ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2005. Том 7(79), N 3-4. С. 67 – 72

УДК 533.6.011.5÷541.123

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ВЯЗКО-НЕВЯЗКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

И. И. ЛИПАТОВ

Центральный аэрогидродинамический институт, Москва, Россия

Получено 17.12.2004

Исследованы локально возмущенные двумерные и трехмерные течения в ламинарном пограничном слое в условиях, когда продольный масштаб течения превосходит поперечный. Построены нелинейные модели такого рода течений, для которых распределение давления определяется в результате взаимодействия пристеночного течения с внешним невязким потоком. Для амплитуд возмущений, превосходящих некоторый предельный уровень, влияние вязкости в области нелинейного возмущенного течения оказывается несущественным. Представлены решения задач.

Досліджено локально збурені двомірні та тримірні течії у ламінарному пограничному шарі в умовах, коли повздовжній маштаб течії перевищує поперечний. Побудовано нелінійні моделі такого типу течій, для яких розподіл тиску визначається у результаті взаємодії пристінної течії з зовнішнім нев'язким потоком. Для амплітуд збурень, що перевищують певний граничний рівень, вплив в'язкості в області нелінійно збуреного потоку виявляється несуттєвим. Представлено розв'язки ряду задач.

Investigated are locally disturbed 2-D and 3-D flows in the laminar boundary layer for the case when longitudinal flow scale exceeds the normal one. Nonlinear models are developed for flows where the pressure distribution is determined as a result of the near wall flow interaction with the external inviscid flow. It is shown that for disturbances amplitudes exceeding some critical level viscosity influence in the region of nonlinearly disturbed flow is insignificant. Some problems solutions are presented.

ВВЕДЕНИЕ

Среди работ, посвященных исследованию течений вязкой жидкости, следует упомянуть две работы, сыгравшие исключительную роль в развитии гидродинамики.

Первая из них, принадлежащая Людвигу Прандтлю [1], представлена почти столетие назад на математическом конгрессе в Гейдельберге. В ней заложены основы теории пограничного слоя. В основу теории течений вязкой жидкости были положены опытные данные и физические соображения о малом влиянии вязкости при больших числах Рейнольдса.

Вторая работа несколько позднее выполнена создателем квантовой механики Вернером Гейзенбергом [2] и посвящена развитию теории гидродинамической устойчивости, в частности, исследованию решений линейной теории устойчивости при больших числах Рейнольдса. В дальнейшем оба этих направления получили интенсивное развитие.

Более пятидесяти лет назад Джеймс Лайтхилл [3] представил модель распространения возмущений в пограничных слоях и сформулировал линейную постановку задачи, в которой существенную роль играли процессы взаимодействия течения в пограничном слое и внешнего сверхзвукового течения.

Дальнейший прогресс был связан с формулированием и развитием методов асимптотического анализа задач математической физики, в том числе и проблем гидродинамики при больших или малых значениях параметров [4–6]. Эти методы были использованы для формального вывода уравнений пограничного слоя и решения ряда других задач, в том числе и таких, для которых классическая теория пограничного слоя оказалась неприменимой. Основные предположения теории Прандтля были связаны с малостью продольных градиентов по сравнению с поперечными, а также с безотрывным режимом обтекания.

Асимптотический анализ позволил установить, что процессы вязко- невязкого взаимодействия играют существенную роль и при возникновении отрыва пограничного слоя. Для описания указанных процессов была создана нелинейная теория взаимодействия [7–9].

Развитие теории гидродинамической устойчивости шло по пути исследования линейных процессов, хотя и были разработаны методы изучения слабонелинейных процессов неустойчивости [10–11].

В дальнейшем теория взаимодействия была обобщена для описания нестационарных процессов [12]. Линейный аналог этой теории [13–15], как оказалось, описывал развитие длинноволновой неустойчивости в пограничных слоях. При этом в пределе при малых амплитудах возмущений теория взаимодействия приводила к тем же результатам, что были получены Гейзенбергом в пределе при больших числах Рейнольдса. В работе [2] вначале делалось предположение о малой амплитуде возмущений, а затем о большой величине числа Рейнольдса. При выводе теории взаимодействия – наоборот, вначале делалось предположение о том, что число Рейнольдса велико, а затем следовала линеаризация уравнений для малых амплитуд возмушений. В то же время, нелинейная теория взаимодействия, хотя и справедлива только при больших числах Рейнольдса, позволяет исследовать нелинейные процессы, в том числе и гидродинамическую неустойчивость.

В данной работе обсуждаются вопросы приложения теории взаимодействия для исследования развития возмущений, хотя и малой амплитуды, но превосходящей такие величины, при которых в области нелинейных возмущений существенно влияние вязкости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается течение в ламинарном пограничном слое около плоской поверхности при больших числах Рейнольдса, не превосходящих критических величин, при которых происходит ламинарно-турбулентный переход. Предполагается, что на основное течение наложены возмущения, источник которых находится во внешнем невязком потоке или эти возмущения инициированы изменениями граничных условий на поверхности.

Предполагается также, что все функции течения обезразмерены и отнесены к соответствующим величинам в невозмущенном невязком потоке, а давление отнесено к удвоенному скоростному напору.

Предшествующие исследования, основанные на использовании метода сращиваемых асимптотических разложений, привели к выводу о том, что воздействие возмущений на течение в пограничном слое требует введения в рассмотрение ряда характерных областей, в силу того, что физические механизмы по разному проявляются в этих областях.

В тех случаях, когда протяженность области возмущенного течения превосходит толщину пограничного слоя, но меньше характерной длины тела, возмущенное течение содержит три или четыре характерные области. Все эти области имеют одинаковую протяженность, но разный поперечный размер.

Первая из рассматриваемых областей имеет одинаковые продольный и поперечный размеры (для гиперзвуковых течений соответствующий поперечный размер определяется из характеристических соотношений). Введение указанной области в рассмотрение необходимо для нахождения связи между изменением толщины вытеснения пограничного слоя (или вертикальной скорости на внешней границе пограничного слоя) и индуцированным во внешнем потоке возмущением давления. Все эти возмущения предполагаются малыми, поэтому анализ приводит к линейным уравнениям, описывающим развитие возмущений во внешнем невязком и незавихренном потоке.

Следующая область, вводимая в рассмотрение, представляет собой пограничный слой, где невозмущенное течение является завихренным и где возмущения приводят к линейным изменениям продольной скорости.

В силу выполнения условия прилипания продольная скорость около стенки сколь угодно мала и поэтому всегда найдется область, в которой изменения оказываются нелинейными. Характерный поперечный размер этой области δ зависит от амплитуды возмущения, например, давления Δp, $\Delta p << 1$, $\delta \sim \epsilon(\Delta p)^{1/2}$, $\epsilon = Re^{-1/2}$, и в силу нелинейных изменений скорости изменение толщины области $\Delta\delta$ сравнимо δ.

Для сверхзвуковых или дозвуковых течений это изменение толщины вытеснения превосходит по порядку величины изменение толщины основной части пограничного слоя с конечными скоростями. Индуцированное возмущение давления во внешнем невязком потоке может быть определено в соответствии с линейной теорией невязких течений $\Delta p \sim \Delta\delta/\Delta x$, $\Delta x \sim \epsilon(\Delta p)^{-1/2}$, где Δx – характерный продольный размер области возмущенного течения.

Как можно видеть, этот размер много больше, чем характерный поперечный размер, что приводит к вырожденности уравнения сохранения поперечного импульса. Кроме того, можно оценить соотношение сил вязкости и инерции и получить, что при амплитудах возмущения давления, превосходящих $Re^{-1/4}$, течение в пристеночной области оказывается невязким в первом приближении. Последнее обстоятельство диктует необходимость введения дополнительной области вблизи стенки для выполнения условия прилипания. Легко убедиться в том, что толщина этой области много меньше толщины области, где существенны нелинейные изменения.

Предполагается, что возмущения могут быть вызваны как граничными условиями (искривление поверхности, отсос или вдув), так и возмущениями, приходящими из внешнего потока (например, падением ударной волны или распространяющимися в невязком течении волнами давления или завихренности). Основываясь на полученных оценках масштабов области возмущенного течения и величин функций можно выписать соответствующие асимптотические разложения функций течения. Подстановка последних в исходные уравнения Навье-Стокса и соответствующий предельный переход приводят к следующим уравнениям для главных членов разложений в области нелинейных изменений, расположенной на дне пограничного слоя вблизи поверхности [16–17]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho_w}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \qquad (2)$$

Граничные условия для компонентов вектора скорости и возмущения давления на больших расстояниях вверх по потоку от области взаимодействия определяются решением для пристеночной области в невозмущенном пограничном слое

$$u = ay, \quad v = 0, \quad p = 0. \qquad (3)$$

Для дальнейшего анализа существенно, что решение уравнений в частных производных, зависящее от двух пространственных переменных и времени можно искать в виде, для которого задача зависит от одной пространственной переменной и времени:

$$u(x, y, t) = ay + aA(x, t), \qquad (4)$$

$$v(x, y, t) = v_w - ay\frac{\partial A}{\partial x}, \qquad (5)$$

где коэффициент a пропорционален напряжению трения в невозмущенном пограничном слое перед областью взаимодействия. Функция A с точностью до знака пропорциональна изменению толщины пограничного слоя. Подстановка уравнений (4) и (5) в (1) и (2) приводит к следующему уравнению:

$$a\frac{\partial A}{\partial t} + a^2 A\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{\rho_w}\frac{\partial p}{\partial x} + av_w = 0, \qquad (6)$$

в котором возмущение давления p заранее не определено и находится из решения задачи, описывающей внешнее невязкое течение. Предполагается, что возмущение давления индуцируется как внешними возмущениями, так и откликом пограничного слоя на это воздействие. Так, изменение толщины вытеснения пограничного слоя приводит к появлению возмущений во внешнем невязком потоке.

2. ДОЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Дальнейший анализ зависит от характера внешнего течения. Проводя сращивание решений для рассматриваемой области и для возмущенного внешнего невязкого течения, можно получить:

$$p(x, t) = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(s - x)}\frac{\partial(A - \delta_w)}{\partial s}ds, \qquad (7)$$

$$M_\infty < 1,$$

где δ_w – изменение толщины тела (неровности, находящейся на плоской поверхности). Афинное преобразование переменных и подстановка выражения (7) в уравнение (6) приводит к неоднородному уравнению Бенджамена-Оно [18, 19], выведенному ранее для описания волн в стратифицированной жидкости:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t_1} + A_1\frac{\partial A_1}{\partial x_1} = \qquad (8)$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(s - x_1)}\frac{\partial^2}{\partial s^2}(A_1 - \delta_{w1})ds - av_{w1} = 0.$$

В результате численных исследований решений уравнения (8) установлено [20], что при определенной зависимости формы поверхности от времени и при изменении максимальной высоты происходит существенное преобразование решения.

При малых величинах амплитуды и при стационарной форме неровности реализуется стационарное решение задачи. В то же время, при достижении критической амплитуды начинаются автоколебательные процессы. При дальнейшем увеличении высоты неровности возникают дополнительные гармоники, и увеличение их числа приводит в конечном итоге к хаотизации течения. Хотя предположение о двумерности течения соответствует упрощенной постановке задачи, вместе с тем на качественном уровне простая (по-видимому, простейшая) модель описывает элементы возникновения хаотического режима течения.

Среди течений несжимаемой жидкости можно упомянуть также режимы взаимодействия, реализующиеся при течении струи около поверхности, а также обтекании тонких осесимметричных цилиндров [21]. В обоих случаях при выполнении определенных соотношений между параметрами задач можно получить, что индуцированное возмущение давления определяется как вторая производная от изменения толщины вытеснения. В результате получается неоднородное уравнение Кортевега де Вриза, которое, как показано, также обладает семействами автоколебательных и стохастических решений.

3. СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Для сверхзвуковых течений, используя результаты линейной теории, можно придти к формуле Аккерета, связывающей индуцированное возмущение давления и изменение толщины вытеснения пограничного слоя:

$$p(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\frac{\partial A}{\partial x}, \quad M_\infty > 1. \tag{9}$$

Подстановка формулы (9) в уравнение (6) и афинное преобразование переменных приводят к неоднородному уравнению Бюргерса:

$$\frac{\partial A_2}{\partial t_2} + A_2\frac{\partial A_2}{\partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(A_2 - \delta_{w2}) - v_{w2} = 0. \tag{10}$$

Решения неоднородного уравнения Бюргерса получены для ряда проблем, например, для описания течений около донного среза [22], течений в пограничном слое при наличии разрывных граничных условий [23] и др.

Для сверхзвуковых течений возможны и другие режимы взаимодействия, например, режим, реализующийся для больших чисел Маха при сильном охлаждении поверхности. Для этого режима справедлив следующий закон взаимодействия:

$$p = L\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Delta}{\partial x}. \tag{11}$$

Тогда после ряда преобразований получается система уравнений вида

$$\frac{\partial A_3}{\partial x_3 \partial t_3} + \left(A_3 + \frac{1}{L}\right)\frac{\partial^2 A_3}{\partial x_3^2} = \tag{12}$$

$$= -\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right)^2 + \frac{1}{L}\left(\frac{\partial A_3}{\partial t_3} + A_3\frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right) + \frac{1}{L}\frac{\partial^2 \delta_{w3}}{\partial x_3^2},$$

где параметр подобия L определяет отношение изменений толщины вытеснения, индуцируемых в основной области течения и в области нелинейных изменений.

Уравнение (12) имеет гиперболический тип и обладает двумя семействами характеристик. При определенных условиях пересечение характеристик одного семейства может приводить к образованию разрывного решения (скачка). Такое решение получено численно для задачи, описывающей течение около поверхности, форма которой меняется со временем [24]. Следует учитывать, что разрывное решение не является скачком, изучаемым в газовой динамике, поскольку его поперечный размер сравним с длиной свободного пробега молекул.

Толщина рассматриваемого скачка сравнима с толщиной пограничного слоя и, по-видимому, соответствует одному из режимов возникновения "псевдоскачка".

Заметим также, что для трансзвуковых течений в случае, когда возмущенное внешнее течение описывается волновым уравнением, соответствующее уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_4} + K_\infty\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_4^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_4^2} = 0, \tag{13}$$

описывающее распространение возмущений в ламинарных пограничных слоях, имеет вид [25]

$$\frac{\partial A_4}{\partial t_4} + A_4\frac{\partial A_4}{\partial x_4} = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\int\!\!\int_S \left[\frac{\partial A_4(\tau,\zeta)}{\partial \zeta} - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial \delta_{w4}(\tau,\zeta)}{\partial \zeta}\right]\frac{d\tau d\zeta}{\sqrt{(t_4-\tau)(x_4-\zeta) - K_\infty(t_4-\tau)^2}}. \tag{14}$$

Область интегрирования S определяется следующим образом:

$$\tau < t_4, \quad \zeta < x_4 - K_\infty(t_4 - \tau), \tag{15}$$

где K_∞ – параметр трансзвукового подобия.

Как показано в [25], в пределе при конечных значениях разности числа Маха и единицы из уравнений (14)–(15) получаются выписанные выше уравнение Бенджамена-Оно для дозвуковых течений или уравнение Бюргерса для сверхзвуковых течений.

4. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ

В пространственных течениях представление решения в виде (4) несправедливо (уравнения для завихренности и толщины вытеснения не разделяются), и необходимо решать полную систему уравнений Эйлера с вырожденным уравнением для поперечного импульса. При формулировании задачи для пространственных течений предполагается, что исходное невозмущенное течение в пограничном слое и во внешнем потоке является двумерным. Тогда система уравнений для пристеночной области с нелинейными возмущениями, записанная в декартовых координатах, имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial z}=0, \qquad (17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \frac{\partial p}{\partial y}=0. \qquad (18)$$

Для дальнейшего анализа, дифференцируя уравнения (16) и (17) по поперечной координате y и используя условие независимости давления от y, можно получить уравнения для компонентов вектора завихренности:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t}+u\frac{\partial \omega_x}{\partial x}+v\frac{\partial \omega_x}{\partial y}+w\frac{\partial \omega_x}{\partial z}+\omega_z\frac{\partial u}{\partial z}-\omega_x\frac{\partial u}{\partial z}=0, \qquad (19)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t}+u\frac{\partial \omega_z}{\partial x}+v\frac{\partial \omega_z}{\partial y}+w\frac{\partial \omega_z}{\partial z}+\omega_x\frac{\partial w}{\partial x}-\omega_z\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad (20)$$

где компоненты вектора завихренности определяются следующим образом:

$$\omega_x=\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \omega_z=\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Начальное поле завихренности на больших расстояниях вверх по потоку от неровности определяется в результате сращивания с решением для невозмущенного пограничного слоя, где

$$\omega_x=1, \quad \omega_z=0.$$

Для продольного и трансверсального компонентов вектора скорости на поверхности вводятся обозначения

$$A(x,z,t)=u(x,0,z,t), \quad B(x,z,t)=w(x,0,z,t).$$

Тогда функции A и B удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial A}{\partial t}+A\frac{\partial A}{\partial x}+B\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial x}=0, \qquad (21)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}+A\frac{\partial B}{\partial x}+B\frac{\partial B}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial z}=0. \qquad (22)$$

Так же как и для двумерных течений, входящее в задачу распределение давления p заранее не известно и должно определяться условиями взаимодействия течения в пограничном слое с внешним потоком. Например, если внешний поток гиперзвуковой и реализуется режим слабого гиперзвукового взаимодействия,

$$\chi=M\delta<<1,$$

для возмущения давления имеем следующую формулу:

$$p=\frac{\partial \Delta}{\partial x}=\frac{\partial \delta_w}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^\infty(\omega_x-1)dy, \qquad (23)$$

где Δ – суммарное изменение толщины вытеснения пограничного слоя, складывающееся из толщины неровности δ_w и изменения толщины пристеночной области течения в пограничном слое, для которой характерны нелинейные изменения продольной скорости. Рассматриваемый режим взаимодействия приводит к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial A}{\partial t}+A\frac{\partial A}{\partial x}+B\frac{\partial A}{\partial z}= \qquad (24)$$

$$=-\frac{\partial^2 \delta_w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^\infty(\omega_x-1)dy,$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}+A\frac{\partial B}{\partial x}+B\frac{\partial B}{\partial z}= \qquad (25)$$

$$=\frac{-\partial^2 \delta_w}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 B}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\int\limits_0^\infty(\omega_x-1)dy.$$

Можно показать, что система уравнений (19), (20), (24) и (25) для двумерного случая сводится к уравнению Бюргерса:

$$\frac{\partial A}{\partial t}+A\frac{\partial A}{\partial x}=-\frac{\partial^2 \delta_w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \qquad (26)$$

$$\omega_x=1, \omega_z=0.$$

Соответствующие пространственные задачи можно выписать и для других исследованных режимов течения – дозвуковых, трансзвуковых и сверхзвуковых.

К настоящему времени численные решения указанных задач отсутствуют, и необходимо создание соответствующих численных методов. Вместе с тем можно ожидать, что в результате решения этих задач будут выявлены новые эффекты, проявляющиеся на нелинейной стадии развития неустойчивости и в других течениях, где существенны эффекты взаимодействия.

В заключение отметим, что описанные режимы течения требуют дополнительного рассмотрения течения в тонких пограничных слоях, расположенных на дне области нелинейных возмущений.

Внешние граничные условия для этих пограничных слоев определяются из решений сформулированных выше задач. Представленные выше модели адекватно описывают процессы взаимодействия до тех моментов времени, когда в пристеночных пограничных слоях может возникнуть отрыв. Для описания последующих этапов развития взаимодействия и неустойчивости необходимо построение других моделей, учитывающих изменения структуры возмущенного течения и содержащих невырожденное уравнение поперечного импульса.

1. *Prandtl L.* Uber Flussigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung // Verhandlg.III.Intern.Kongr.– Heidelberg, 1904.– P. 484–491.
2. *Heisenberg W.* Uber Stabilitat und Turbulenz von Flussigkeitsstromen // Ann. Phys. Lpz.– N4.– 74.– P. 577–627.
3. *Lighthill M. J.* On boundary layers and upstream influence. I. Supersonic flows without separation // Proc. Roy. Soc. London.ser. A.– 1953.– Vol. 217, N 1131.– P. 478–507.
4. *Friedrichs K. O.* Special topics in fluid dynamics//New York: Univ, 1953.– P. 1-200.
5. *Lagerstrom P. A.* Note on the preceding two paper // J. Math. Mech.– 1957.– N 6.– P. 605–606.
6. *Нейланд В. Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом плтоке // Изв. АН СССР, МЖГ.– 1973.– N 4.– С. 53–57.
7. *Stewartson K., Williams P. G.* Self-induced separation // Proc. Roy.Soc. London.ser. A.– 1969.– Vol. 312, N 1509.– P. 181–206.
8. *Messiter A. F.* Boundary layer flow near the trailing edge of a flat plate // SIAM J. Appl. Math.– 1970.– Vol. 18, N.1.– P. 241–257.
9. *Stuart J.T.* Nonlinear stability theory // Annu. Rev. Fluid Mech.– 1971.– Vol. 3.– P. 347–370.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е . М.* Гидродинамика.– М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит.– 1986 с. 736
11. *Рыжов О. С.* Уравнение нестационарного пограничного слоя с самоиндуцированным давлением // Докл. АН СССР.– 1977.– Т. 234, N 4.– С. 780–783.
12. *Жук В. И., Рыжов О. С.* О решениях дисперсионного уравнения из теории свободного взаимодействия пограничного слоя // Докл. АН СССР.– 1979.– Т. 247, N 5.– С. 1085–1088.
13. *Жук В. И., Рыжов О. С.* Об асимптотике решений уравнения Орра-Зоммерфельда,адающих неустойчивые колебания при больших значениях числа Рейнольдса // Докл. АН СССР.– 1983.– Т. 268, N 6.– С. 1328–1332.
14. *Жук В. И.* Об асимптотике решений уравнения Орра-Зоммерфельда в областях, примыкающих к двум ветвям нейтральной кривой // Изв. АН СССР МЖГ.– 1984.– N 4.– С. 3–11.
15. *Нейланд В. Я.* Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ.– 1974.– Вып. 1529.– С. 1–125.
16. *Жук В. И., Рыжов О. С.* О локально-невязких возмущениях в пограничном слое с самоиндуцированным давлением // Докл. АН СССР.– Т.263 N 1, 1982.– С. 56-59.
17. *Benjamin T. B.* Internal waves of permanent form in fluids of great depth // J. Fluid Mech.– 1967.– Vol.29, pt.3.– P. 559–592.
18. *Ono H.* Algebraic solitary waves in stratified fluid // J. Phys. Soc. Jap.– 1975.– Vol.39 N4.– P. 1082–1091.
19. *Жук В. И., Попов С. П.* О нелинейном развитии длинноволновых невязких возмущений в пограничном слое // ЖПМТФ.– 1989.– N3.– С. 101–108.
20. *Карабалаев А. Х., Липатов И. И.* Влияние разрывных граничных условий на течение в осесимметричном пограничном слое // Учен. зап. ЦАГИ.– 1998.– N 3.– С. 53–62.
21. *Липатов И. И., Нейланд В. Я.* К теории нестационарного отрыва и взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком // Учен. зап. ЦАГИ.– Т. 18 N 1.– 1987.– С. 36–49.
22. *Липатов И. И.* Задачи с разрывными граничными условиями, описывающие ламинарные течения при больших числах Рейнольдса // ПММ.– 1999, Т. 63, Вып.1.– С. 37–46.
23. *Липатов И. И., Нейланд В. Я.* Нестационарные процессы транскритического взаимодействия течения в пограничном слое с гиперзвуковым потоком // Аэродинамика больших скоростей.– 1997.– N 1.– С. 5–13.
24. *Жук В. И.* Волны Толлмина-Шлихтинга и солитоны.– М.: Наука, 2001.– 167 с.