Delta \mathbf{q}_{k+}). \end{aligned}$$

В последнее время особое внимание уделяется схемам TVD. Основная идея TVD схем заключается в совместном использовании противопоточной аппроксимации с принципом невозрастания полной вариации решения [45]. Параметры потока на грани слева и справа полагаются одинаковыми и определяются по противопоточной экстраполяции (интерполяции) в зависимости от знака скорости через грань:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_L &= \mathbf{q}_{k-} + \psi_{k-}(\Delta \mathbf{q}_{k-}, \Delta \mathbf{q}_k, \Delta \mathbf{q}_{k+}), \quad U \geq 0, \\ \mathbf{q}_R &= \mathbf{q}_{k+} - \psi_{k+}(\Delta \mathbf{q}_{k-}, \Delta \mathbf{q}_k, \Delta \mathbf{q}_{k+}), \quad U < 0. \end{aligned}$$

Выбором нелинейного ограничителя потоков достигается невозрастание полной вариации решения, проявляющееся в невозникновении экстремумов искусственного происхождения.

Ограничитель MinMod [45] имеет вид

$$\psi_{k+} = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{MinMod}(\Delta \mathbf{q}_k, \Delta \mathbf{q}_{k+}), & (\Delta \mathbf{q}_k \cdot \Delta \mathbf{q}_{k+}) > 0, \\ 0, & (\Delta \mathbf{q}_k \cdot \Delta \mathbf{q}_{k+}) \leq 0. \end{cases}$$

Ограничитель для схемы ISNAS [46]:

$$\psi_{k+} = \begin{cases} \frac{1}{2} \Delta \mathbf{q}_k \frac{(\Delta \mathbf{q}_{k+}^2 + 3\Delta \mathbf{q}_k \cdot \Delta \mathbf{q}_{k+})}{(\Delta \mathbf{q}_k + \Delta \mathbf{q}_{k+})^2}, & (\Delta \mathbf{q}_k \cdot \Delta \mathbf{q}_{k+}) > 0, \\ 0, & (\Delta \mathbf{q}_k \cdot \Delta \mathbf{q}_{k+}) \leq 0. \end{cases}$$

Ограничитель схемы UMIS TVD [47] имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_{k+} &= -\frac{1}{2} \text{sign}(\Delta \mathbf{q}_k) \times \\ &\times \text{Max}[0, \text{Min}(\text{sign}(\Delta \mathbf{q}_k) \cdot \Delta \mathbf{q}_k, |\Delta \mathbf{q}_k|)]. \end{aligned}$$

Ограничитель схем SLIP, CUSP предложен Jameson [48]:

$$\psi_{k+} = \frac{(\Delta \mathbf{q}_{k-} + \Delta \mathbf{q}_{k+})}{4} \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{(\Delta \mathbf{q}_{k-} - \Delta \mathbf{q}_{k+})}{(|\Delta \mathbf{q}_{k-}| + |\Delta \mathbf{q}_{k+}| + \epsilon)} \right)^2 \right], \epsilon = 10^{-3}.$$

Кроме указанных выше ограничителей потоков, широко применяются Superbee Roe [49], а также ограничители, рассмотренные в работах Van Leer [50], Sweby [51]. В настоящее время существуют параметрические зависимости для ограничителей потоков, позволяющие конструировать их с определенными наперед заданными свойствами.

Опыт работы с TVD схемами показывает их высокую надежность и хорошее качество получаемых численных решений в широком диапазоне определяющих параметров. В то же время следует отметить, что свойства ограничителей потоков изучены не полностью, в частности остается открытым вопрос о влиянии ограничителей потоков на физически обусловленные экстремумы; отсутствуют критерии выбора оптимального ограничителя потоков.

Методы, основанные на решении задачи Римана, опираются на точный или приближенный расчет распада разрыва [5, 52].

В методе Годунова [5] при определении вектора потока используется точное решение задачи распада [53]. Формальную запись вектора потока на грани контрольного объема можно представить в виде

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}(\mathbf{Q}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)_k), \quad (4)$$

где $\mathbf{Q}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)_k$ – параметры потока на k -й грани, полученные в результате итерационного процесса расчета распада разрыва; $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{Q})$ – функциональная зависимость вектора потока от параметров потока (2).

Приближенное решение задачи о распаде разрыва дает группа методов, основанных на расщеплении векторов потоков. Приведем некоторые наиболее распространенные схемы в виде, аналогичном (4).

1. Расщепление векторов потоков Steger-Warming [54]:

$$\mathbf{F}_k^{(S-W)} = A^+(\mathbf{q}_L) \cdot \mathbf{q}_L + A^-(\mathbf{q}_R) \cdot \mathbf{q}_R.$$

2. Модифицированное расщепление векторов потоков Steger-Warming [55]:

$$\mathbf{F}_k^{(S-W)\text{mod}} = A^+(\mathbf{q}_k) \cdot \mathbf{q}_L + A^-(\mathbf{q}_k) \cdot \mathbf{q}_R,$$

$$\mathbf{q}_k = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_L + \mathbf{q}_R).$$

3. Расщепление векторов потоков Roe [49]:

$$\mathbf{F}_k^{(Roe)} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}(\mathbf{q}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{q}_R) - \left| \tilde{A} \right| (\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L) \right].$$

4. Расщепление векторов потоков Van Leer [56]:

$$\mathbf{F}_k^{(VL)} = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{q}_L), & M_k \geq 1; \\ \mathbf{F}^+(\mathbf{q}_L) + \mathbf{F}^-(\mathbf{q}_R), & |M_k| < 1; \\ \mathbf{F}(\mathbf{q}_R), & M_k \leq -1. \end{cases}$$

Здесь $A(\mathbf{q}) = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{q} = T \cdot \Lambda \cdot T^{-1}$ – матрица Якоби, записанная через матрицу собственных векторов T , диагональную матрицу собственных чисел Λ и матрицу T^{-1} , обратную к T [57]. Матрицы A^+ и A^- соответствуют положительным и отрицательным значениям Λ .

В записи расщепления векторов потоков Roe $|\tilde{A}| = \tilde{T} \cdot |\tilde{\Lambda}| \cdot \tilde{T}^{-1}$ обозначает матрицу Якоби, определенную абсолютными значениями Λ , на основе среднегеометрической интерполяции параметров потока по Roe [49]. Форму записи расщепленных векторов \mathbf{F}^+ и \mathbf{F}^- по методу Van Leer можно найти в работах [2, 56].

Кроме указанных выше методов расщепления, можно упомянуть методы AUSM [58], CUSP [48], успешно применявшиеся для решения ряда задач. Все данные методы используют формально-математическое приближение решения распада разрыва в физических величинах, обладают простотой подхода, отсутствием дополнительных итераций. К недостаткам методов расщепления следует отнести отсутствие учета энтропии, возможность появления скачков разрежения, и как следствие, необходимость подключения ограничителей потоков.

На втором этапе алгоритма возможно применение существенно неосциллирующих схем семейства ENO [45, 59], которые занимают промежуточное положение между методом Годунова и методами расщепления. С одной стороны, схемы ENO дают приближенное безытерационное решение распада разрыва, что объединяет их с методами расщепления. С другой стороны, здесь учитывается закон неубывания энтропии на основе интегрирования в пространстве характеристических переменных, что приближает схемы ENO к методу Годунова.

На завершающем этапе формируется и решается система линейных блочно-матричных уравнений (5). Интегрирование системы уравнений (5) по времени может осуществляться с помощью явных схем (полагая матрицу левой части тождественно равной единичной $C^n \equiv I$), а также неявных алгоритмов.

Из явных алгоритмов реализованы схема Эйлера первого порядка по времени для нахождения установившихся режимов течения и многошаговая схема Рунге-Кутты [2], необходимая для расчета

нестационарных явлений.

При реализации неявных схем методы решения системы алгебраических уравнений (3) существенно зависят от типа применяемой разностной сетки. Использование регулярных сеток позволяет проводить факторизацию (расщепление по пространству) системы (3), сводя метод решения к последовательности скалярных или векторных прогонок либо к схемам бегущего счета. Такой подход является весьма эффективным и в течение многих лет был фактически единственным неявным алгоритмом в вычислительной аэрогидродинамике. В то же время, применение приближенной факторизации накладывает весьма серьезные ограничения и по типу сетки (только регулярные), и по числам Куранта (200÷400), и по возможностям решения нестационарных задач [2, 4, 12, 55].

Отказ от идеи факторизации для неявных схем приводит к итерационным процедурам на каждом шаге по времени во всей расчетной области. Один из самых распространенных итерационных методов решения систем блочно-матричных алгебраических уравнений – метод Гаусса-Зейделя:

$$\Delta \mathbf{q}_i^{n,m} = c_{ii}^{-1} \cdot \left(\mathbf{R}_i - \sum_{i < j} c_{ij} \Delta \mathbf{q}_j^{n,m} - \sum_{i > j} c_{ij} \Delta \mathbf{q}_j^{n,m-1} \right). \quad (5)$$

Здесь c_{ij} – матрицы, являющиеся элементами глобальной матрицы C^n (3); m – номер итерации. Из градиентных методов решения системы уравнений (3) широко распространены метод сопряженных градиентов [2, 60] и GMRES [61].

Итерационные методы допускают использование больших чисел Куранта в расчете (до 10000), хорошо алгоритмируются, не зависят от типа сеток, допускают расширения шаблона в неявной части. В то же время, они требуют большего объема оперативной памяти. Увеличение затрат на один шаг по времени компенсируется большим числом Куранта. В целом итерационные методы являются более универсальными, чем подходы, основанные на факторизации.

Следует, однако, заметить, что, несмотря на имеющийся прогресс, не существует “идеального” подхода к решению уравнений Навье-Стокса, свободного от всех недостатков.

Разрабатываемый авторами в течение ряда лет [2, 4] пакет прикладных программ решения задач аэрогидродинамики и тепломассообмена базируется на самых общих принципах, позволяющих проводить его настройку на требуемую конфигура-

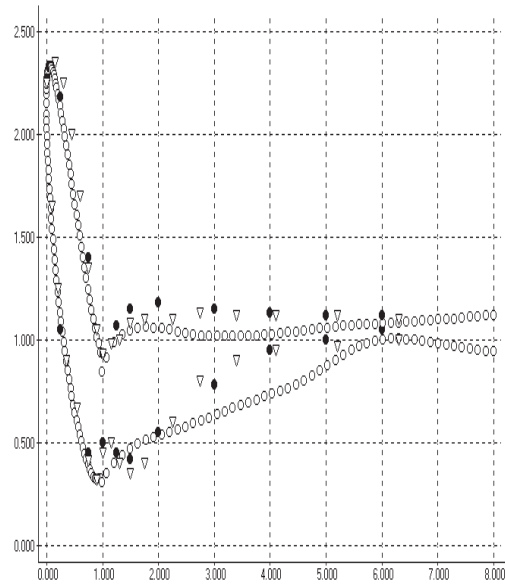


Рис. 4. Распределение давления в плоскости симметрии на поверхности тела сфера-цилиндр:
○ – расчет настоящей работы,
▽, ● – расчет и эксперимент [56]

цию численного алгоритма. Структура пакета является открытой для расширения за счет внедрения новых моделей, численных методов и компьютерных технологий.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Верификация методик и программ. Тестирование разработанных алгоритмов и программ – необходимый этап любого численного исследования отрывных течений. Как выше упоминалось, для двумерных отрывных течений было проведено сравнение двенадцати численных методов решения уравнений Навье-Стокса. Верификация для метода Van Leer [56] в рамках уравнений Эйлера проведена на основе невязкого трансзвукового обтекания профиля NACA 0012 при $M_\infty=0.8$ и угле атаки $\alpha=1.25^\circ$ (рис. 2). Дальнейшее тестирование выполнено на задачах обтекания вязким сверхзвуковым потоком цилиндра, а также тела в виде сфера-цилиндр [2].

Основные закономерности развития отрывного течения при обтекании цилиндра можно проследить на изолиниях чисел Маха, представленных на рис. 3 ($M_\infty=5.73$; $Re_D=3.16 \cdot 10^4$). Здесь отчетливо видно отошедшую ударную волну, зону отрыва потока, скачки уплотнения от отрыва и

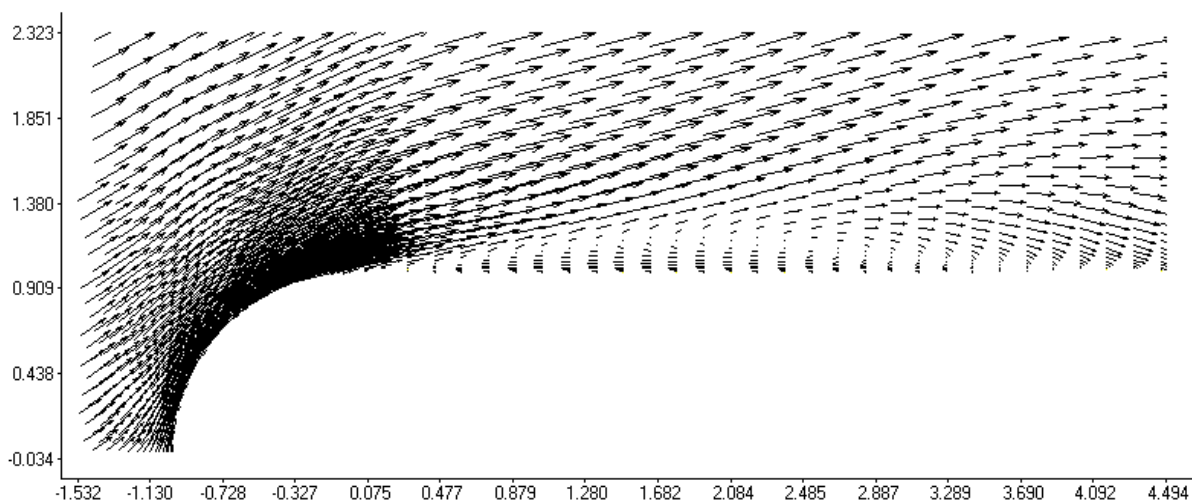


Рис. 6. Распределение векторов скорости в плоскости симметрии на подветренной стороне

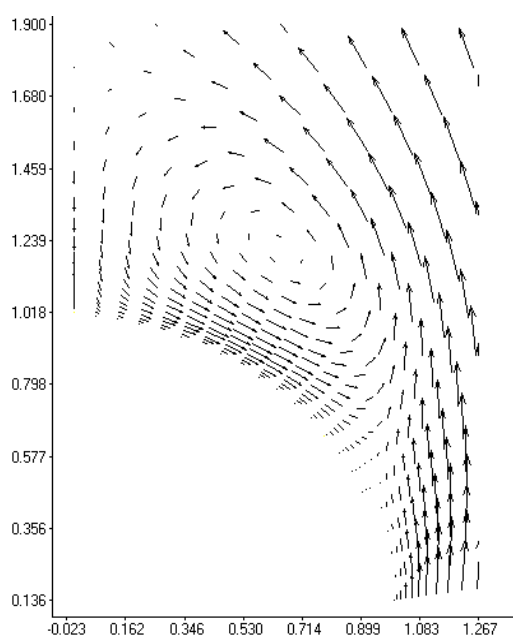


Рис. 5. Векторы скорости в плоскости, перпендикулярной оси тела

присоединения, область следа. Расчетная картина течения, полученная по методу Roe [49] с применением ограничителей потоков CUSP [48], соответствует известным тепловым снимкам [62]. Распределение давления на подветренной поверхности цилиндра ($90^\circ < \phi < 180^\circ$), отнесенное к давлению в точке торможения, хорошо согласуется с экспериментальными данными [63].

Верификация программ решения трехмерных уравнений Навье-Стокса осуществлялась на осно-

ве моделирования ламинарного отрыва на подветренной поверхности тела, образованного полусферой и цилиндром (рис. 4–6). Расчет проводился при $M_\infty=1.2$, $Re=2 \cdot 10^5$, $\alpha=19^\circ$. Распределение давления в плоскости симметрии хорошо согласуется с экспериментальными [64] и расчетными данными [65]. Векторы скорости иллюстрируют отрывную зону, образующуюся на подветренной стороне в результате взаимодействия потоков, обтекающих цилиндр при большом угле атаки.

Особенности формирования и развития сверхзвуковых турбулентных отрывных течений при взаимодействии скользящих скачков уплотнения и пограничного слоя. Пространственное взаимодействие ударных волн с пограничными слоями относится к числу наиболее сложных задач механики жидкости и газа. Практическая значимость таких исследований обусловлена тем, что данный класс взаимодействий возникает фактически во всех сверхзвуковых течениях. Нелинейность определяющих параметров, наличие в сравнительно небольшой геометрической области всех газодинамических эффектов вызывает неизменный теоретический интерес к данной проблеме.

Накопление данных экспериментальных исследований по режимам развития, условиям возникновения и структуре пространственных отрывных течений позволил установить ряд их особенностей [66, 67]. К числу такого рода особенностей относится конический характер взаимодействия скользящих скачков уплотнения с турбулентным пограничным слоем [66–69]. Под термином “скользящие” скачки уплотнения понимают обычно ударные волны, образующиеся при обтека-

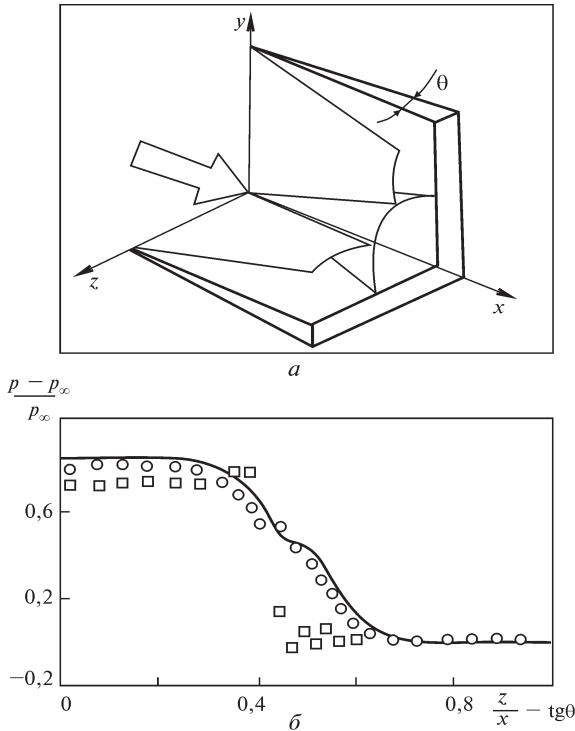


Рис. 7. Схема течения (а) и распределение давления (б) при обтекании пространственного угла из двух клиньев:
 ○ – эксперимент,
 □ – расчет на основе уравнений Эйлера,
 — – настоящая работа

нии различных обтекателей и элементов конструкции, расположенных на поверхности летательного аппарата. Это, в частности, скошенные и вертикальные клинья, стреловидные углы сжатия (рис. 7–13).

Существование конических режимов для данного класса течений дает возможность применить к численному исследованию пространственных течений с вязко-невязким взаимодействием коническое приближение уравнений Навье-Стокса [70–72], которое ранее широко использовалось в основном в рамках невязких моделей при решении задач внешней аэродинамики.

Анализ экспериментальных данных по трехмерному взаимодействию скользящих скачков уплотнения с пограничным слоем свидетельствует о сходстве структуры и характеристик течения в зонах плоского и трехмерного отрыва, вызванного ударными волнами. Основные закономерности развития течения в широком диапазоне изменения определяющих параметров определяются зачастую не характером продольного обтекания, а структурой течения в поперечном направлении.

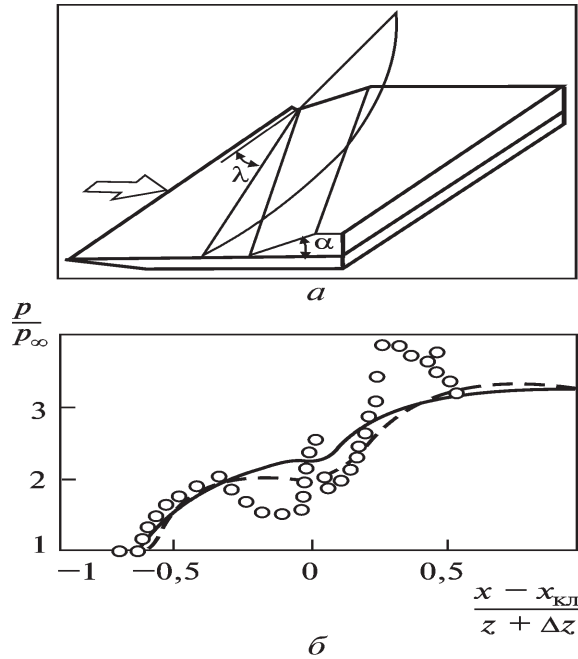


Рис. 8. Схема течения (а) и распределение давления (б) при обтекании стреловидного угла сжатия:
 ○ – эксперимент Сеттлса,
 --- – расчет Horstman,
 — – настоящая работа

При этом, несмотря на значительное влияние вязких эффектов на структуру и распределение газодинамических характеристик в поперечном сечении, в этих течениях, как и во многих других исследованиях взаимодействия скачка уплотнения с ламинарным и турбулентным пограничным слоем с высокой точностью, наблюдается конический характер течения.

На рис. 7–13 представлены схемы течений, расчетные области, распределение предельных линий тока и основные результаты численных исследований по расчету взаимодействия скользящих скачков уплотнения с турбулентными пограничными слоями, выполненных в рамках разработанного пакета прикладных программ и представленных в работах [70–75]. Для расчета каждой из задач в пакет прикладных программ подключались только модули, выполняющие отображение физической области на расчетную.

Расчеты проведены при следующих определяющих параметрах: пространственный угол из двух клиньев (рис. 7) $M_\infty = 2.98$, $\theta = 9.49^\circ$, $Re_L = 5 \cdot 10^6$; стреловидного угла сжатия (рис. 8) $M_\infty = 2.95$, $Re_{\delta_0} = 10^6$, $\delta_0 = 0.0226$ м, $\alpha = 24^\circ$, $\lambda = 60^\circ$; вертикального клина (рис. 11) $M_\infty = 2.94$, $Re_{\delta_0} = 8.2 \cdot 10^5$, $\delta_0 = 0.013$ м, $\alpha = 4^\circ \div 28^\circ$.

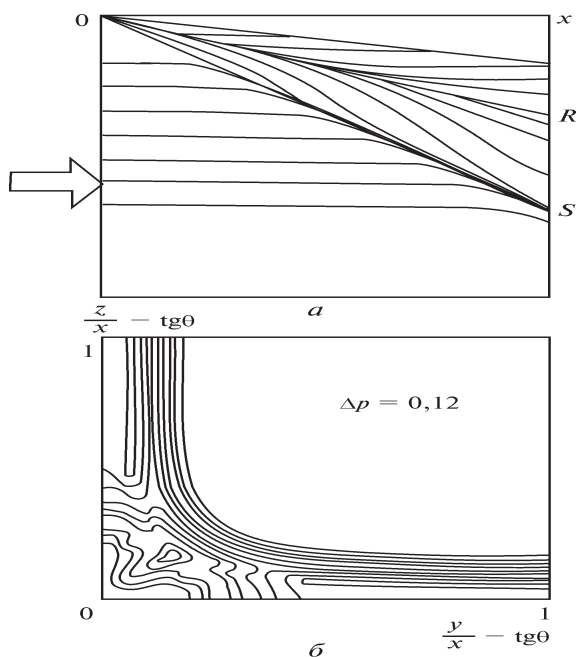


Рис. 9. Предельные линии тока (а) и изобары (б) в расчетной области при обтекании пространственного угла из двух клиньев

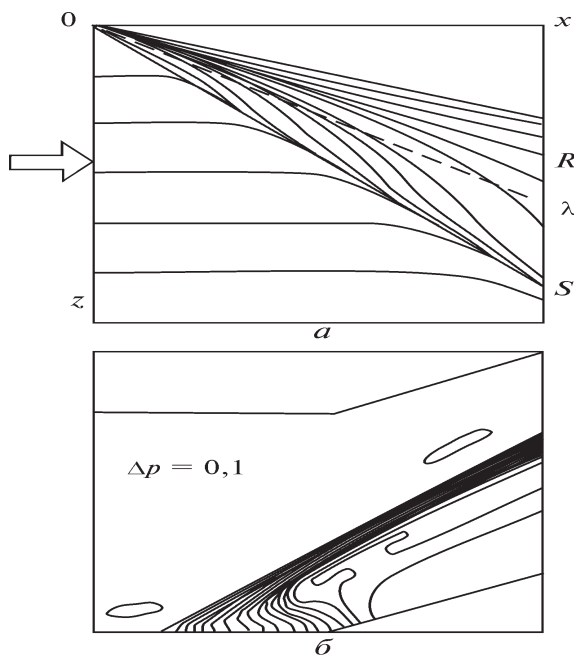


Рис. 10. Предельные линии тока (а) и изобары (б) в расчетной области при обтекании стреловидного угла сжатия

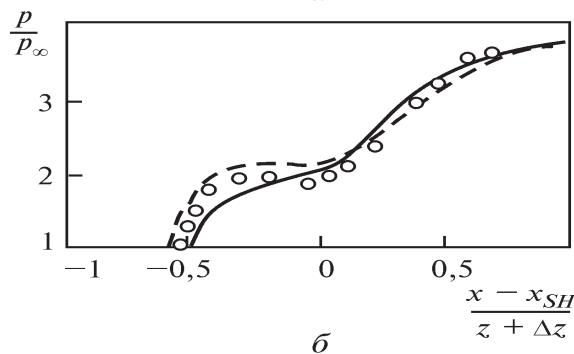
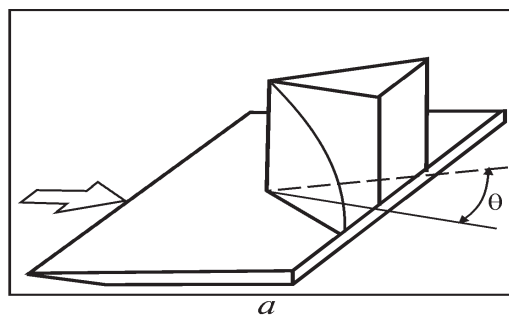


Рис. 11. Схема течения (а) и распределение давления (б) при обтекании вертикального клина, установленного на пластине:
 ○ – эксперимент, --- расчет Horstman, — настоящая работа

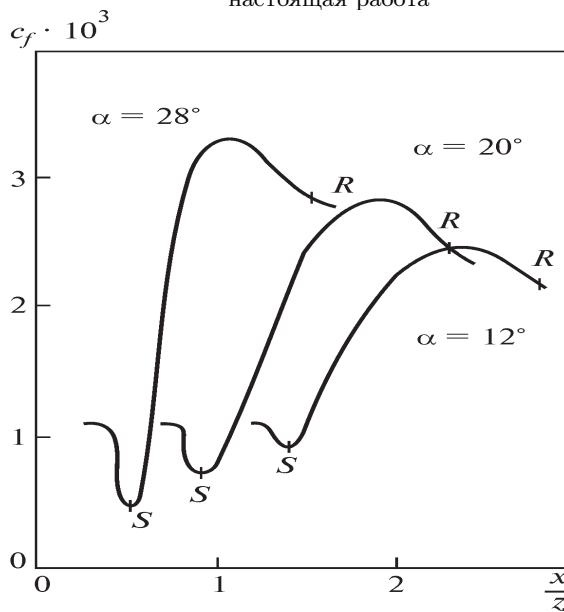


Рис. 12. Распределение коэффициента трения при обтекании вертикального клина, установленного на пластине:
 S - положение линии отрыва, R - положение линии присоединения

Обтекание угла из двух клиньев (рис. 7, 9) происходит с образованием скачка уплотнения. Повышение давления в зоне пересечения поверхностей передается поперек потока по дозвуковой части пограничного слоя, это приводит к торможению потока в пограничном слое, утолщению пограничного слоя и его отрыву. При этом область отрыва движется поперек потока по плоской поверхности клиньев до тех пор, пока силы, пропорциональные градиенту давления, не уравновесятся силами трения и инерции. Пространственная ударная волна, исходящая от линии отрыва, взаимодействует с головной ударной волной и дает в поперечном направлении λ -образный скачок уплотнения. Область оторвавшегося потока заполняется вихрями, которые сворачиваются в спираль и уносятся под действием внешнего течения вниз по потоку.

Анализ распределения изобар в области взаимодействия скользящих скачков уплотнения и турбулентного пограничного слоя, предельных линий тока и давления на обтекаемых угловых конфигурациях (рис. 8, 10–13) показал, что, несмотря на существенно различную геометрию генераторов скачков уплотнения, поля течений имеют общие основные черты, согласующиеся с известной аналогией двумерных течений [67].

Падающий скользящий скачок уплотнения индуцирует поперечный градиент давления. Положительный градиент давления приводит к утолщению дозвуковой области пограничного слоя, интенсификации передачи возмущений поперек потока, взаимодействию поперечных течений с набегающим сверхзвуковым потоком, формированию областей с растеканием и стеканием предельных линий тока и в конечном итоге к формированию пространственного отрыва разрежения, скачок присоединения в виде характерной λ -ножки.

В то же время, пространственный отрыв потока обладает принципиальными отличиями от двумерного. Например, при обтекании трехмерных препятствий образуется подковообразный отрывной вихрь, в котором лишь в двух особых точках модуль касательного напряжения равен нулю. В коническом приближении обе особые точки (седловая и узловая) стягиваются в одну, которая является “источником” конического отрывного течения. В остальных точках поверхности модуль касательного напряжения не равен нулю, и положение линий отрыва и присоединения определяется по стеканию и растеканию предельных линий тока (рис. 10, 13). Кроме того, в плоских отрывных течениях параметры потока в параллельных

плоскостях идентичны. В коническом же течении продольный рост отрывного вихря ведет к увеличению масштабов и интенсивности волны разрежения. Это проявляется в характерном перегибе кривой распределения давления.

Результаты параметрических расчетов с помощью пакета прикладных программ обтекания сверхзвуковым потоком вертикального клина представлены в работе [68]. Численные эксперименты выполнены при фиксированных параметрах невозмущенного потока; варьировался в широком диапазоне только угол генератора скачка уплотнения – от 4 до 28 градусов через 4 градуса. Расчеты выполнены на сетках с экспоненциальным сгущением в областях пограничных слоев, возникающих на пластине и боковой поверхности острого вертикального клина, и равномерным шагом в “невязкой” области. Сетка дополнительно сгущалась вблизи скачка уплотнения.

На рис. 13 представлены распределения изобар в области взаимодействия. Косой скачок уплотнения от вертикального клина распространяется вниз по потоку, оставаясь перпендикулярным пластине. Положительный градиент давления, вызванный взаимодействием скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем, передается поперек потока через дозвуковую пристеночную область. Перед ударной волной образуется волна сжатия, переходящая (аналогично двумерным течениям) с увеличением перепада давления в скачок отрыва.

Распределение предельных линий тока на поверхности пластины и изобар в области взаимодействия скользящего скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем (рис. 13) наглядно демонстрируют процесс перестройки режима обтекания от безотрывного при малой интенсивности ударной волны и невысоком перепаде давления ($\alpha=4^\circ$) к зарождению ($\alpha=8^\circ \div 12^\circ$) и формированию обширного пространственного отрывного течения ($\alpha=20^\circ$) при обтекании вертикального клина. При малом перепаде давления влияние поперечных течений невелико. Предельные линии тока проходят через всю область взаимодействия и лишь незначительно изменяют свое направление – течение безотрывное. С ростом интенсивности косого скачка уплотнения набегающие линии тока перестраиваются, начинают резко поворачиваться и асимптотически сходятся к линии отрыва. Образуется вихрь, расширяющийся по коническому закону. Течение внутри отрывного вихря в направлении набегающего сверхзвукового потока происходит в отличие от двумерного

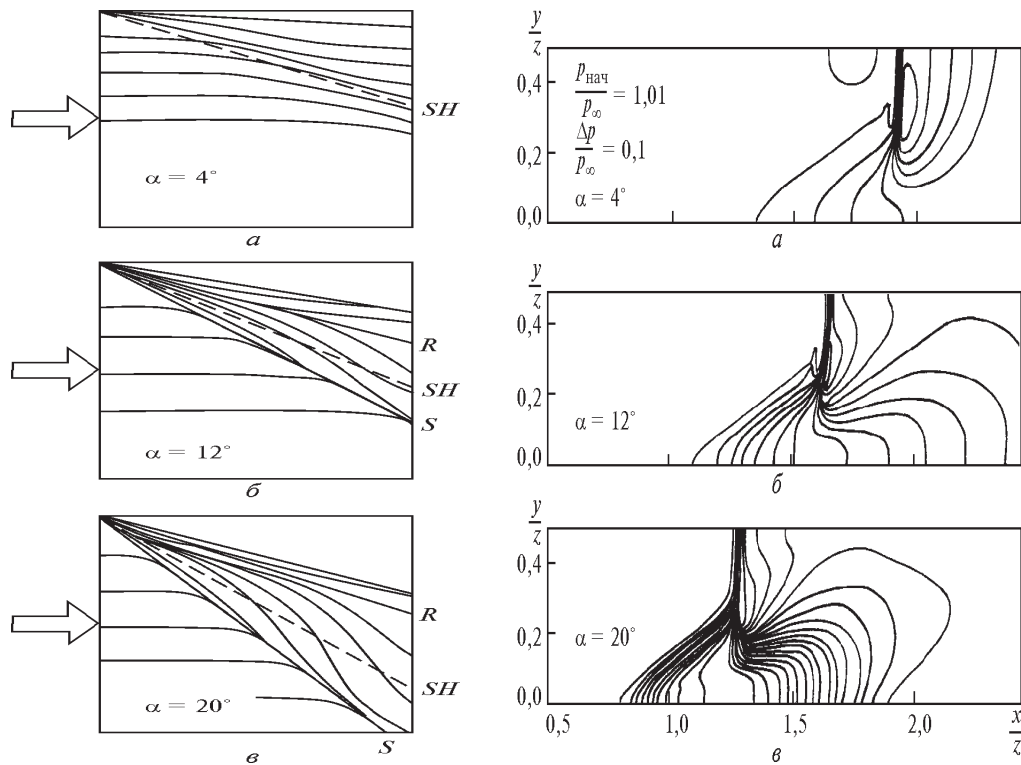


Рис. 13. Предельные линии тока и изобары в расчетной области при обтекании вертикального клина, установленного на пластине: а – $\alpha=4^\circ$, б – $\alpha=12^\circ$, в – $\alpha=20^\circ$

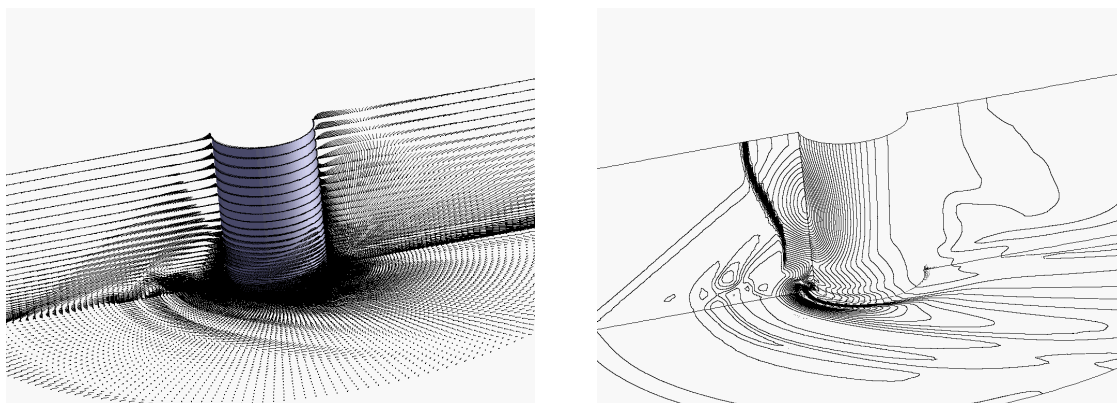


Рис. 14. Распределение векторов скорости (слева) и изобар (справа) при обтекании вертикального цилиндра, установленного на пластине

отрыва потока без возвратного течения. Близкое к нулю трение было зафиксировано лишь в небольшой области внутри отрывного вихря при $\alpha=28^\circ$. За косым пространственным скачком происходит присоединение потока с образованием интенсивной волны сжатия. В распределениях поверхностных линий тока проявляется характерное растекание. Направление векторов скорости к пласти-

не приводит к сжатию пограничного слоя, уменьшению дозвуковой области течения. Это вызывает увеличение скорости в пристеночной области. Модуль коэффициента трения возрастает в несколько раз по сравнению со значениями в набегающем пограничном слое. Процесс интенсифицируется с увеличением угла раствора клина. При этом на линиях тока, возвращающихся в отрыв-

ную область, касательные напряжения выше, чем за линией присоединения. На приведенных на рис. 12 распределениях модуля коэффициента трения видно, как касательные поверхностные напряжения резко падают вблизи линии отрыва, затем возрастают и имеют максимум перед линией присоединения. В целом полученные результаты при обтекании вертикального клина по основным параметрам взаимодействия соответствуют имеющимся экспериментальным данным. Представленные расчеты согласуются с универсальными зависимостями, предложенными в работе [67], а также представлениям о “коническом свободном взаимодействии”. Опыт расчетов показал, что коническое приближение позволяет сократить затраты машинного времени на два порядка по сравнению с трехмерной системой уравнений Навье-Стокса.

Из сравнения полученных результатов с экспериментальными данными и расчетами на основе трехмерных уравнений Навье-Стокса следует, что применение конического приближения уравнений Навье-Стокса позволяет адекватно описать структуру и основные параметры (положение скачков уплотнения, волн разрежения, линий отрыва и присоединения, положение на кривой и величину “плато” давления, общий перепад давления) для пространственного взаимодействия скользящих скачков с турбулентным пограничным слоем.

Интерференция отрывных потоков вызывает большой интерес в силу своей сложности и сравнительно малой изученности [76–78]. Примером такого рода интерференционного взаимодействия является обтекание вертикального цилиндра, установленного на пластине (рис. 14). Головная ударная волна вызывает отрыв в набегающем ламинарном пограничном слое, присоединение которого происходит на пластине непосредственно перед цилиндром. Точка растекания соответствует точке максимального давления. Формируется первичный подковообразный отрывной вихрь, приводящий, в свою очередь, к образованию волн разрежения в зоне присоединения отрыва. Волны разрежения создают неблагоприятный градиент давления для потока, возвращающегося в зону отрыва, что приводит к формированию вторичного отрыва, который также имеет подковообразную форму. На подветренной стороне цилиндра отрывные вихри, аналогичные рассмотренному выше двумерному случаю (рис. 3), при взаимодействии с пограничным слоем на пластине образуют смерчеобразные вертикальные потоки, которые деформируются при интерференции с первичным подковообразным отрывом. Это проявляется в смещении и пе-

рекомпоновке особых точек стекания и растекания на пластине за цилиндром. Полученная картина взаимодействия соответствует данным работ [79, 80]. Однако топологическая интерпретация данного типа интерференции, предложенная в этих работах, представляется далеко не бесспорной.

Исследования особенностей трехмерных взаимодействующих отрывных течений – это тема дальнейших работ авторов настоящей статьи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для численного исследования отрыва пространственного турбулентного пограничного слоя течений применяется единый методологический подход, базирующийся на полных трехмерных нестационарных и упрощенных уравнениях Навье-Стокса. Замыкание системы уравнений осуществлено с помощью моделей турбулентной вязкости. Реализация используемого подхода выполнена в рамках разработанного пакета прикладных программ. Приводятся результаты расчетов обтекания сверхзвуковым набегающим потоком цилиндра, под углом атаки профиля, комбинации сфера-цилиндр, пространственного угла из двух клиньев, стреловидного угла сжатия, вертикального клина и кругового цилиндра, установленных на пластине. Анализ результатов показывает, что пространственный отрыв пограничного слоя без привлечения дополнительных предположений можно исследовать только в рамках уравнений Навье-Стокса. Учет нестационарности и крупномасштабной турбулентности, выявление детальных структур интерференционных течений требуют дальнейшего совершенствования численных методов и компьютерной техники.

1. Prandtl L. *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reihung*. Verhandlg. // III Intern. Math. Kongr., Heidelberg, 1904. – P. 484-491.
2. Приходько А.А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и тепломассообмене. – Киев: Наукова думка, 2003. – 382 с.
3. Чепмен Д.Р. Вычислительная аэродинамика и перспективы ее развития. Драйденовская лекция // Ракетная техника и космонавтика, 1980. – Т. 18, N 2. – С. 3–30.
4. Беляев Н.М., Полевой О.Б., Приходько А.А. Основные численные методы расчета течений невязкого газа. – Днепропетровск: ДГУ, 1989. – 160 с.
5. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов В.Я., Крайко А.И., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
6. Пирумов У.Г., Росляков Г.С. Численные методы газовой динамики. – М.: Высшая школа, 1987. – 232 с.

7. Численные методы в динамике жидкостей / Под ред. Г. Вирц, Ж. Смолдена.– М.: Мир, 1981.– 408 с.
8. *Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен.– М.: Мир, 1990. Т.1. –392 с.; Т.2. – 336 с.
9. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкости. В 2-х томах. – М.: Мир, 1991. Т. 1. – 501 с.; Т. 2. – 552 с.
10. *Булах В.М.* Нелинейные конические течения газа. – М.: Наука, 1970. – 344 с.
11. *McRae D.S.* A numerical study of supersonic viscous cone flow at high angle of attack // AIAA Paper, 1976. N 0097.– 11 p.
12. *Ковеня В.М.* Проблемы вычислительной аэродинамики // Методы аэрофизических исследований. – Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1987. – С. 80-91.
13. *Steger J.L., Warming R.F.* Flux Vector Splitting of the inviscid gas dynamic equation with application to finite-difference methods // J. Comput. Phys., 1981. V. 40, N2.– P. 263-294.
14. *Кутлер П., Пуллиам Т.Х., Винерон И.К.* Расчет обтекания внешнего двугранного угла сверхзвуковым потоком вязкого газа // Ракетная техника и космонавтика.– 1979. – Т. 17, N 6. – С. 34–42.
15. *Ковеня В.М.* Некоторые проблемы вычислительной аэродинамики // Конструирование алгоритмов и решение задач мат. физики. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1987. – С. 5-17.
16. Турбулентность. Принципы и применения / Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена. – М.: Мир, 1980. – 535 с.
17. *Baldwin B., Lomax H.* Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows // AIAA Paper. 1978. N 0257. – 8 p.
18. *Cebeci T., Smith A.M.* A finite solution of the incompressible turbulent boundary-layer equations by an addviscosity concept // Proc. AFOSR-IFR-Stanford Conference. – 1969.– 12 p.
19. *Совершенный В.Д.* Модель полной вязкости в пристеночной области турбулентного пограничного слоя // ИФЖ. – 1974. – 27, N 5. – С. 920–921.
20. *Глушко Г.С.* Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости // Вестник АН СССР. Механика. – 1965. – N 4. – С. 13–23.
21. *Rubesin M.W.* A one-equation model of turbulence for use with the compressible Navier-Stokes equations // NASA TM X-73. – 1976. – N 128.
22. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flow // La Recherche Aerospaciale. – 1994. – N 1. – P. 5–21.
23. *Jones W.P., Launder B.E.* The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence // Ibid. – 1972. – 15. – P. 301–314.
24. *Wilcox D.C., Traci R.M.* A complete model of turbulence // AIAA Pap. – 1976. – N 357.
25. *Menter F.R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal. – 1994. – 32, N 8. – P. 1598–1605.
26. *Приходько А.А.* Об одном методе численного исследования турбулентных течений вязкого сжимаемого газа // Математические методы жидкости и газа. – Днепропетровск: ДГУ, 1982. – С. 84–91.
27. *Maeder T., N. A. Adams N.A., Kleiser L.* Direct numerical simulation of turbulent supersonic boundary layers by an extended temporal approach // J. Fluid Mech.– 2001. – V. 429. – P. 187–216
28. *Geurts B.J.* Direct and large-eddy simulation of turbulent flow// JMBC – 2003. – 100 p.
29. *Spalart P.R.* Detached Eddy Simulation// IAM-PIMS Joint Distinguished Colloquium, 2001. – 33 p.
30. *Anderson W.K., Rausch R.D., Bonhaus D.L.* Implicit multigrid algoritms for incompressible turbulent flows on unstructured grids // J. of Computational Physics. – 1996. – 128, N 2. – P. 391–408.
31. *Мэриплис Д.Д.* Многосеточный метод повышенной точности для решения уравнений Эйлера на неупорядоченных и адаптивных сетках // Аэрокосмическая техника. – 1990. – N 12. – С. 47–59.
32. *Беляев Н.М., Полевой О.Б., Приходько А.А.* Численные алгоритмы второго и повышенного порядков точности для расчета течений вязкого газа // Гидромеханика и теория упругости. – Днепропетровск: ДГУ, 1990. – С. 16–22.
33. *MacCormack R.W.* The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // AIAA Paper. – 1969. – N 354. – 17 p.
34. *Mac-Cormack R.W.* A rapid solver for hyperbolic system of equations // Lecture Notes physics. – 1976. – N 59. – P. 307–317.
35. *Бим Р.М., Уорминг Р.Ф.* Неявная факторизованная разностная схема для уравнений Навье-Стокса течений сжимаемого газа // Ракетная техника и космонавтика, 1978. – Т. 16, N 4. – С. 145–156.
36. *Стегер Дж.Л.* Неявный конечно-разностный метод для расчета двумерного обтекания тел с произвольной геометрией // Ракетная техника и космонавтика, – 1978. – Т. 16, N 7. – С. 51–60.
37. *Li C.P.* A mixed explicit-implicit splitting method for the compressible Navier-Stokes equation // Lect. Notes Phys. – 1976. – Т. 59. – P. 285-292.
38. *Ковеня В.М., Яненко Н.Н.* Разностная схема на подвижных сетках для решения уравнений вязкого газа // ЖВМ и МФ. – 1979. – 19, N 1. – С. 174–188.
39. *Шоссе Д.С., Пуллиам Т.Х.* Численное моделирование работы плоского воздухозаборника с помощью диагональной неявной схемы // Ракетная техника и космонавтика. – 1981. – Т. 19, N 3. – С. 33–41.
40. *Pan D., Lomax H.* A new approximate LU factorization scheme for the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations // AIAA Pap. – 1986. – N 0337. – 10 p.
41. *Полевой О.Б., Приходько А.А.* Численное исследование влияния условий теплообмена на структуру турбулентных отрывных течений с применением алгоритма повышенной точности // Математические методы тепломассопереноса. – Днепропетровск: ДГУ, 1987. – С. 83 – 88.
42. *Приходько А.А.* Об одном явно-неявном методе численного решения уравнений Навье-Стокса // – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т. – 1982 – 12с. - Библиогр. 7 назв. - Рус. Деп. в ВИНТИ 26.11.82 г., N 5894-82.
43. *Приходько А.А.* Метод факторизации в расчете пространственных течений вязкого сжимаемого газа // Докл. АН СССР. – 1983. – 270, N 6. – С. 1350-1355.
44. *Приходько А.А., Полевой О.Б.* Применение метода расщепления и разностных аппроксимаций повышенной точности к численному решению задач механики жидкости и газа // Моделирование в механике.– 1992. – 6 (23), N 3. – С. 108-115.
45. *Harten A.* A high resolution scheme for the computation of wear solution of hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. – 1983. – 49. – P. 357-393.

46. *Zijlema M., Wesseling P.* Higher order flux-limiting methods for steady-state, multidimensional, convection-dominated flow // Delft University of Technology: Technical Report DUT-TWI-95-131. – 1995. – 28 p.
47. *Lien F.S., Leschziner M.A.* Approximation of turbulence convection in complex flows with a TVD-MUSCL scheme // Proc. 5th Int. Symp. Refined flow modelling and turbulence measurements. – Paris, 1993. – P. 183-190.
48. *Jameson A.* Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence in transonic and hypersonic flow // AIAA Paper. – 1993. – 93-3559.
49. *Roe P.L.* Characteristic-based schemes for the Euler equations // Annual review of fluid mechanics. – 1986. – 18. – P. 337-365.
50. *Van Leer B.* Upwind-difference methods for aerodynamic problem governing by the Euler equations // Lectures in Appl. Math. – 1985. – 22. – P. 327-336.
51. *Sweby P.K.* High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // SIAM J. Numer. Anal. – 1984. – 21. – P.995-1011.
52. *Пандольфи М.* Развитие численных методов расчета нестационарных течений // Аэрокосмическая техника. – 1985. – 3, N 2. – С. 186-197.
53. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика: В 2 т. / Под ред. И.А. Кибеля. – М.: Физматгиз, 1963. – 1. – 584 с.; 2. – 728 с.
54. *Steger J.L., Warming R.F.* Flux Vector Splitting of the inviscid gas dynamic equation with application to finite-difference methods // J. Comput. Phys. – 1981. – 40, N 2. – P. 263-294.
55. *MacCormack R.W., Pulliam T.H.* Assessment of a new numerical procedure for fluid dynamics // AIAA Paper. – 1998. – 98-2821. – 9p.
56. *Van Leer B.* Flux-vector splitting for the Euler equations // Lecture Notes in Phys. – 1982. – 170. – P. 507-512.
57. *Pulliam T.H.* Efficient Solution Methods for The Navier-Stokes Equations // Lecture Notes for the von Karman Institute For Fluid Dynamics Lecture Series.- Von Karman Institute, Belgium, 1985.- 98 p.
58. *Liou M.-S., Steffen C.J.* A new flux splitting scheme // J. Comput. Phys. – 1993. – 107. – P. 23-39.
59. *Hu C., Shu C.-W.* Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes on Triangular Meshes // ICASE Report No. 98-32. – 1998. – 30 p.
60. *Пейре Р., Тейлор Т.Д.* Вычислительные методы в задачах механики жидкости. – Л.: Гидрометеиздат, – 1986. – 352 с.
61. *Saad Y., Schultz M.H.* GMRES: a Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving nonsymmetric linear systems // SIAM J. Sci. Stat. Comp. – 1988. – Vol. 7, No 3. – P. 89-105.
62. *Ван-Дайк М.* Альбом течений жидкости и газа. – М.: Мир, 1986. – 184 с.
63. *Маккарти Дж. Ф. мл., Кубота Т.* Исследование следов за круглым цилиндром при $M=5.7$ // Ракетная техника и космонавтика. – 1964. Т 2, N 4. – С. 51-60.
64. *Hsich T.* An investigation of separated flow about a hemisphere-cylinder at 0 to 90-deg incidence in the Mach number from 0.6 to 1.5 // AEDC-TR-76-112, July 1976.
65. *Pulliam T.H., Steger J.L.* On implicit finite-difference simulation of three dimensional flow // AIAA Paper. – 1978. – N 0010. – 11 p.
66. Аэродинамика ракет / Под ред. М. Хемша, Дж. Нилсена. – М.: Мир, 1989. – 738с.
67. *Желтоводов А.А., Шилейн Э.Х.* Пространственное взаимодействие скользящих скачков уплотнения с турбулентным пограничным слоем в угловых конфигурациях. – Новосибирск, 1986. – 49 с. – (Препр. / СО АН СССР. ИТПИМ; N 34-86).
68. *Авдусевский В.С., Грецов В.К.* Исследование трехмерного отрывного обтекания полуконусов, установившихся на пластине // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1970. – N 6. – С. 112-115.
69. *Сеттлс Г., Тенг Х.* Режимы цилиндрического и конического течений при трехмерном взаимодействии скачка уплотнения с пограничным слоем в угле // Аэрокосмическая техника. – 1984. – N 9. – С. 51-60.
70. *Приходько А.А.* Об исследовании конических турбулентных отрывных течений на основе уравнений Навье-Стокса // Математические методы тепло-массопереноса. – Днепропетровск: ДГУ, – 1987. – С. 121-127
71. *Полевой О.Б., Приходько А.А.* Численное исследование пространственных отрывных течений при взаимодействии скользящих скачков уплотнения с турбулентным пограничным слоем // Расчет течений жидкости и газов. – Днепропетровск: ДГУ, 1989. – С. 88-93.
72. *Полевой О.Б., Приходько А.А.* Параметрическое исследование обтекания вертикального клина вязким теплопроводным газом // Математические методы расчетов гидрогазодинамических течений. – Днепропетровск: ДГУ, 1990. – С. 42-49
73. *Приходько А.А.* Численное моделирование сверхзвуковых интерференционных течений на основе уравнений Навье-Стокса // Моделирование в механике. – 1989. т. 3 (20), N 5. – С. 145-150.
74. *Приходько А.А., Полевой О.Б.* Особенности расчета отрывных течений при интерференции пространственных скользящих скачков уплотнения и турбулентного пограничного слоя // Механика жидкости и газа. Методы исследования аэротермодинамических характеристик гиперзвуковых летательных аппаратов. – М.: ЦАГИ. – 1992. – С. 166-167.
75. *Prikhodko A.A., Polevoy O.B.* Supersonic separation calculation by flows around aircraft surface elements // International conference on the methods of aerophysical research. – Novosibirsk, 1992. – P. 1. – P. 95-98.
76. *Боровой В.Я.* Течение газа и теплообмен в зонах взаимодействия ударных волн с пограничным слоем. – М.: Машиностроение, 1983. – 141 с.
77. *Чюжен П.* Управление отрывом потока. Экономичность, эффективность, безопасность. – М.: Мир. – 1979. – 552 с.
78. *Dolling D.S.* Fifty years of shock wave/boundary layer interaction research: what next // AIAA Journal. 2001. – Vol. 39. No 8. – pp. 1517-1531.
79. *Chen C.-L., Hung C.-M.* Numerical study of juncture flows // AIAA Journal. – 1992. – Vol. 30, No 7. – P. 1800-1807.
80. *Ballio F., Franzetti S.* Topological analysis of a junction vortex flow // Advances in Fluid Mechanics 2000, Montreal, Canada. – P. 255-264.