

УДК 532.526

О НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЗМАХ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В. В. КОЗЛОВ

*Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия**Получено 25.02.2005*

Представлены результаты исследований синусоидальной и варикозной неустойчивости полосчатых структур на нелинейной стадии ламинарно-турбулентного процесса в сдвиговых течениях. Обсуждается поведение течения в процессе пространственной эволюции полосчатых структур с генерированным на них вторичным высокочастотным возмущением. Рассмотрены различные сценарии возникновения и развития когерентных вихревых структур, исследованных как в физическом, так и в численном экспериментах. Показаны особенности развития синусоидального и варикозного случаев разрушения продольной стационарной полосчатой структуры, такие как модуляция структуры в трансверсальном и продольном направлениях частотой вторичного возмущения, появление новых полосчатых структур вниз по потоку и возникновение и развитие локализованных по пространству нестационарных образований типа Λ -структур в обоих случаях.

Представлено результати досліджень синусоїдальної та варикозної нестійкості смужчатих структур на нелінійній стадії ламінарно-турбулентного процесу в зсувних течіях. Обговорюється поведінка потоку в процесі просторової еволюції смужчатих структур з генерованим на них вторинним високочастотним збуренням. Розглянуто різні сценарії виникнення та розвитку когерентних вихрових структур, досліджених як у фізичному, так і у чисельному експерименті. Показано особливості розвитку синусоїдального та варикозного випадків руйнування поздовжньої стаціонарної смужчатої структури, такі як модуляція структури у трансверсальному та поздовжньому напрямках частотою вторинного збурення, виникнення нових смужчатих структур вниз за течією, виникнення та розвиток локалізованих у просторі нестационарних утворень типу Λ -структур в обох випадках.

There are presents the results of analysis of sinusoidal and varicose instability of streaky structures on the nonlinear stage of laminar-turbulent process in shear flows. Discussed is the behavior of the flow during the process of spatial evolution of streaky structures with generated on them secondary high-frequency perturbation. Considered are various scenarios of appearance and development of coherent vortical structures investigated in both physical and numerical experiments. Shown are details of sinusoidal and varicose cases of destruction of steady longitudinal streaky structure, such as modulations of the structure in transversal and longitudinal directions by the secondary perturbation frequency, appearance of new streaky structures downstream, and appearance and spatial development of unsteady formations of the kind of Λ -structure in both cases.

ВВЕДЕНИЕ

Известно [1], что ламинарно-турбулентный переход при низкой степени турбулентности набегающего потока связан с появлением и развитием волн неустойчивости, так называемых волн Толлмина-Шлихтинга. Вниз по потоку эти волны в процессе своего развития могут нарастать вначале линейно, затем претерпевают нелинейную стадию развития и, наконец, приводят к турбулизации течения. Если линейная стадия развития волн неустойчивости достаточно детально исследована теоретически и экспериментально, то нелинейная стадия и особенно ее последние этапы изучены слабо. Наибольший результат в этих исследованиях достигнут в физическом и численном экспериментах. Двумерная волна Толлмина-Шлихтинга на нелинейной стадии своего развития при достижении определенной амплитуды (рис. 1) претерпевает трехмерное искажение, в результате чего возникают характерные трехмерные Λ -структуры [18, 20, 28].

К особенностям возникновения и развития этих структур следует отнести то, что они типичны не только для классического ламинарно-турбулентного перехода [20], но являются также непременным атрибутом перехода в более сложных течениях, таких как течения, модулированные продольными полосчатыми структурами типа вихрей Гертлера (рис. 2, 3) [8, 12, 16], вихрей поперечного течения на скользящих крыльях и т. д., а также в вязком подслое турбулентного пограничного слоя. В данных ситуациях они возникают, в частности, из-за вторичной высокочастотной неустойчивости таких течений и могут проявляться не только как Λ -структуры, но и в виде подковообразных (Ω -структур), шпилькообразных (hairpin) и других вихрей. Тем не менее общей особенностью этих структур оказывается наличие двух противорвращающихся вихрей (ног структуры), заканчивающихся их замыканием “головкой”. Именно динамика развития этих структур вниз по потоку приводит во многих случаях к турбулизации течений. Характерной особенностью развития таких структур, например на скользящем крыле, яв-

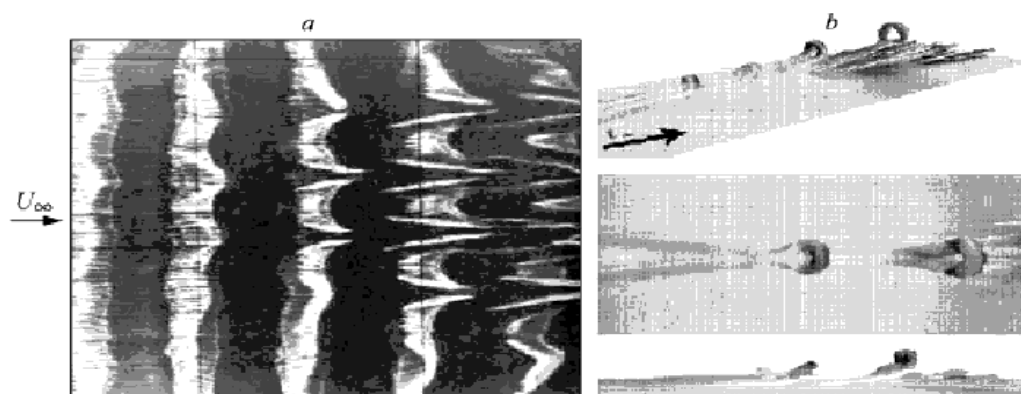


Рис. 1. Визуализация образования Λ -структур (а) (из работы [28]) и численное моделирование эксперимента Ю.С. Качанова, У. Ристом (U. Rist) (b) (из работы [18])

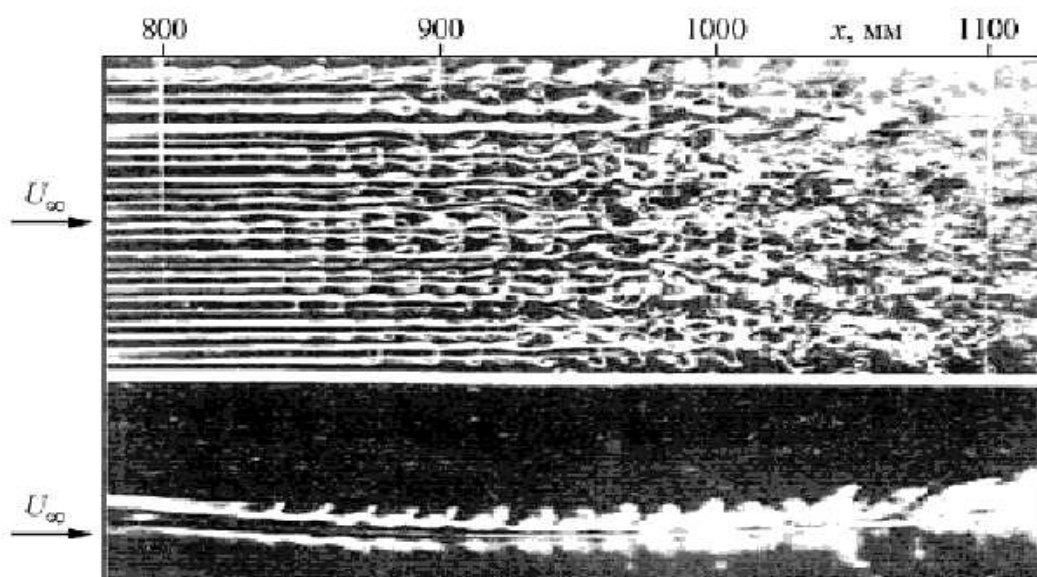


Рис. 2. Формирование подковообразных структур на вихрях Гертлера – варикозная неустойчивость (из работ [12] и [16])

ляется исчезновение одного из противовращающихся вихрей из-за поперечного течения, в то время как на прямом крыле можно наблюдать развитие классической Λ -структуры [24]. На рис. 4 представлены пространственные картины развития Λ -структур на прямом и скользящем крыле, полученные с помощью термоанемометрических измерений [24]. Видно, что при угле скольжения 30° Λ -структуры становятся асимметричными, а при 45° из двух противовращающихся вихрей остается лишь один.

Изучению механизма возникновения и разви-

тия данных структур посвящено много экспериментальных [5, 9, 13, 14, 23] и численных [25, 26, 32] исследований. В этих работах показано, что механизм воспроизводства турбулентности в различных пристенных переходных (например, гармонический и субгармонический типы классического перехода) и турбулентных течениях одинаков и связан с возникновением, развитием и разрушением когерентных образований типа Λ -структур, Ω -структур и т. д.

В то же время, как упомянуто выше, начальная неустойчивость многих течений связана с их по-

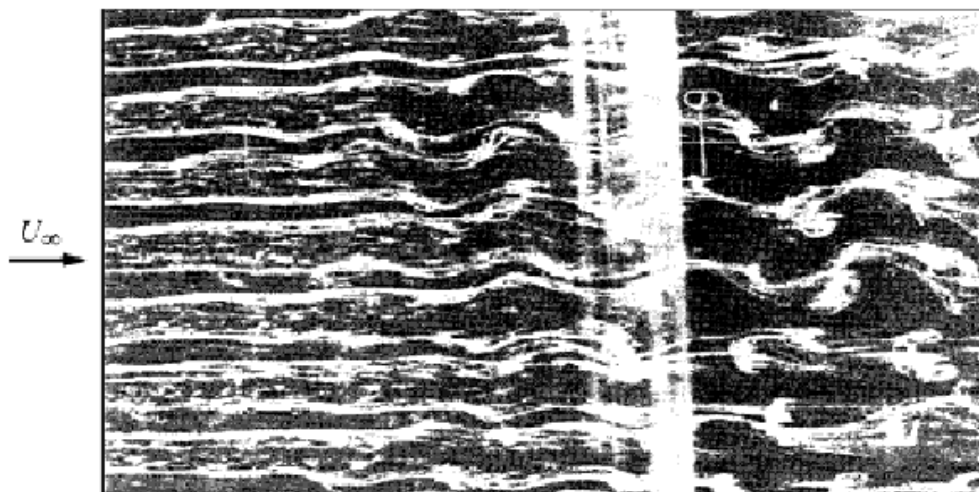


Рис. 3. Вторичная неустойчивость вихрей Гёртлера синусоидального типа (из работ [12] и [8])

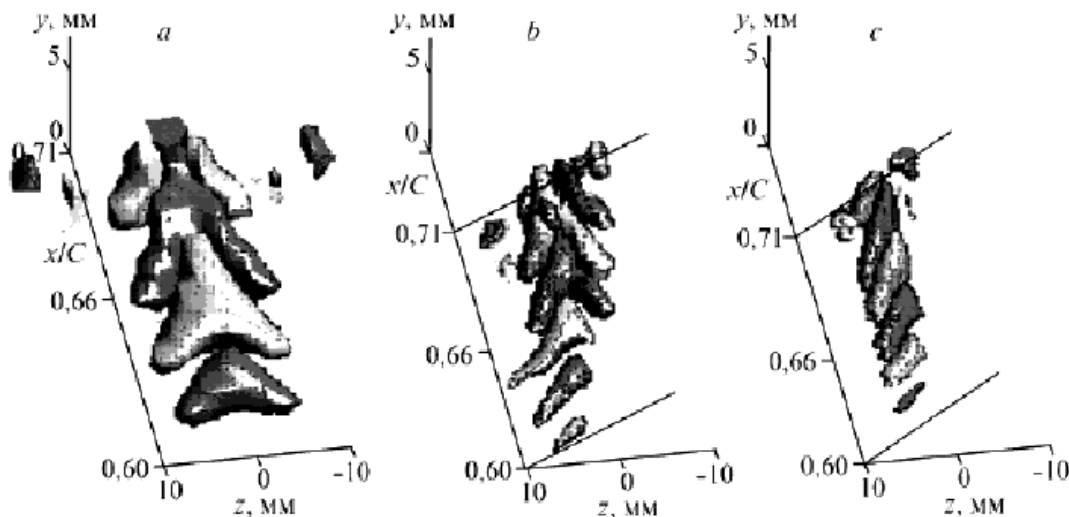


Рис. 4. Развитие Λ -структур на прямом (a) и скользящем крыле при угле скольжения 30° (b) и 45° (c) (пространственные картины развития возмущений – из работы [24])

перечной модуляцией стационарными (вихри Гёртлера, вихри поперечного течения на скользящих крыльях и т. д.) и нестационарными продольными структурами (полосчатые структуры при повышенной степени турбулентности набегающего потока, Λ -, Ω - и шпилькообразные вихри и т. д.). Трансверсальная модуляция течений данными структурами создает условия (неустойчивые перегибные профили скорости по нормали к поверхности – $\partial U/\partial y$ и поперек потока – $\partial U/\partial z$) для возникновения и нарастания на них втори-

чных высокочастотных колебаний, эволюция которых вниз по потоку приводит к турбулизации пограничного слоя. В вязком подслое турбулентного пограничного слоя около 50 лет назад также обнаружены полосчатые структуры (рис. 5), и с тех пор экспериментально, аналитически и численно исследуется их роль в механизме регенерации турбулентных пульсаций через процесс эволюции полосчатых структур вниз по потоку. На рис. 6 хорошо виден процесс разрушения полосчатых структур вниз по потоку с образованием ха-

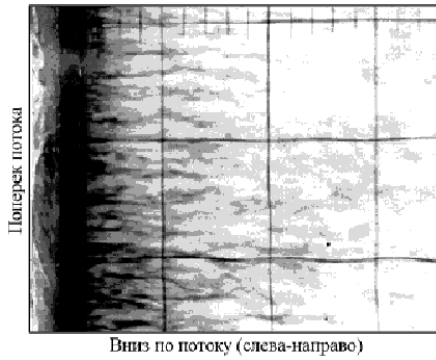


Рис. 5. Визуализация течения в вязком подслое турбулентного пограничного слоя (F. Нама из работы [23])



Рис. 6. Визуализация полосчатых структур в турбулентном пограничном слое (D. Vogart, S. Trujilo из работы [23])

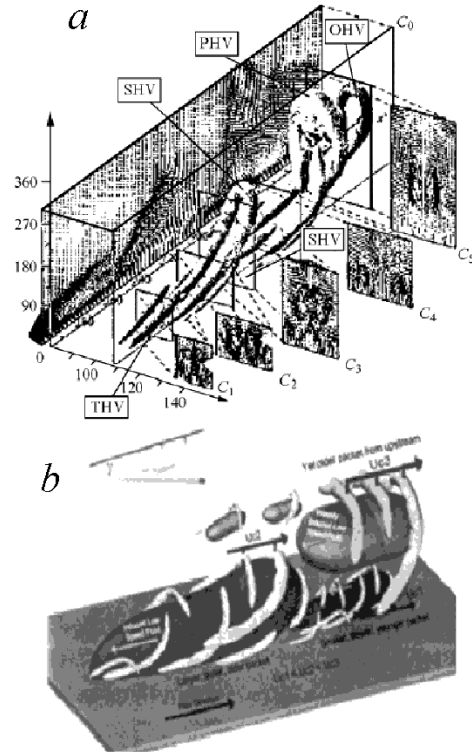


Рис. 7. Вихревые структуры турбулентного течения в канале:
a – численный эксперимент (из работы [32]);
b – схема пакетов шпильковых вихрей вязкого подслоя турбулентного пограничного слоя (из работы [6])

рактерных вихревых структур.

Результаты прямого численного моделирования когерентных структур турбулентного течения в канале показаны на рис. 7, *a*. Видны характерные образования типа Λ -структур. Схема структуры течения в вязком подслое турбулентного пограничного слоя представлена на рис. 7, *b*. Авторы выделяют различные типы когерентных структур, возникающих в вязком подслое.

Важный аспект, касающийся полосчатых структур, – их роль в процессе турбулизации свободных струйных течений. Как показано в работах [2, 3], полосчатые структуры возникают непосредственно на выходе из сопла круглой и плоской струи. При взаимодействии двумерных вихревых колец Кельвина–Гельмгольца с полосчатыми структурами происходит их трехмерное искажение с образованием характерных азимутальных выбросов типа Λ - или Ω -образных структур (рис. 8). Сценарий этого процесса очень напоминает трехмерное искажение классической дву-

мерной волны Толлмина–Шлихтинга на нелинейной стадии ее развития с образованием Λ -структур (см. схему на рис. 9). Вторичное высокочастотное возмущение, генерированное в области зарождения полосчатых структур [2], приводит к разрушению азимутальных выбросов из вихревого кольца, тем самым способствуя интенсификации процесса смешения струи с окружающим газом и ее турбулизации. Развитие высокочастотного возмущения происходит на двух противовращающихся вихрях, составляющих элементах Λ - или Ω -образных азимутальных выбросов, неустойчивость которых к таким возмущениям показана в работе [13]. Таким образом, полосчатые структуры играют важную роль не только в пристенных переходных и турбулентных течениях, но и в свободных сдвиговых течениях, таких как круглые и плоские струи. Механизмы их возникновения, развития, взаимодействия с другими возмущениями и роли в процессах турбулизации и регенерации турбулентности детально изучаются многими исследователями.

Высокочастотную вторичную неустойчивость

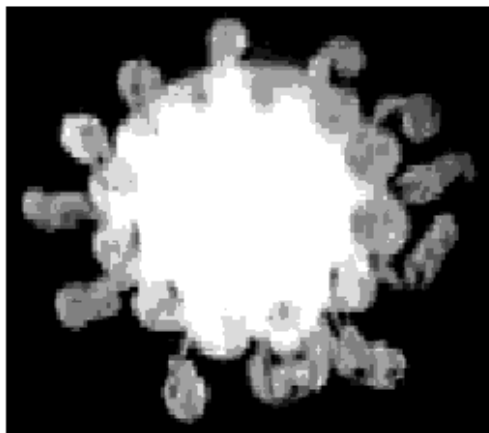


Рис. 8. Визуализация поперечного сечения круглой струи в процессе взаимодействия кольцевого вихря с полосчатыми структурами и образованием при этом азимутальных Λ -структур (из работ [2] и [3])

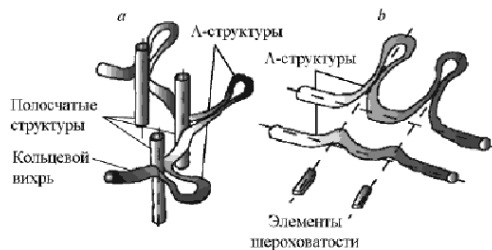


Рис. 9. Схема трехмерного искажения двумерного кольцевого вихря на локальных неоднородностях течения (полосчатых структурах) (a) и двумерной волны неустойчивости на элементах шероховатости (b) (из работы [3])

переходных и турбулентных пристенных течений при наличии в них полосчатых структур часто связывают с так называемой синусоидальной и варикозной неустойчивостью. Например, визуализация потока, модулированного вихрями Гертлера [8, 12, 16] (см. рис. 2, 3), показала, что переход такого течения определяется вторичными механизмами, которые продуцируют волны неустойчивости независимо на каждой вихревой паре так, что соседние пары могут усиливать различные типы вторичных движений: либо в виде периодического «меандрирования» вихрей в поперечном направлении, либо в форме подковообразных жгутов в области сильного поперечного сдвига (рис. 10).

Такие возмущения называют синусоидальной и варикозной модой соответственно. Они сопоставляются многими исследователями с нечетной и четной модами, известными из аналитического и чи-

сленного анализа вторичной неустойчивости вихрей Гертлера. В качестве причины неустойчивости выступает невязкий локальный механизм, обусловленный перегибами в мгновенных профилях скорости как в нормальном (варикозная мода), так и трансверсальном (синусоидальная мода) направлении. Выбор моды неустойчивости, которая возбуждается первой и растет более быстро, зависит от конкретных начальных условий, в частности от расстояния между возмущениями. Например, авторы [10, 22] численно нашли, что для длинноволновых вихрей варикозная мода доминирующая, тогда как у коротковолновых (наиболее часто встречающихся) превалирует синусоидальная мода. Это связано с тем, что вихри с большой длиной волны вызывают слабый поперечный сдвиг, а вихри малой длины волны — большой.

Прямое численное моделирование варикозной неустойчивости в турбулентном пограничном слое [30] показало подобие подковообразных вихрей, генерируемых как в ламинарном, так и турбулентном пограничном слое. Одновременно установлено, что механизм генерации подковообразных вихрей в турбулентных пограничных слоях связан с перегибной ($\partial U/\partial y$) неустойчивостью полосчатых структур. Подковообразные вихри могут быть причиной появления новых полосчатых структур в турбулентном подслое турбулентного пограничного слоя, что согласуется с результатами работы [6]. В то же время, синусоидальная неустойчивость, связанная с трансверсальным перегибным профилем скорости ($\partial U/\partial z$), подтверждена рядом исследований [19, 29, 31]. Можно полагать, что оба типа неустойчивости являются важными механизмами самоподдержания турбулентности в турбулентном пограничном слое: синусоидальный тип служит для регенерации пристенной турбулентности [11, 15, 17], а варикозный — для генерации подковообразных вихрей, занимающих область дальше от стенки [5, 6, 14, 27, 30]. Результаты прямого численного моделирования синусоидальной и варикозной мод неустойчивости полосчатой структуры показаны на рис. 11, 12 [11, 30].

Неустойчивость трехмерного сдвигового слоя, связанного с пристенными полосчатыми структурами, исследована экспериментально в пограничном слое плоской пластины в работе [27]. На единичной полосчатой структуре возбуждались раздельно симметричная (варикозная) и антисимметричная (синусоидальная) моды (рис. 13).

Обе моды неустойчивости исследованы в контролируемых условиях на линейной и начальных стадиях нелинейного развития ламинарно-турбулентного перехода. Когда трансверсальный

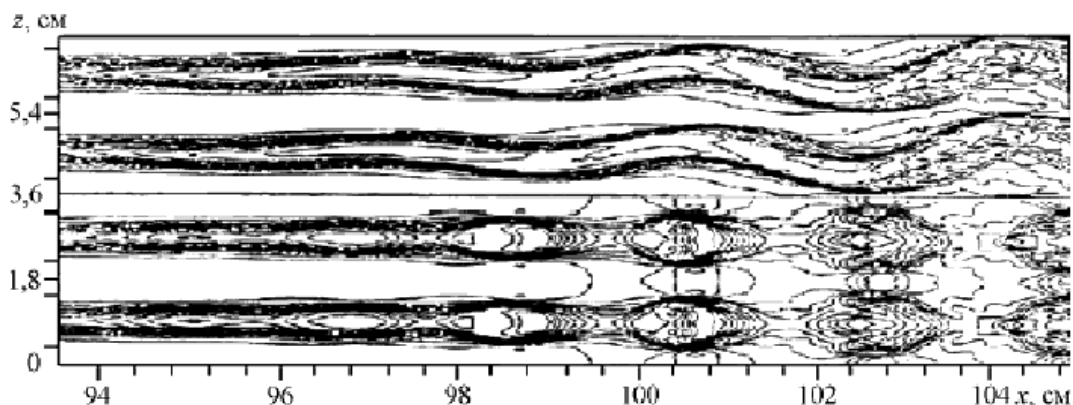


Рис. 10. Распределение мгновенных скоростей в плоскости xz , сверху – синусоидальная, внизу – варикозная моды (из работы [22])

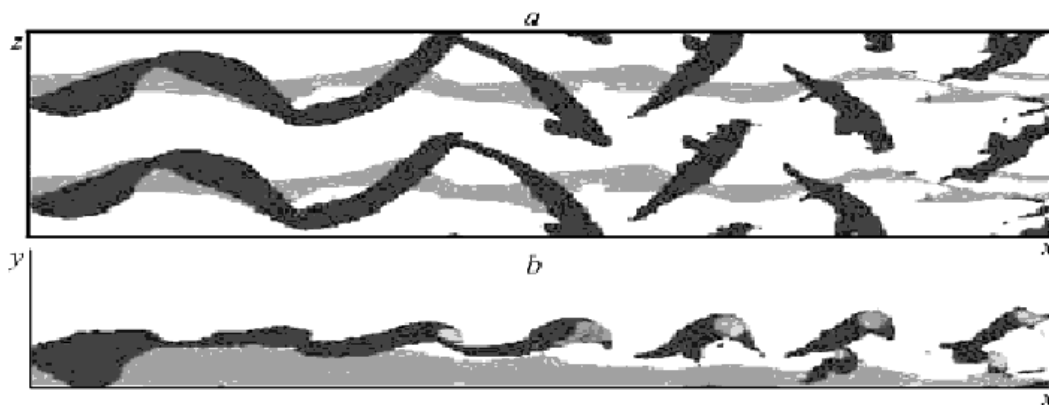


Рис. 11. Численный эксперимент синусоидальной неустойчивости полосчатых структур в турбулентном пограничном слое:
 a – в плоскости xz , b – в плоскости xy (из работы [11])

размер полосчатой структуры был больше толщины сдвигового слоя, наблюдался рост варикозной неустойчивости. В то же время, когда трансверсальный размер полосчатой структуры был сравним с толщиной слоя сдвига или менее ее, она становилась более неустойчивой к антисимметричным модам, чем к симметричным. Эксперимент [7] ясно продемонстрировал, что рост симметричной моды приводит к формированию шпилькообразных вихрей, представляющих собой пару противовращающихся продольных вихрей, замыкающихся головкой, т. е. Λ -вихрь, в то время как антисимметричная мода развивается в цуг квази-продольных вихрей с завихренностью чередующегося знака. Исследования варикозной неустойчивости уединенной полосчатой структуры в пограничном слое скользящего крыла [7] показа-

ли, что, в отличие от эксперимента [4], Λ -вихри трансформируются в асимметричные структуры из-за поперечного течения (рис. 14, 15).

В работе [21] экспериментально исследовалась синусоидальная неустойчивость группы полосчатых структур, ответственных за регенерацию квази-продольных вихрей в пристенной области турбулентного пограничного слоя. Обнаружено, что развитие субгармонических мод не сильно зависит от трансверсального шага полосчатых структур, в то время как рост фундаментальных мод сильно зависит от него и полностью подавляется, когда трансверсальный шаг становится в 2.5 раза меньше ширины отдельной полоски.

Цель данного обзора состоит в том, чтобы рассмотреть результаты последних исследований, касающихся развития возмущений в различных

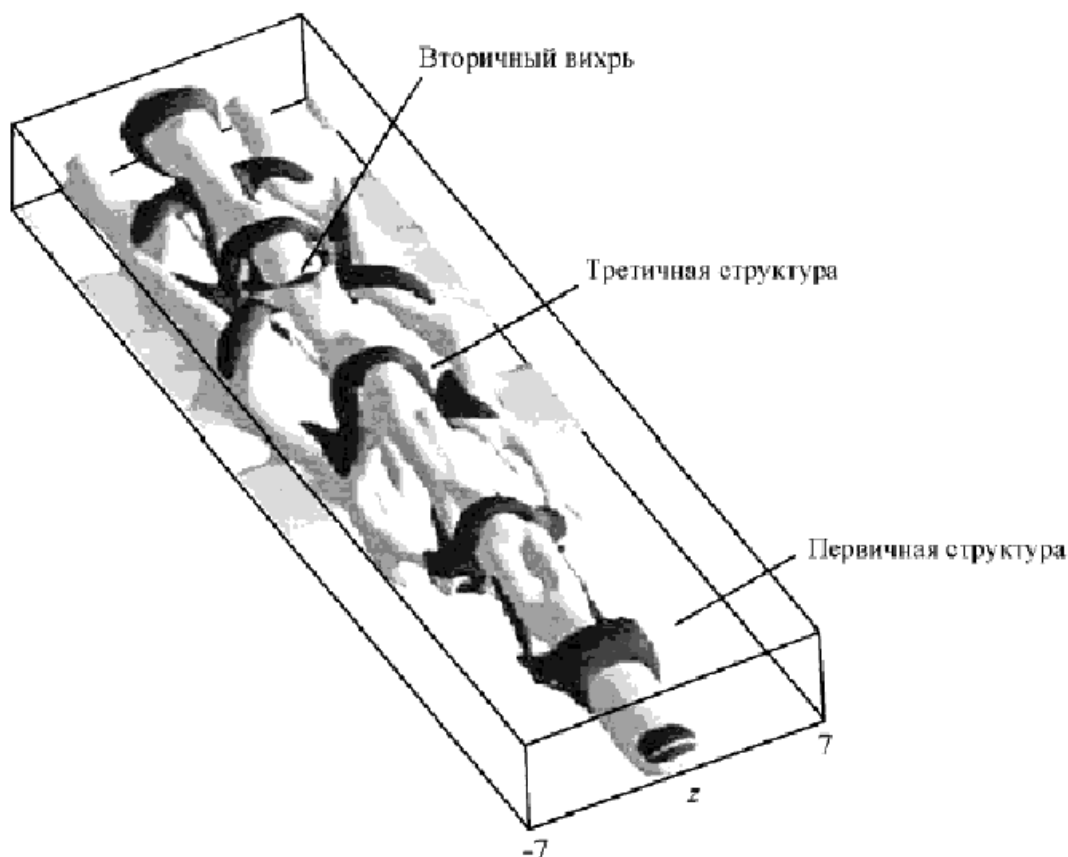


Рис. 12. Численный эксперимент варикозной неустойчивости полосчатой структуры; видно образование Ω -вихрей (из работы [30])

сдвиговых течениях, и на основании анализа этих работ представить результаты наших экспериментальных исследований нелинейной стадии варикозной и синусоидальной неустойчивости полосчатой структуры в пограничном слое Блазиуса. Основное внимание было обращено на когерентные структуры, возникающие в процессе вторичной высокочастотной неустойчивости полосчатых структур варикозного и синусоидального типа, что важно как для понимания механизмов перехода к турбулентности, так и механизмов регенерации турбулентности в турбулентном пограничном слое. В отличие от эксперимента [7], изучение проведено более детально (термоанемометрические измерения продольной компоненты скорости и пульсаций скорости по пространству (xyz) проводились по 5000 точек) с точки зрения выявления особенностей от возникновения, развития, внутренней структуры когерентных образований до более поздних стадий их нелинейного развития.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И ПРОЦЕДУРА ИЗМЕРЕНИЙ

Эксперимент проведен в дозвуковой малотурбулентной аэродинамической трубе, на плоской пластине (рис. 16), установленной в рабочей части трубы. Скорость потока $U_\infty = 7.8$ м/с, уровень турбулентности не превышал 0.1% при $U_\infty = 5.15$ м/с в частотном диапазоне от 0.5 до 10000 Гц.

Пластина имела эллиптический носик с соотношением осей 12 : 1. Полосчатая структура генерировалась с помощью цилиндрического элемента шероховатости высотой 1.1 мм и диаметром 5.8 мм, установленного в центре пластины на расстоянии 438 мм от ее носика. Оси координат x – вниз по потоку, y – по нормали к поверхности, z – в трансверсальном направлении, позиция элемента шероховатости $x = 438$ мм отмечена как x_0 .

В отсутствие элемента шероховатости ламинар-

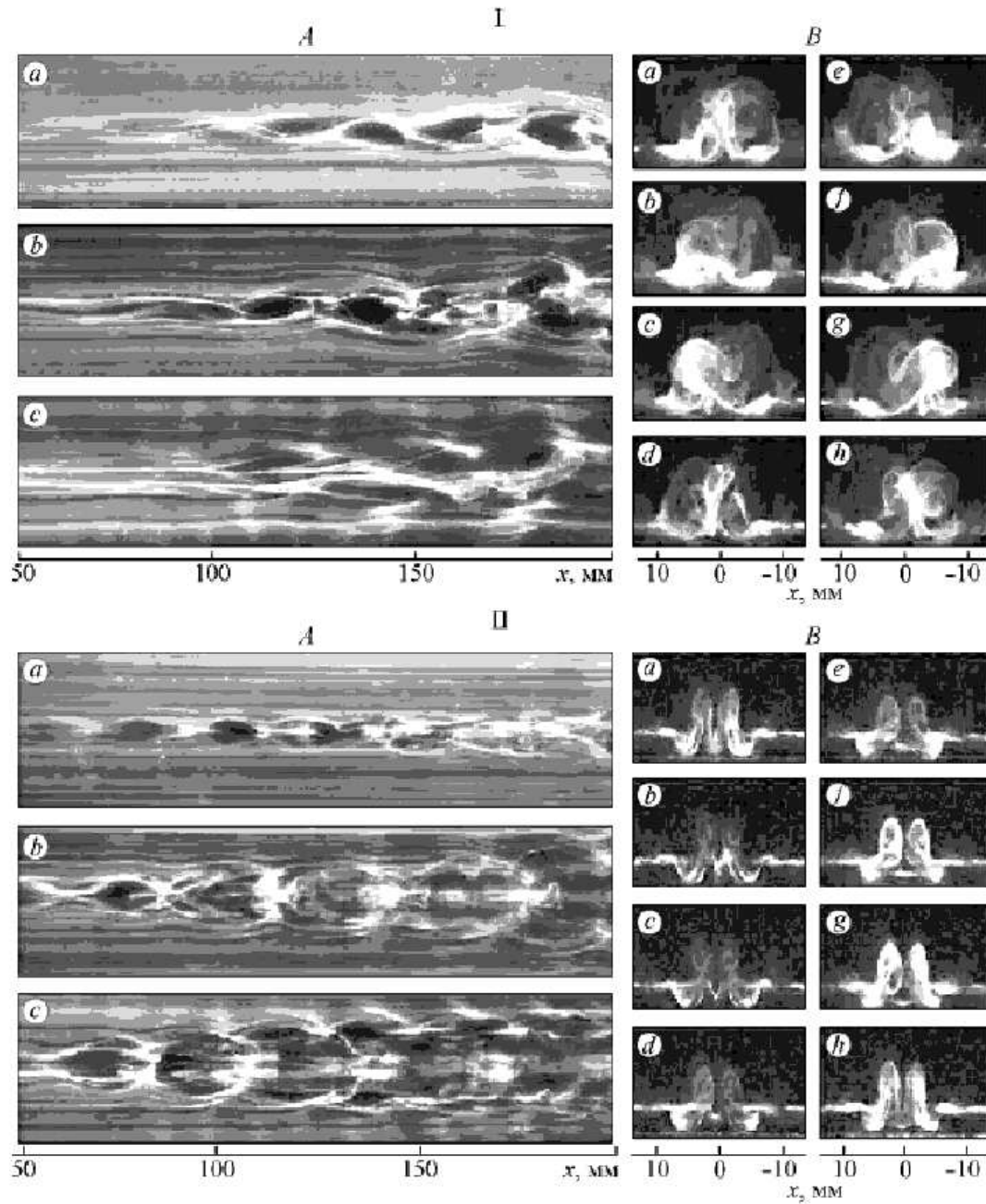


Рис. 13. Визуалізація синусоїдальної (I) і варикозної (II) неустойчивостей полосчатой структуры в продольном (A) направлении при $y = 4, 3, 2$ (a, b, c) и поперечном (B) направлении при $1/8$ периода (a – h) (картины визуализации из работы [7])

ний пограничний слой розвивався без яких-либо волн і профіль швидкості був близький до профілю Блазиуса. Висота елемента шероховатості $h = 1.1$ мм близька до товщини витеснення ламинарного пограничного слоя $\delta_B^* = 1.5$ мм при $x = x_0$ і $U_\infty = 7.8$ м/с. Число Рейнольдса

$Re^* = \delta_B^* \cdot U_\infty / \nu = 572$ при $x = x_0$. Полосчатая структура делала профілі швидкості перегибними, вони апроксимувалися гіперболически-тангенціальною функцією в нормальній к стенці напрямленні (y) і профілями слідового типу в трансверсальному напрямленні (z), що буде по-

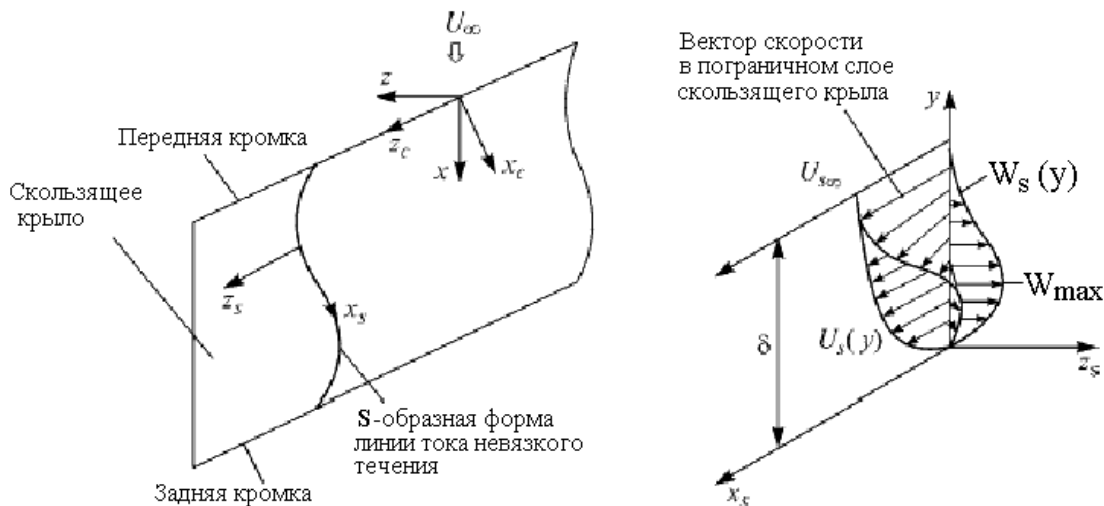


Рис. 14. Схема компонентов скорости трехмерного пограничного слоя на скользящем крыле (из работы [4])

казано ниже.

Без внедрения искусственных возмущений пограничный слой с полосчатой структурой оставался ламинарным в измеряемой области $x - x_0 = 30 - 150$ мм. Это позволило управлять неустойчивостью полосчатой структуры с помощью искусственных возмущений через три отверстия диаметром 3 мм. Одно отверстие ($z = 0$) при $x - x_0 = 14.5$ мм использовалось для возбуждения трансверсальных симметричных возмущений, а другие два отверстия – для возбуждения антисимметричных возмущений $\Delta z = \pm 4.5$ мм при $x - x_0 = 19.5$ мм. Три отверстия раздельно подсоединены к трем динамикам виниловыми трубками. Антисимметричные возмущения возбуждались синусоидальными сигналами в противофазе. Возбуждаемая частота вторичного высокочастотного возмущения составляла 150 Гц, что примерно соответствовало безразмерному частотному параметру $2\pi f\nu/U_\infty^2 \cdot 10^6 = 232$. Амплитуда вторичного возмущения доходила до 10% от U_∞ вблизи источника ($x - x_0 = 30$ мм), что позволяло исследовать нелинейную стадию процесса, представляющую для нас основной интерес. Термоанемометр измерял среднюю по времени продольную компоненту скорости U и пульсации скорости u' . Датчик с проволочкой из золоченого вольфрама длиной 1 мм и диаметром 5 мкм с коэффициентом перегрева 1.8 калибровался в свободном потоке с использованием модифицированного закона Кинга: $U = k_1(E^2 - E_0^2)^{1/n} + k_2(E - E_0)^{1/2}$,

где E и E_0 – выходные напряжения термоанемометра при скорости потока и ее отсутствии соответственно; k_1, k_2 и n – константы. Показатель экспоненты (n) обычно близок к 0.5, вторая константа (k_2) учитывает свободную конвекцию на стенке при малых скоростях потока. Максимальная ошибка при калибровке датчика не превышала 1% от U_∞ . Все измерения проведены в автоматическом режиме с использованием координатного устройства, перемещающего датчик в пространстве (xyz) по специально разработанной программе с использованием LabVIEW. Процесс измерения заключался в записи в память компьютера осредненных по ансамблю осциллограмм (до 50 реализаций) в определенной точке пространства, после чего датчик перемещался автоматически в следующую точку и т. д. Обработка полученной информации проводилась с применением программного обеспечения MatLab, что позволило представить результаты измерений в виде контурных диаграмм изолиний средней скорости и пульсаций скорости трансверсальных сечений (плоскость yz) развития возмущений, а также в виде пространственно-временных (в координатах x, y, z, t) картин данного процесса.

2. ПОЛЕ СКОРОСТИ ВНИЗ ПО ПОТОКУ ОТ ЭЛЕМЕНТА ШЕРОХОВАТОСТИ

На рис. 17, *a* и *b* показаны распределения сре-

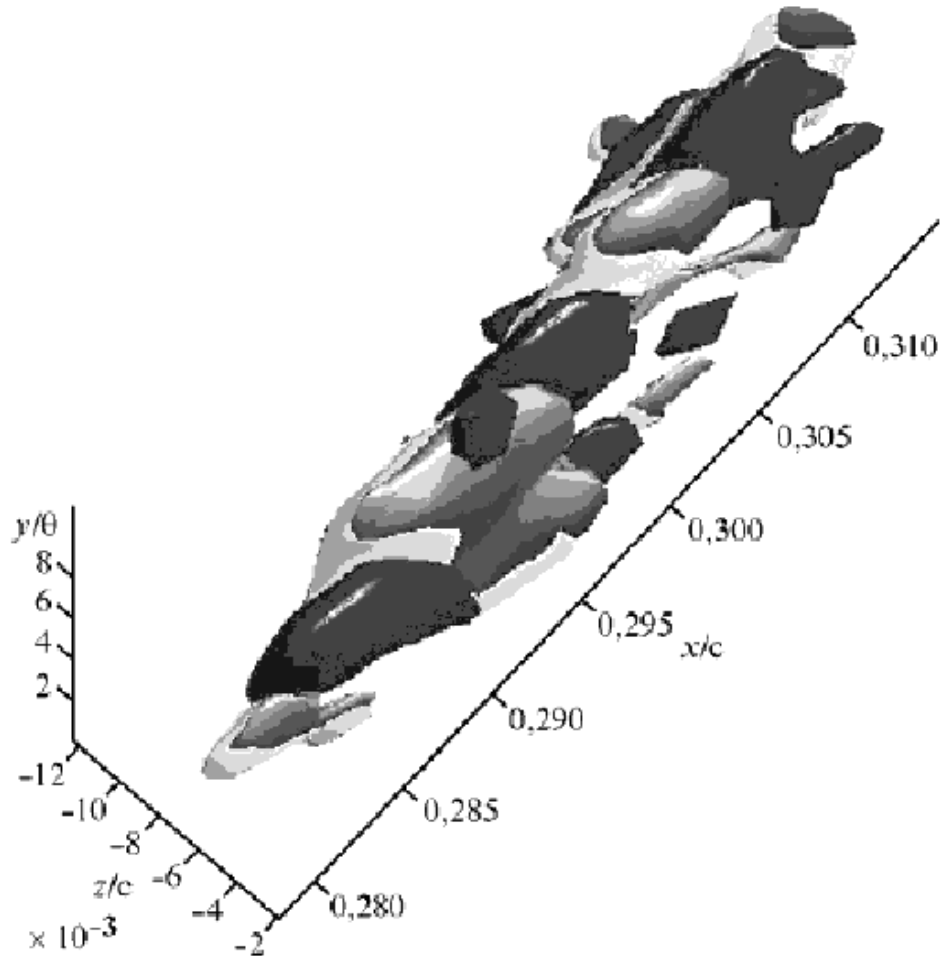


Рис. 15. Пространственная картина развития высокочастотного вторичного возмущения, развивающегося на полосчатой структуре в пограничном слое скользящего крыла (из работы [4])

дней скорости U по y и z при $x - x_0 = 30$ мм. Значение $U = f(y)$ измерено при $z = 0$ мм и сравнивается с распределением скорости при $z = -7$ мм, где профиль Блазиуса находится вне зоны влияния элемента шероховатости. Профиль $U = f(y)$ при $z = 0$ мм позади элемента шероховатости явно имеет точку перегиба, что указывает на его неустойчивость. На рис. 17, b z -распределения измерены на высотах $y = 1.9, 2.3, 3.1, 3.9$ и 4.3 мм. Дефект скорости из-за торможения элементом шероховатости наблюдается ниже $-y = 4$ мм. Трансверсальные распределения скорости поперек полосчатой структуры очень напоминают распределения в обычном следе, и поэтому поперечный масштаб полосчатой структуры отмечен как половина ширины l_s , используемой для обычных следов. Здесь половина l_s составляет около 4 мм при $x - x_0 = 30$ мм. Кроме того, отметим, что пре-

вышение скорости на торцах выступа, внедренное продольными вихрями (две ноги подковообразного вихря, возникающего при обтекании элемента шероховатости), значительно больше, чем в работе [7] из-за влияния вторичного возмущения. Это указывает, что воздействие стационарного подковообразного вихря с наложенным на него вторичным возмущением на скоростное поле значительно больше, чем в той же работе [7]. Настоящая полосчатая структура является, таким образом, несвободной от продольной завихренности из-за присутствия искусственных возмущений. Наличие же точек перегиба в профилях $U(z)$ указывает на их неустойчивость, как и в профиле $U(y)$.

Контурные диаграммы изолиний равных дефектов средней скорости в плоскости yz вблизи элемента шероховатости при $x_0 = 30$ мм в условиях генерации вторичных высокочастотных возмуще-

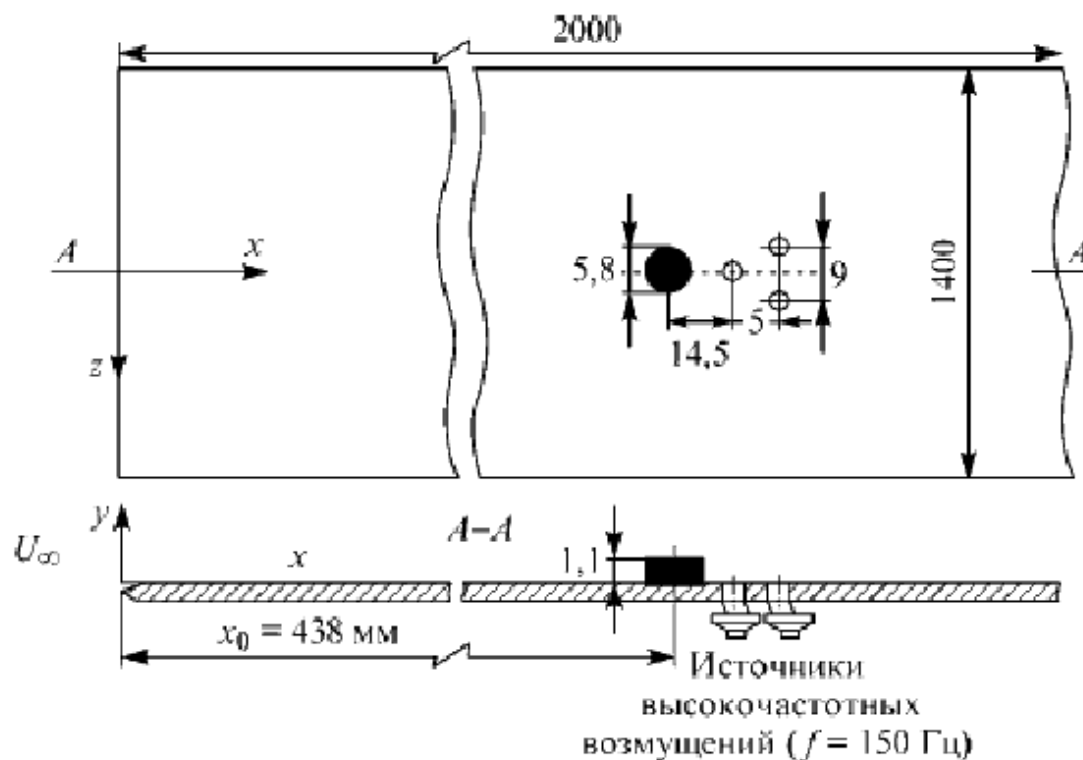


Рис. 16. Схема эксперимента

ний, создающих синусоидальный (*a*) и варикозный (*b*) типы неустойчивости, представлены на рис. 18. Видно, что в обоих случаях структура поля течения, изображенная в изолиниях средней скорости, представляет собой область дефекта скорости и расположенные симметрично по обе стороны от нее две области превышения скорости. Это типичная картина структуры течения в виде изолиний для двух противорвращающихся вихрей, которые в данном случае представляют “ноги” шпилькообразного вихря, порожденного обтеканием потоком элемента шероховатости.

Вторичное возмущение скорости оказало заметное влияние на интенсивность средних характеристик течения, что связано с нелинейностью этого процесса уже вблизи источников возмущений. Максимум амплитуды средней скорости для варикозного типа неустойчивости достигает $17\% U_\infty$, а для синусоидального типа – $23\% U_\infty$. Можно наблюдать слабый сдвиг максимума в распределении дефекта скорости на рис. 18, *b* вверх от стенки, что, по-видимому, связано с воздействием возмущения непосредственно под полосчатой структурой в случае реализации варикозной неустойчивости. Представление о структуре вторичного высо-

кочастотного возмущения синусоидального и варикозного типов вблизи элемента шероховатости в плоскости yz при $x - x_0 = 30$ мм дают контурные диаграммы изолиний равных пульсаций скорости (u'_{RMS}) на рис. 19.

Как видно из этого рисунка, уровень амплитуды пульсаций вторичного возмущения даже вблизи элемента шероховатости достаточно высокий, особенно для варикозного типа неустойчивости – $10.2\% U_\infty$ (для синусоидального – $3.5\% U_\infty$). Тем самым созданы условия для нелинейной стадии развития обоих типов неустойчивостей далее вниз по потоку. Рассматривая общие свойства неустойчивости перегибных профилей скорости в направлениях y и z , мы ожидали, что полосчатая структура может нарастать двумя типами неустойчивой моды, то есть симметричной варикозной модой, развивающейся в симметричные шпилькообразные вихри с парой противорвращающихся продольных вихрей, и антисимметричной синусоидальной модой, ведущей к меандрированию полосчатой структуры. Чтобы возбудить эти две моды неустойчивости отдельно, в контролируемом эксперименте возмущения внедрены в ламинарную полосчатую структуру через малые

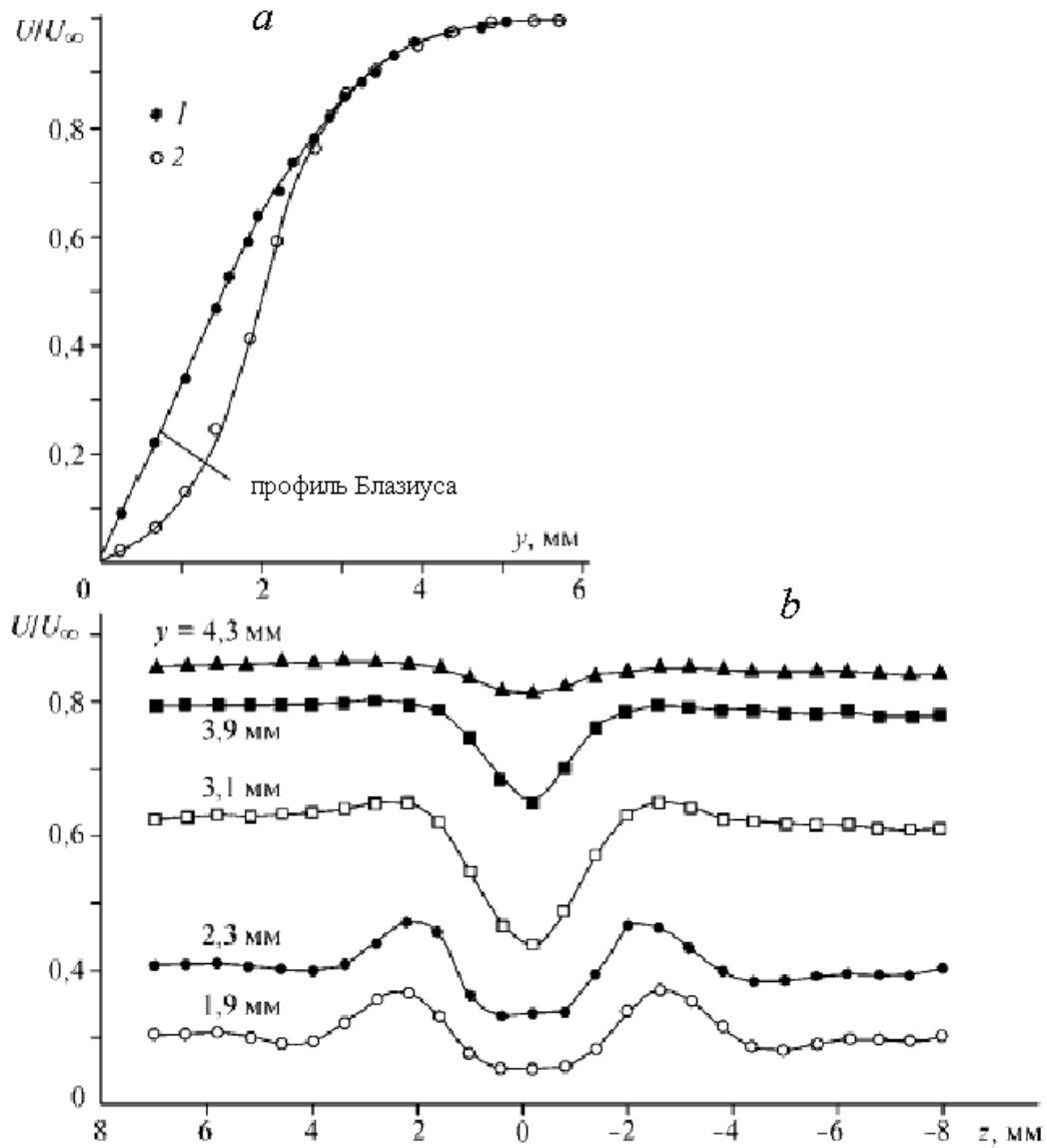


Рис. 17. Распределения средней скорости U при $x - x_0 = 30$ мм:
 а - y -распределения при $z=0$ (кривая 1); $z=-7$ мм кривая 2;
 б - z -распределения средней скорости на различных расстояниях от стенки

отверстия, связанные с громкоговорителем, как уже отмечалось выше. Рисунок 19, а показывает антисимметричную моду при $f=150$ Гц. Распределение этой моды симметрично относительно $z = 0$, но ее фаза подвергается 180-градусному прыжку поперек оси симметрии и таким образом амплитуда этой моды пропадает при $z = 0$. Рисунок 19, б показывает симметричную моду на той же частоте $f=150$ Гц, выбранной близкой к наиболее растущей в естественных условиях. Распределение

этой моды, наоборот, показывает максимальную амплитуду при $z = 0$ и отсутствие трансверсального прыжка фазы. Таким образом, возбужденные волны могут быть идентифицированы как собственные моды трехмерного сдвигового слоя, связанного с полосчатой структурой. Несмотря на явно нелинейный характер возбужденных волн даже вблизи источника их генерации, картины распределений на рис. 19 качественно коррелировали с аналогичными распределениями из работы [7].

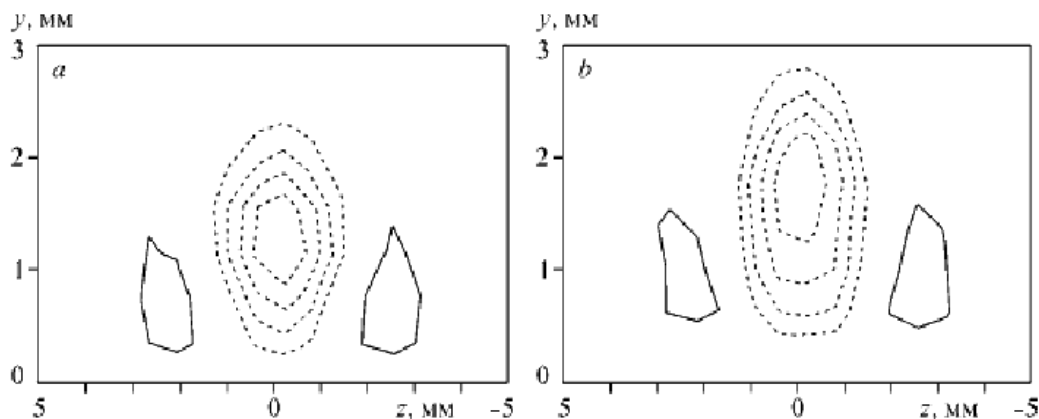


Рис. 18. Контурные диаграммы изолиний равных дефектов средней скорости в плоскости yz вблизи элемента шероховатости при $x - x_0 = 30$ мм:
 а – синусоидальная неустойчивость (уровни амплитуды $-16,4\%$; $-12,6\%$; $-8,6\%$; $-4,7\%$; $7\%U_\infty$);
 б – варикозная неустойчивость (уровни амплитуды $-11,3\%$; $-8,4\%$; $-5,6\%$; $-2,8\%$; $5,6\%U_\infty$)

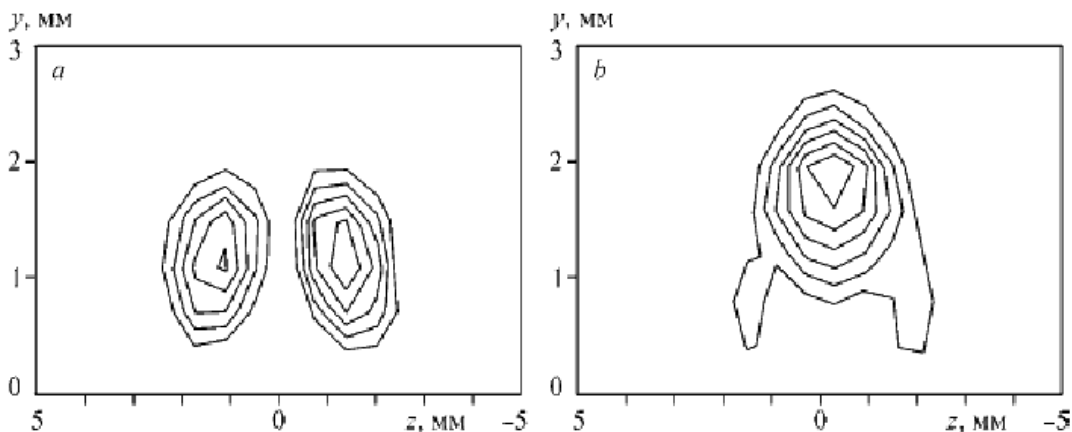


Рис. 19. Контурные диаграммы изолиний равных пульсаций скорости вторичного высокочастотного возмущения для синусоидального (а) и варикозного (б) типов неустойчивостей вблизи элемента шероховатости $x - x_0 = 30$ мм. Шаг изолиний при u'/U_∞ :
 а – $1,5\%$; 2% ; $2,6\%$; $3,1\%$; $3,5\%$; б – $2,9\%$; $4,3\%$; $5,9\%$; $7,3\%$; $8,7\%$; $10,2\%$

Заметим, что фазовые скорости симметричной и антисимметричной мод были близки к локальной скорости в точках перегиба в профиле по оси y при $z=0$ мм и по оси z при $y=2$ мм соответственно. Сдвиг скорости ($\partial U/\partial y$ или $\partial U/\partial z$) становится наибольшим в этих точках перегиба.

3. ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ СТРУКТУР ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ РАЗВИТИИ СИНУСОИДАЛЬНОЙ И ВАРИКОЗНОЙ МОД НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Известно [7], что линейная неустойчивость трехмерного слоя сдвига связана с полосчатой структурой. Нас интересует вопрос, как неустойчивые моды эволюционируют в когерентные вихри, ведущие к пристенной турбулентности. Как отмечалось выше, амплитуда искусственных возмущений для создания нелинейности и поздних стадий перехода вблизи элемента шероховатости при $x - x_0 = 30$ мм составляла $3,5\% U_\infty$ и $10\% U_\infty$ для синусоидальной и варикозной мод неустойчивости соответственно. Интенсивность нарастания вниз по потоку (от $x - x_0 = 30$ мм до $x - x_0 = 150$ мм) высокочастотных вторичных возмущений была доволь-

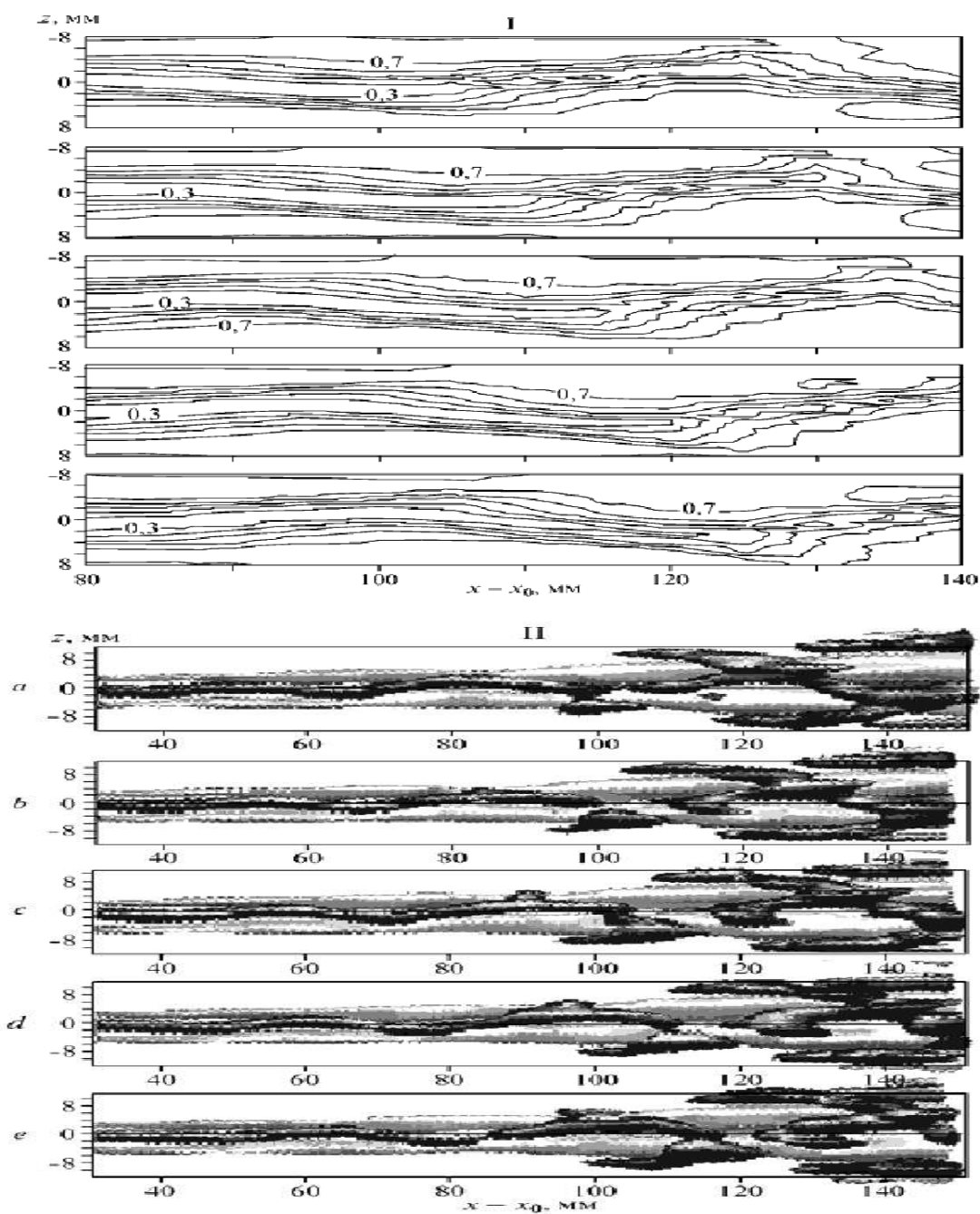


Рис. 20. Осредненные по ансамблю контурные диаграммы изолиний равной скорости при возбуждении синусоидальной моды в плоскости xz при $y=3$ мм из работы [7] (I) и пространственные картины развития синусоидальной моды в пространстве (xyz) из данной работы (II). Временные отрезки по периоду $t/T = 0(a), 1/8(b), 2/8(c), 3/8(d), 4/8(e)$

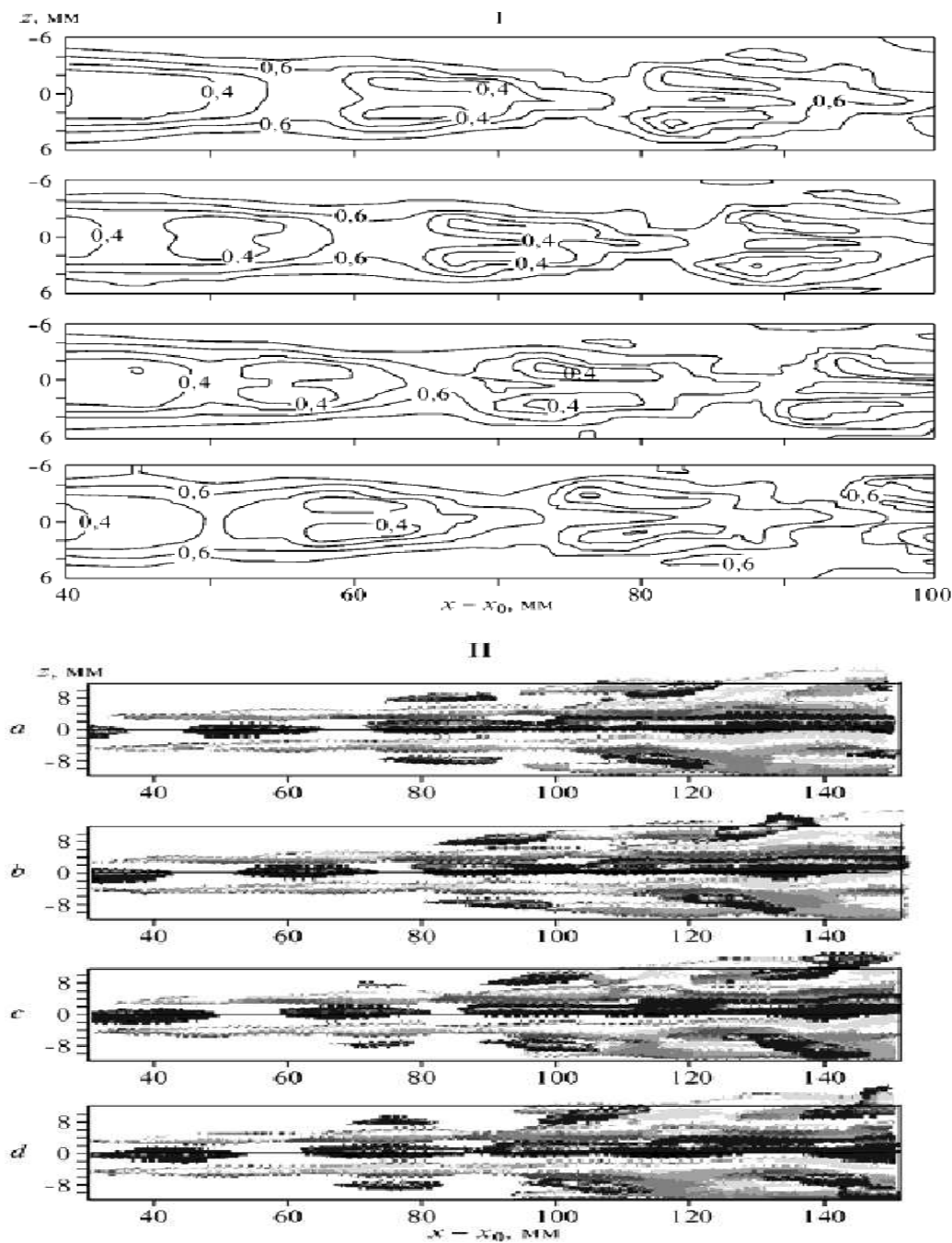


Рис. 21. Осредненные по ансамблю контурные диаграммы изолиний равной скорости при возбуждении синусоидальной моды в плоскости xz при $y=3$ мм из работы [7] (I) и пространственные картины развития синусоидальной моды в пространстве (xyz) из данной работы (II). Временные отрезки по периоду $t/T = 0(a), 1/4(b), 2/4(c), 3/4(d)$

но слабой (от 3.5% U_∞ до 11% U_∞ для синусоидальной и от 10% U_∞ до 12% U_∞ для варикозной мод неустойчивости), в то время как влияние возмущений на средние характеристики течения было значительным (от 19% U_∞ до 38% U_∞ для синусоидальной и от 7% U_∞ до 32% U_∞ для варикозной мод неустойчивости). Особенно сильно влияние синусоидальной неустойчивости. Даже при значительно меньшей амплитуде вторичного возмущения (3.5% U_∞) воздействие его на средние характеристики течения более мощное (38% U_∞). Это подтверждает выводы многих исследователей о более опасной синусоидальной неустойчивости.

Сравним динамику развития синусоидальной и варикозной мод неустойчивости на нелинейной стадии, исследованную в данной работе и в работе [7]. На рис. 20 представлены осредненные по ансамблю контурные диаграммы изолиний равной скорости в плоскости xz , взятые из работы [7], и пространственные картины дефектов скорости с наложенным вторичным возмущением в пространстве (xyz) из данной работы в пять равномерных моментов времени по полупериоду для синусоидального возмущения (см. рис. 20) и в четыре равномерных момента времени по периоду варикозного возмущения (рис. 21). Частота синусоидального и варикозного возмущения в работе [7] $f=60, 110$ Гц соответственно, а в данной работе $f=150$ Гц. На начальном участке развития синусоидального возмущения ($x \approx 60 - 70$ мм) можно наблюдать меандрирование полосчатой структуры за полупериод на 180° в указанных работах (см. рис. 20). Однако далее вниз по потоку наблюдается мультиплицирование полосчатых структур и появление когерентных образований типа Λ -вихрей на рис. 20, II и отсутствие такой динамики на рис. 20, I. Аналогичная картина наблюдается и в случае развития варикозной неустойчивости (см. рис. 21). Начальная стадия пространственного развития в этих работах отражает периодическое пережимание полосчатой структуры, однако далее вниз по потоку термоанемометрические измерения в данной работе фиксируют мультиплицирование полосчатых структур и появление когерентных образований (см. рис. 21, II), тогда как в работе [7] (см. рис. 21, I) подобного явления не наблюдается. Можно высказать предположение, что нелинейная стадия развития обоих видов неустойчивости в работе [7] была исследована лишь на начальной стадии процесса и с менее детальными термоанемометрическими измерениями, чем это проведено в данном исследовании.

Рассмотрим более детально структуру течения за шероховатостью на нелинейной стадии синусои-

дальной и варикозной неустойчивости. На рис. 22 представлены картины синусоидального разрушения полосчатой структуры. Контурные диаграммы изолиний равных дефектов скорости совместно с возмущением в плоскости yz (рис. 22, II) демонстрируют трансверсальное распыление возмущенной области течения вниз по потоку, что связано с мультиплицированием (генерацией новых) полосчатых структур. Это хорошо видно по появлению новых замкнутых областей изолиний при $x - x_0 = 150$ мм. Пространственная картина развития возмущения (рис. 22, I) показывает, что на начальном участке течения наблюдается меандрирование полосчатой структуры в трансверсальном направлении. Это типично для развития синусоидальной неустойчивости. Однако далее вниз по потоку структура возмущенной области трансформируется в характерные когерентные структуры, напоминающие Λ -вихри. Рассмотрим динамику развития непосредственно вторичного высокочастотного возмущения, генерированного на полосчатой структуре. Контурные диаграммы изолиний равных пульсаций скорости в плоскости yz (рис. 23, II) демонстрируют трансверсальное дробление изначально простой структуры вниз по потоку на ряд замкнутых областей изолиний вблизи стенки пластины (до семи при $x - x_0 = 150$ мм). Коллеблющаяся (меандрирующая) полосчатая структура приводит к генерации “поезда” продольных вихрей, сносимых вниз по потоку, как установлено в [7]. В данной работе, по-видимому, мы наблюдаем тот же процесс, но при трансверсальном мультиплицировании этих вихрей. Особенно наглядно процесс развития вторичных возмущений можно наблюдать на пространственной картине, представленной на рис. 23, I. Видно, что на начальном этапе развития возмущения можно наблюдать пару квазипродольных вихрей чередующегося знака, которые далее вниз по потоку трансформируются в Λ -структуры, причем трансверсальный масштаб этих когерентных образований возрастает. Следует заметить, что в работе [7] при исследовании нелинейной стадии синусоидальной неустойчивости наблюдалось появление когерентных структур типа квазипродольных вихрей, но не Λ -структуры. Возможно, такое явление связано с менее детальным рассмотрением возмущенной области и лишь с начальными стадиями нелинейного процесса. При менее детальном рассмотрении картины течения возмущенной области на уровне амплитуды возмущения 6.4% U_∞ (рис. 24, III) можно наблюдать, главным образом, структуры типа квазипродольных вихрей, в то время как в случае пространственной картины на уровне амплитуды во-

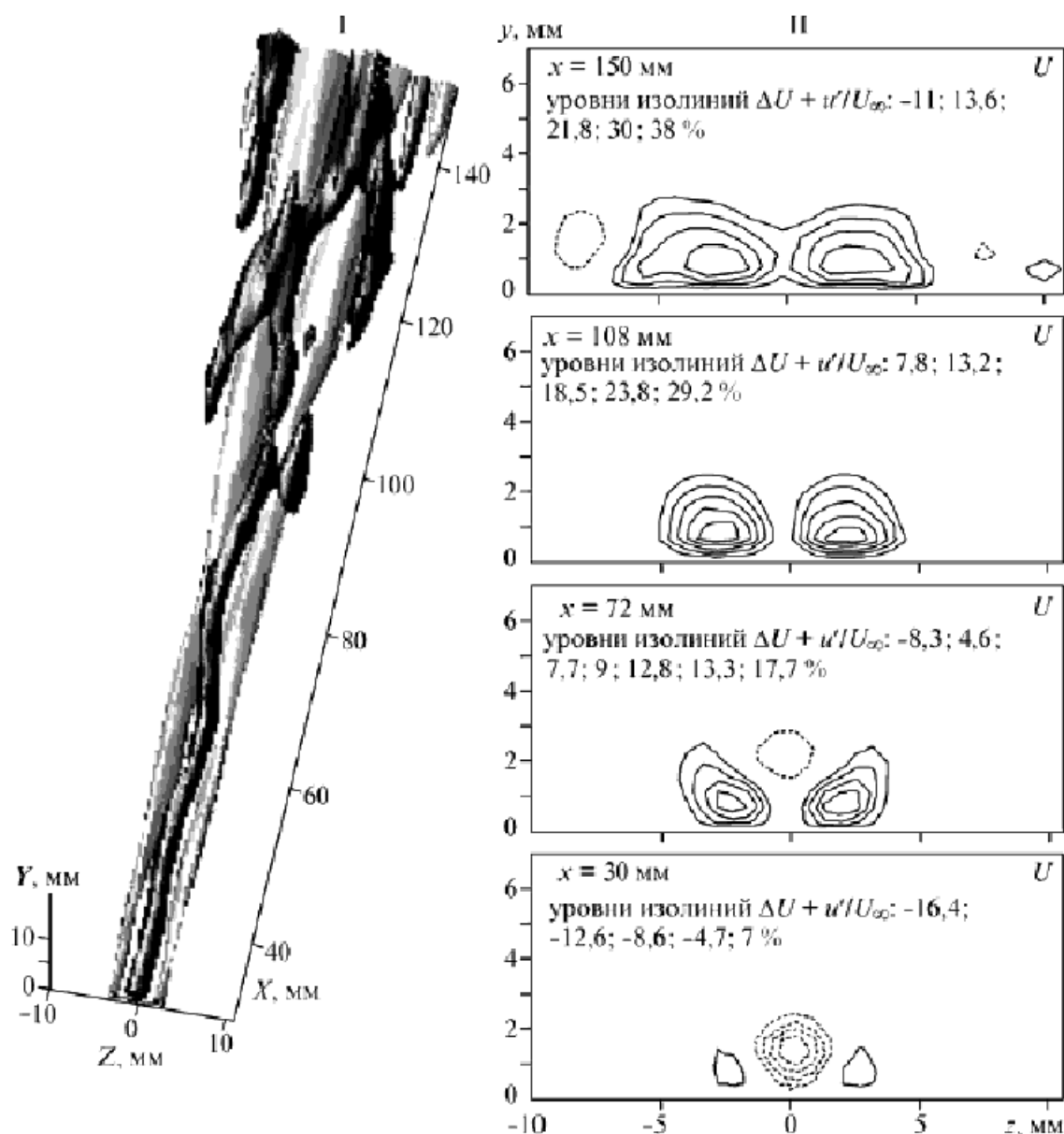


Рис. 22. Картины синусоидального разрушения полосчатой структуры: I – пространственная картина развития возмущения совместно с его влиянием на среднюю скорость (минимальный уровень пульсаций $6,4\%U_\infty$, темные полтона – превышение скорости, светлые – дефекты скорости); II – контурные диаграммы изолиний равных дефектов средней скорости в плоскости yz на различных расстояниях вниз по потоку (сплошные изолинии – превышение скорости, пунктирные – дефект скорости)

змущения $0,4\%U_\infty$ (см. рис. 24, I) видны характерные когерентные структуры типа Λ -вихрей. Таким образом, детальные термоанемометрические измерения нелинейной стадии развития синусоидальной неустойчивости показали, что вторичное высокочастотное разрушение полосчатой структуры связано с образованием Λ -структур, разрушение которых вниз по потоку приводит к турбули-

зации течения.

На рис. 25 представлены картины варикозного разрушения полосчатой структуры. Контурные диаграммы изолиний равных дефектов скорости совместно с возмущением в плоскости yz (рис. 25, II) демонстрируют трансверсальное расплывание возмущенной области вниз по потоку, что связано с мультиплицированием (генерацией

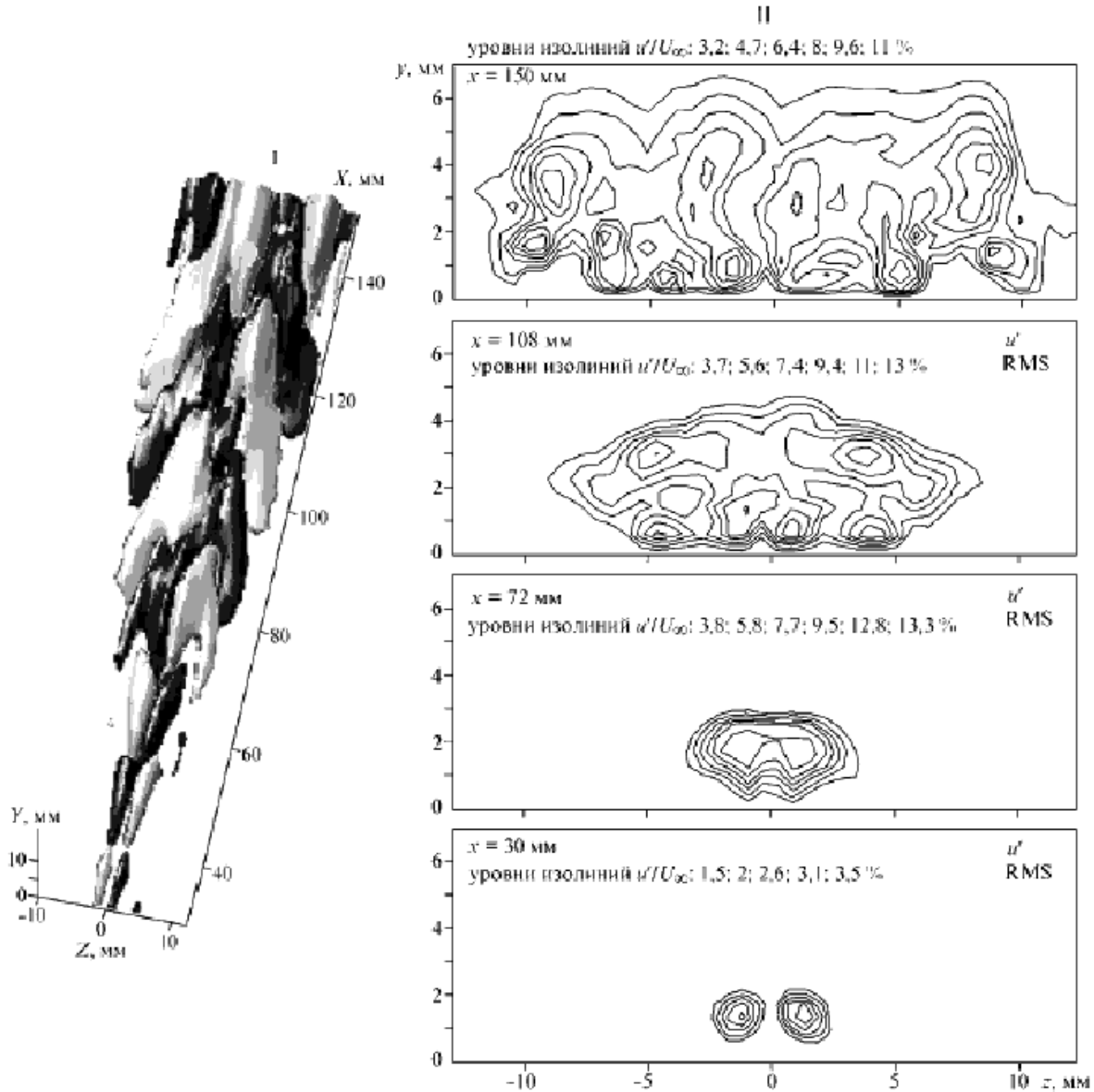


Рис. 23. Картины синусоидального разрушения полосчатой структуры:
 I – пространственная картина развития возмущения (минимальный уровень пульсаций $1,3\%U_\infty$, темные полутона – превышение скорости, светлые – дефекты скорости);
 II – контурные диаграммы изолиний равных среднеквадратичных пульсаций скорости (RMS) на различных расстояниях вниз по потоку в плоскости yz

новых) полосчатых структур. Это хорошо видно при появлении новых замкнутых областей изолиний при $x - x_0 = 72, 108$ мм.

Пространственная картина развития возмущения (рис. 25, I) показывает, что на начальном участке наблюдается продольная модуляция полосчатой структуры частотой вторичного возмущения ($f=150$ Гц). Это типично для развития варикозной неустойчивости. Однако далее вниз по по-

току структура возмущенной области трансформируется в характерные когерентные структуры, напоминающие Λ -вихри, как и в случае синусоидального разрушения полосчатой структуры. Следует, однако, заметить, что, в отличие от предыдущего случая, Λ -структуры асимметричны, т. е. второй противорвращающийся вихрь находится на стадии формирования из-за слабой завихренности на трансверсальных границах поля возмущения.

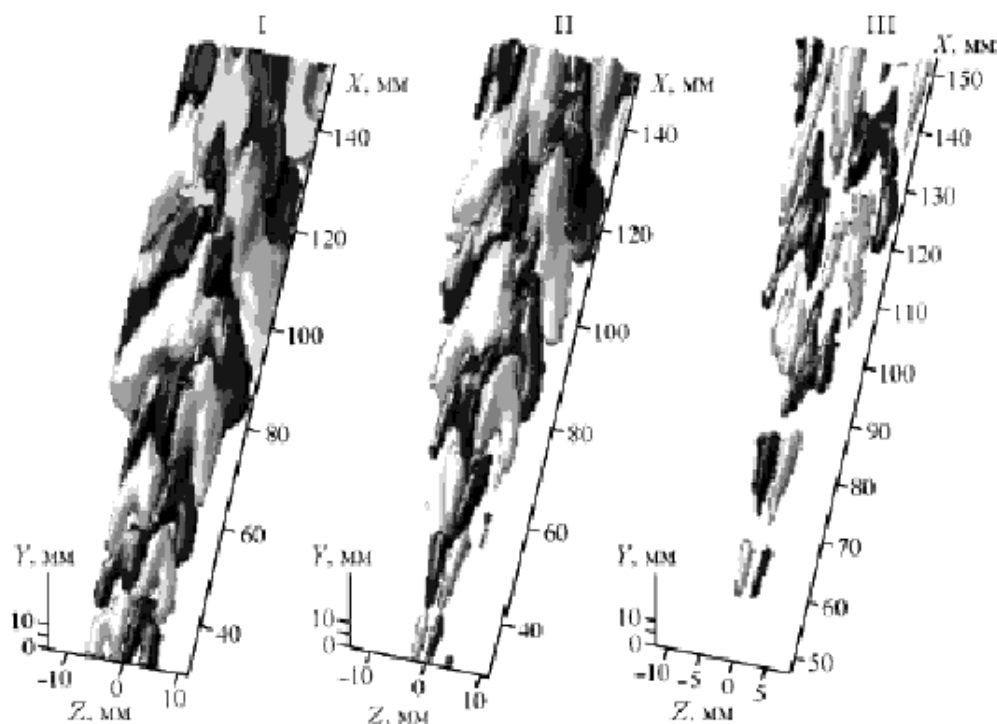


Рис. 24. Пространственные картины развития вторичного высокочастотного возмущения нелинейной стадии синусоидальной неустойчивости. Поверхности равных уровней амплитуды $-0,4\%$ (I); $1,3\%$ (II), $6,4\%U_\infty$ (III) (темные полутона – превышение скорости, светлые – дефект скорости)

Ниже, при рассмотрении развития непосредственно высокочастотного возмущения, мы сможем наблюдать симметричные Λ -структуры.

Рассмотрим динамику развития непосредственно вторичного высокочастотного возмущения, генерированного на полосчатой структуре. Контурные диаграммы изолиний равных пульсаций скорости в плоскости yz (рис. 26, II) демонстрируют трансверсальное дробление изначально простой структуры вниз по потоку на ряд замкнутых областей, как и в случае синусоидальной моды неустойчивости. Продольная модуляция полосчатой структуры приводит к генерации шпилькообразных вихрей или пары противорвращающихся квазипродольных вихрей в области $z = \pm 2,5$ мм, как установлено в работе [7]. В нашем случае, по-видимому, протекает тот же процесс, но при трансверсальном мультиплицировании этих вихрей. Кроме того, можно наблюдать подъем низкоскоростной жидкости, каждая нога шпилькообразного вихря сама эволюционирует в пару противорвращающихся продольных вихрей в x -позициях вниз по потоку. Особенно наглядно про-

цесс развития вторичных возмущений наблюдается на пространственной картине, представленной на рис. 26, I. Видно, что на начальном этапе развития возмущения можно наблюдать череду квазипродольных вихрей, которые далее вниз по потоку трансформируются в шпилькообразные вихри или Λ -структуры. Эти вихри отчетливо наблюдаются при $z=0$ мм в виде пары структур переменного знака на каждом периоде вторичного возмущения. При $z = \pm 5$ мм трансверсальные границы возмущенной области, Λ -структуры или шпилькообразные вихри становятся асимметричными, как отмечалось выше, тем не менее явно наблюдается структура второго противорвращающегося вихря данных когерентных образований. Следует заметить, что в работе [7] при исследовании нелинейной стадии варикозной неустойчивости регистрировались именно такие когерентные структуры. В то же время, асимметричные Λ -структуры были обнаружены при развитии варикозной моды неустойчивости течения в пограничном слое скользящего крыла [3] (см. рис. 15). Одновременно в работе [3] наблюдалась трансформация коге-

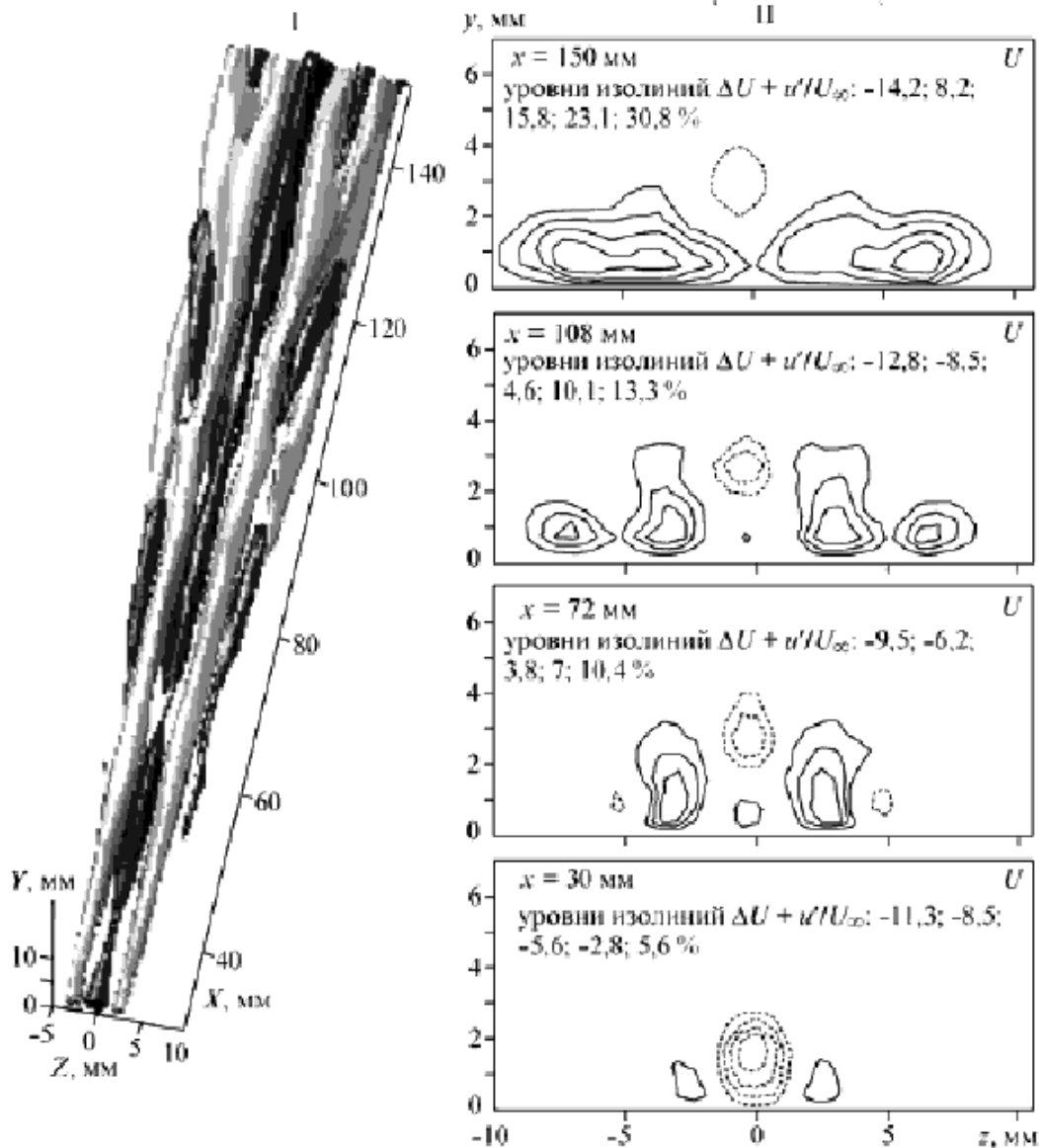


Рис. 25. Картины варикозного разрушения полосчатой структуры:
 I – пространственная картина развития возмущения совместно с его влиянием на среднюю скорость (минимальный уровень пульсаций $3,8\%U_\infty$, темные полутона – превышение скорости, светлые – дефекты скорости); II – контурные диаграммы изолиний равных дефектов средней скорости на различных расстояниях вниз по потоку в плоскости yz (сплошные изолинии – превышение скорости, пунктирные – дефект скорости)

рентных структур варикозной моды неустойчивости в структуры синусоидальной неустойчивости из-за поперечного течения на скользящем крыле. Рассмотрим пространственную картину развития вторичного высокочастотного возмущения в виде поверхностей равных уровней амплитуды для $2.6\% U_\infty$, $1.4\% U_\infty$ и $0.4\% U_\infty$ (рис. 27). При менее детальном рассмотрении картины течения возмущенной области, например в случае простран-

ственной картины на уровне амплитуды возмущения $2.6\% U_\infty$ (см. рис. 27, III), можно наблюдать локализованные вихри продольной модуляции полосчатой структуры на начальном этапе развития возмущения. Далее вниз по потоку идет процесс трансверсального мультиплицирования структур и появление Λ -вихрей. При рассмотрении картины течения возмущенной области на уровне амплитуды возмущения $0.4\% U_\infty$ (см. рис. 27, I) на-

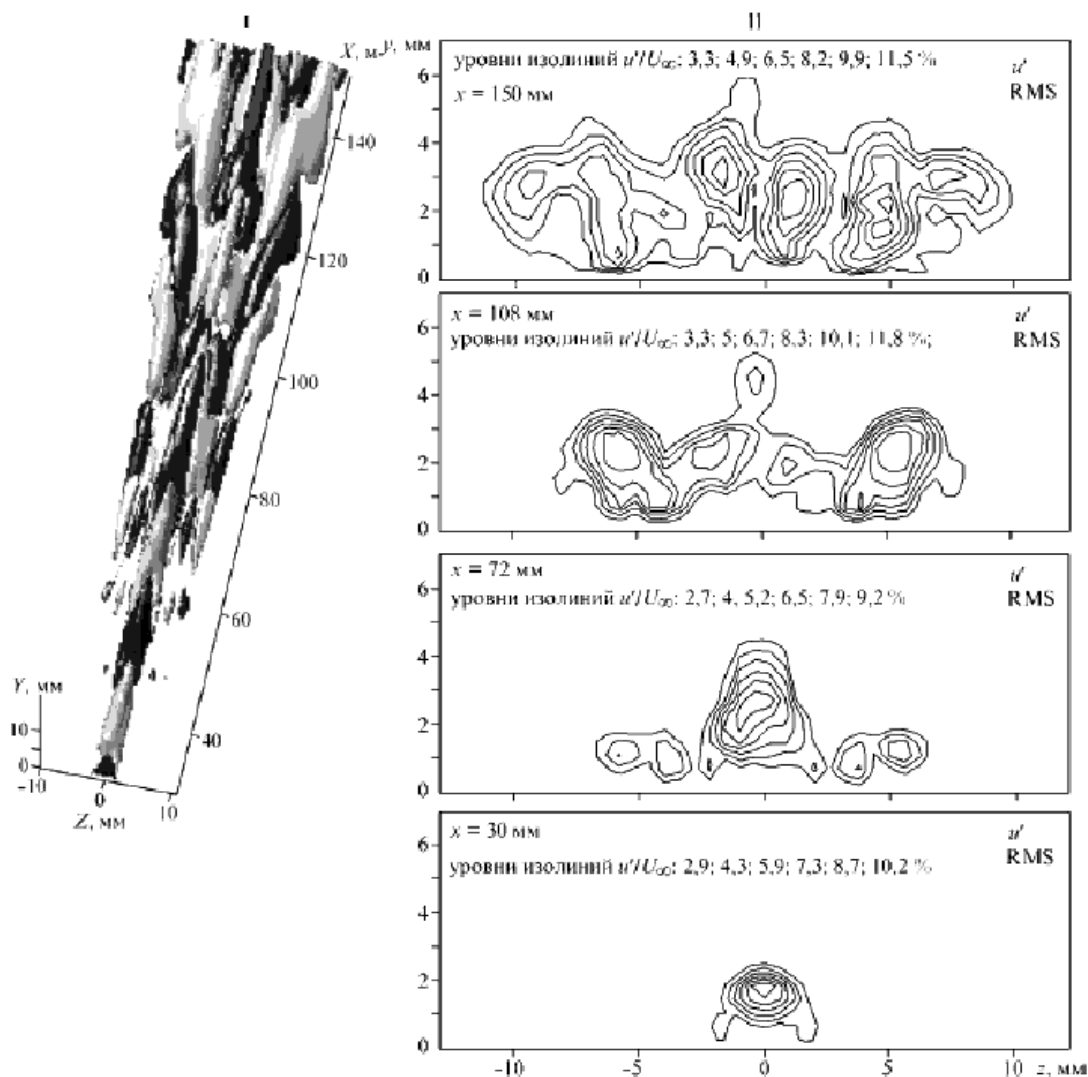


Рис. 26. Картины варикозного разрушения полосчатой структуры:
 I – пространственная картина развития возмущения (минимальный уровень пульсаций $1,3\%U_\infty$, темные полутона – превышение скорости, светлые – дефекты скорости);
 II – контурные диаграммы изолиний равных среднеквадратичных пульсаций скорости (RMS) на различных расстояниях вниз по потоку в плоскости yz

блюдается появление Λ -вихрей на значительно более ранней стадии развития возмущения. Таким образом, детальные термоанемометрические измерения нелинейной стадии развития варикозной моды неустойчивости показали, что вторичное высокочастотное разрушение полосчатой структуры, как и в случае синусоидального разрушения, связано с образованием Λ -структур.

В заключение следует отметить, что сценарий классического ламинарно-турбулентного перехода на нелинейной стадии этого процесса свя-

зан с трехмерным искажением двумерной волны Толлмина–Шлихтинга и образованием при этом трехмерных когерентных структур типа Λ -вихрей. Данные исследования показали, что существуют другие сценарии возникновения Λ -структур в пристенных сдвиговых течениях, в частности, в процессе вторичной высокочастотной неустойчивости полосчатых структур синусоидального и варикозного типов. Этот результат важен как для понимания механизма турбулизации течений, модулированных полосчатыми структурами, так и для

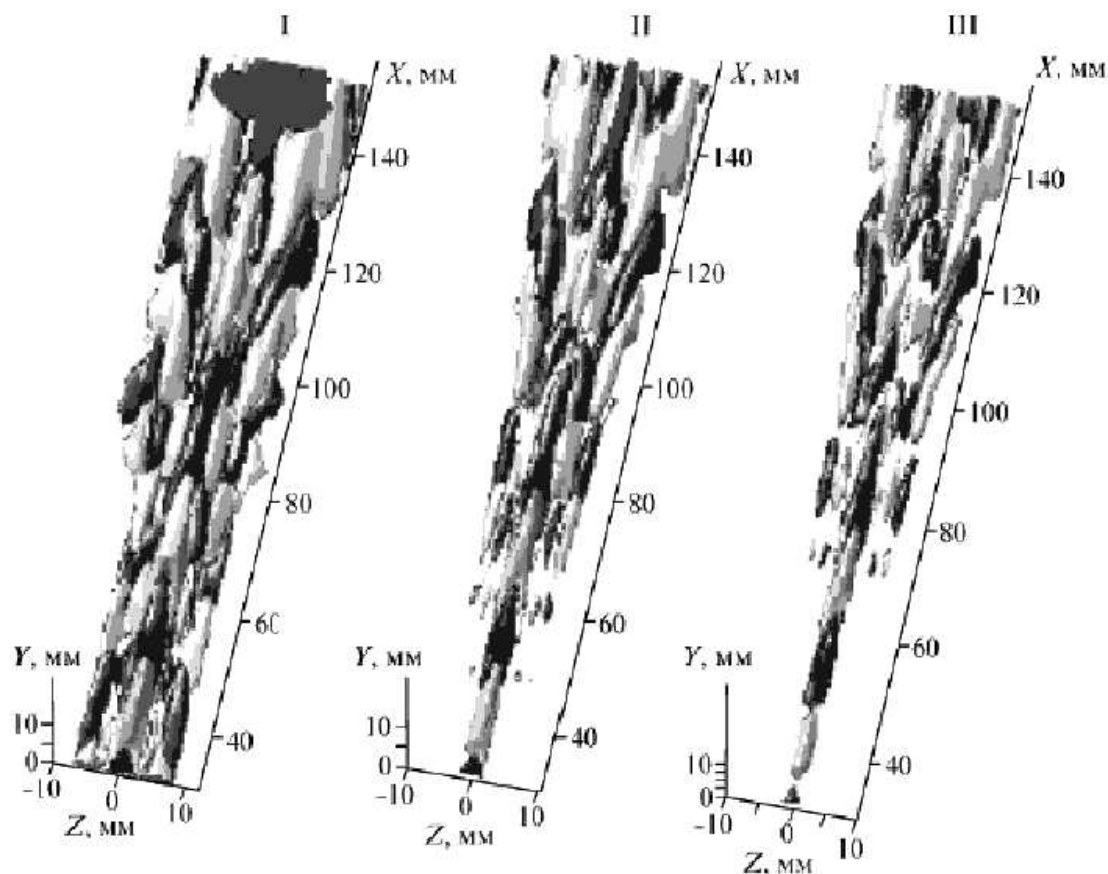


Рис. 27. Пространственные картины развития высокочастотного возмущения нелинейной стадии варикозной неустойчивости. Поверхности равных уровней амплитуды – 0,4%(I); 1,3%(II); 2,6% U_{∞} (III) (темные полутона – превышение скорости, светлые – дефект скорости)

понимания механизмов воспроизводства турбулентности в турбулентных течениях, где динамика когерентных структур вязкого подслоя играет кардинальную роль. В то же время, хорошо известны различные методы управления развитием когерентных структур типа Λ -вихрей, шпилькообразных вихрей, полосчатых структур и т. д. В ряде работ показано, что риблеты, локализованный и распределенный отсос, поперечные колебания стенки и т. д. оказывают существенное влияние на интенсивность когерентных структур, что может быть использовано для управления как синусоидальной, так и варикозной модами неустойчивости.

ВЫВОДЫ

В пограничном слое при ламинарно-турбулентном переходе, кроме образования Λ -структур на нелинейной стадии при опрокидывании двумерной

волны, могут существовать нелинейные механизмы синусоидальной и варикозной мод неустойчивости продольных полосчатых структур. При этом на основании экспериментальных исследований этой стадии обеих мод неустойчивости можно сделать следующие основные выводы.

1. Вторичная высокочастотная неустойчивость полосчатой структуры синусоидального и варикозного типов на нелинейной стадии приводит к мультиплицированию новых полосчатых структур вниз по потоку.
2. Механизм нелинейного разрушения полосчатой структуры через процесс развития на ней вторичного возмущения связан с образованием когерентных структур типа Λ -вихрей как для синусоидальной, так и варикозной мод неустойчивости.
3. Показано, что Λ -вихри множатся в трансверсальном направлении при эволюции возмущения вниз по потоку.
4. На скользящем крыле варикозная неустойчи-

вость может существовать, быстро трансформируясь под воздействием вторичного среднего течения в суперпозицию структур синусоидальной и варикозной мод неустойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Грант N 02-01-00006), Президента РФ (Грант N НШ-964.2003.1) и INTAS (проект 00-00232).

1. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. – Новосибирск: Наука, 1982. – 151 с.
2. Козлов В. В., Грек Г. Р., Лефдаль Л. Л., Чернорай В. Г., Литвиненко М. В. Роль продольных локализованных структур в процессе перехода к турбулентности в пограничных слоях и струях (Обзор) // ПМТФ. – 2002. – Т. 43, N 2. – С. 62–76.
3. Литвиненко М. В., Козлов В. В., Козлов Г. В., Грек Г. Р. Влияние продольных полосчатых структур на процесс турбулизации круглой струи // ПМТФ. – 2004. – Т. 45, N 3. – С. 50–61.
4. Литвиненко Ю. А., Грек Г. Р., Козлов В. В., Лефдаль Л., Чернорай В. Г. Экспериментальное исследование варикозной неустойчивости полосчатой структуры в пограничном слое скользящего крыла // Теплофизика и аэромеханика. – 2004. – Т. 11, N 1. – С. 1–10.
5. Acarlar M. S., Smith C. R. A study of hairpin vortices in a laminar boundary layer Pt 1 // J. Fluid Mech. – 1987. – Vol. 175. – P. 1–41.
6. Adrian R. J., Meinhart C. D., Tomkins C. D. Vortex organization in the outer region of the turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. – 2000. – Vol. 422. – P. 1–23.
7. Asai M., Minagawa M., Nishioka M. The stability and breakdown of near-wall low-speed streak // J. Fluid Mech. – 2002. – Vol. 455. – P. 289–314.
8. Bippes H. Experimentelle Untersuchung des laminar-turbulenten Umschlags an einer parallel angestromten konkaven Wand, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse // Jahrgang 1972. – 3 Abhandlung. – (also NASA-TM-72243, March 1978). – P. 103–180.
9. Boiko A. V., Grek G. R., Dovgal A. V., Kozlov V. V. The Origin of Turbulence in Near-Wall Flows // Berlin. – et al.: Springer-Verlag. – 2002. – P. 1–263.
10. Bottaro A., Klingmann B. G. B. On the linear breakdown of Goertler vortices // Europ. J. Mech. B/Fluids. – 1996. – Vol. 15, N 3. – P. 301–330.
11. Brandt L., Henningson D. S. Transition of streamwise streaks in zero-pressure-gradient boundary layers // J. Fluid Mech. – 2002. – Vol. 472. – P. 229–261.
12. Floryan J. M. On the Goertler Instability of Boundary Layers // Technical Report of National Aerospace Laboratory. – TR-1120. – 1991. – P. 1–45.
13. Grek G. R., Kozlov V. V., Katasonov M. M., Chernorai V. G. Experimental study of a Λ -structure and its transformation into the turbulent spot // Current Sci. – 2000. – Vol. 79, N 6. – P. 781–789.
14. Haidary H. A., Smith C. R. The generation and regeneration of single hairpin vortices // J. Fluid Mech. – 1994. – Vol. 227. – P. 135–151.
15. Hamilton H., Kim J., Waleffe F. Regeneration of near-wall turbulence structures. – J. Fluid Mech: 1995, Vol. 287. – 317 с.
16. Ito A. Breakdown structure of longitudinal vortices along a concave wall // J. Japan Soc. Aero. Space Sci. – 1985. – Vol. 33. – P. 166–173.
17. Jimenez J., Moin P. The minimal flow unit in near-wall turbulence // J. Fluid Mech. – 1991. – Vol. 225. – P. 213–226.
18. Kachanov Y. S. On a universal mechanism of turbulence production in wall shear flows // Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. Vol. 86. Recent Results in Laminar-Turbulent Transition. – Berlin et al.: Springer-Verlag. – 2003. – P. 1–12.
19. Kawahara G., Jimenez J., Uhlmann M., Pinelli A. The instability of streaks in near-wall turbulence // Center for Turbulence Research. – Annual Research Briefs. – 1998. – P. 155–170.
20. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M. The three-dimensional nature of boundary-layer instability // J. Fluid Mech. – 1962. – Vol. 12. – P. 1–34.
21. Konishi Y., Asai M. Experimental investigation of the instability of spanwise-periodic low-speed streaks in a laminar boundary layer // Japan Fluid Mech. J. – 2004. – N 02-1257. – P. 55–67.
22. Li F., Malik M. R. Fundamental and subharmonic secondary instabilities of Goertler vortices // J. Fluid Mech. – 1995. – Vol. 82. – P. 255–290.
23. Panton R. L. Overview of the self-sustaining mechanisms of wall turbulence // Progress in Aerospace Sci. – 2001. – N 37. – P. 341–383.
24. Pratt P. R., Chernoray V. G., Bakchinov A. A., Loefeldahl L. A quantitative flow visualization of a point source disturbance in a swept wing boundary layer // Boundary Layer Transition in Aerodynamics. – Book of abstracts EUROMECH Colloquium 423 Stuttgart. – 2001.
25. Reuter J., Rempfer D. A hybrid spectral/finite-difference scheme for the simulation of pipe-flow transition // Laminar-Turbulent Transition / Eds. H. Fasel, W.S. Saric. – Berlin et al.: Springer-Verlag. – 2000. – P. 383–390.
26. Rist U., Moeller K., Wagner S. Visualization of late-stage transitional structures in numerical data using vortex identification and feature extraction // Proc. 8th Intern. Symp. Flow Visualization. Sorrento. – 1998. – Pap. N 103.
27. Robinson S. K. The kinematics of turbulent boundary layer structure // NASA. – TM 103859, 1991.
28. Saric W. S., Kozlov V. V., Levchenko V. Ya. Forced and unforced subharmonic resonance in boundary layer transition // AIAA. – Pap. 84.0007. – 1984.
29. Schoppa W., Hussain F. Genesis and dynamics of coherent structures in near-wall turbulence: A new look // Self-sustaining Mechanisms of Wall Turbulence / Ed. R.L. Panton. – Southampton: Computational Mechanics. – 1997.
30. Skote M., Haritonidis J. H., Henningson D. S. Vari-cose instabilities in turbulent boundary layers // Physics of Fluids. – 2002. – Vol. 4, N 7. – P. 2309–2323.
31. Waleffe F. On a self-sustaining process in shear flows // Phys. Fluids. – 1997. – Vol. 9. – P. 883–896.
32. Zhou J., Adrian R. J., Balachandar S., Kendal T. M. Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices in channel flow // J. Fluid Mech. – 1999. – Vol. 387. – P. 353–396.