

УДК 532.528

## МЕТОД РАСЧЕТА КАВИТАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ В ВИХРЕВОМ НАБЕГАЮЩЕМ ПОТОКЕ

Ю. Н. САВЧЕНКО, Ю. А. СЕМЕНОВ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 19.03.2005*

Предложен численно-аналитический метод расчета кавитационного обтекания криволинейного контура произвольно завихренным набегающим потоком. Завихренность, распределенная в потоке непрерывно, заменяется дискретной, сосредоточенной на линиях тока, а течение в каналах, образованных линиями тока, считается безвихревым. Получены аналитические решения для безвихревого течения в каналах и кавитационного обтекания контура струей конечной ширины, связанные между собой граничными условиями, вытекающими из условий взаимодействия. Численная процедура основывается на методе последовательных приближений и применена для анализа влияния градиента скорости в пограничном слое на параметры кавитационного течения. Показано, что при заданной длине каверны с увеличением толщины пограничного слоя число кавитации и коэффициент сопротивления существенно уменьшаются.

Запропоновано чисельно-аналітичний метод розрахунку кавітаційного обтікання криволінійного контура довільно завихреним набігаючим потоком. Завихрилість, розподілена у потоці безперервно, замінюється дискретною, зосередженою на лініях струму, а течія в каналах, утворених лініями струму, вважається безвихревою. Одержані аналітичні рішення для безвихревої течії в каналах і кавітаційного обтікання контура струменем кінцевої ширини, зв'язані між собою граничними умовами, витікаючими з умов взаємодії. Чисельна процедура ґрунтується на методі послідовних наближень і застосована для аналізу впливу градієнта швидкості в приграничному шарі на параметри кавітаційної течії. Показано, що при заданій довжині каверни із збільшенням товщини граничного шару число кавітації і коефіцієнт опору істотно зменшуються.

A numerical-and-analytical method for solving cavity flows in a whirling incidence flow is proposed. The continuous vorticity arbitrarily displayed in the flow field is replaced by discrete vortex lines coinciding with stream lines. The flow between these lines is assumed to be vortex free. The problems of the flow in channels formed by stream/vortex lines and the problem of the cavity flow in a jet of a finite width connected each other by the derived interaction conditions are solved by using complex variable theory. The numeric procedure is based on the method of successive approximations and adopted to investigate the effect of the velocity gradient in a boundary layer on parameters of the cavity flow. The presented calculations show that, at some fixed cavity length, the cavity number and drag coefficient decreases with the increase of the boundary layer width.

### ВВЕДЕНИЕ

Неравномерный набегающий поток формируется в результате проявления вязкости жидкости и обладает завихренностью, интенсивность которой возрастает с увеличением градиента скорости, что имеет место в пограничном слое обтекаемого тела. В некоторых случаях размеры области завихренности могут быть соизмеримы либо превосходить размеры обтекаемого тела. В этом случае требуется учитывать влияние завихренности набегающего потока на гидродинамические характеристики кавитационного течения.

Теоретическое изучение кавитационных течений в завихренном набегающем потоке – достаточно трудная задача, так как течение не является потенциальным, и применение известных методов расчета кавитационных течений, основанных на теории потенциала и теории аналитических функций, не представляется возможным. Исключение составляет класс задач с постоянной завихренностью набегающего потока. Предположение о постоянной завихренности потока упрощает поста-

новку задачи и позволяет рассмотреть течение в виде суперпозиции потенциального безвихревого течения и течения, вызванного одиночным вихрем. В такой постановке задачи завихренность течения проявляется в записи граничных условий для потенциальной составляющей течения и позволяет использовать математический аппарат решения обратных краевых задач, в значительной степени базирующийся на теории функций комплексного переменного. Теоретическому исследованию влияния постоянной завихренности потока на геометрические и гидродинамические характеристики течения посвящены работы [1–7]. В большинстве работ авторы рассматривают линейную постановку задачи и формулируют смешанную краевую задачу для полуплоскости, решение которой находится с использованием формулы Келдыша–Седова [8]. Задача сводится к решению интегрального уравнения для функции, определяющей форму каверны и входящей в граничные условия. В работах [1, 2] рассмотрена линейная задача кавитационного обтекания клина линейно скошенным потоком жидкости на бесконечности

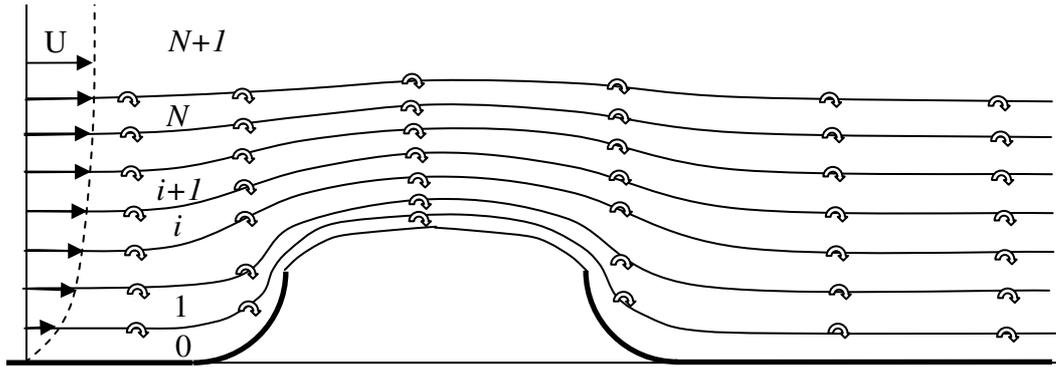


Рис. 1. Физическая модель кавитационного обтекания криволинейного контура тела вихревым потоком

по схеме Тулина. Используя данный подход, в работах [3–6] рассмотрены решения различных задач со свободной границей. Решение нелинейной задачи струйного обтекания клина равномерно завихренным потоком представлено в работе [7]. Численные результаты, полученные для линейной и нелинейной постановки задачи, показывают, что равномерная завихренность набегающего потока оказывает слабое влияние на коэффициент сопротивления, однако существенным образом влияет на размеры каверн.

В реальных течениях завихренность на бесконечности вверх по потоку существенно неравномерна. Например, в турбулентном пограничном слое завихренность изменяется от нуля на внешней границе пограничного слоя до некоторого максимального значения вблизи тела. Предельными случаями очень малой и очень большой толщины пограничного слоя являются равномерные течения, однако с разными значениями скорости набегающего потока. Поэтому, если толщина пограничного слоя соизмерима с размерами тела, то можно ожидать существенного влияния завихренности на гидродинамические характеристики кавитационного течения.

Для набегающего потока, завихренного неравномерно, теоретические исследования в литературе не представлены. В настоящей работе предложена физическая модель течения, в которой непрерывно распределенная в потоке завихренность заменяется дискретной и сосредоточенной на линиях тока. В такой модели течение в канале, образованном линиями тока, становится безвихревым, а профиль скорости набегающего потока меняется ступенчато от слоя к слою. При увеличении числа рассматриваемых слоев величина разрыва скорости уменьшается и течение в пределе стремится к непрерывно завихренному. Такая физическая мо-

дель позволяет, с одной стороны, использовать хорошо разработанные методы теории потенциальных течений, с другой стороны – количественно оценить степень влияния завихренности и ее неравномерность на гидродинамические и геометрические параметры течения. В качестве элементов, составляющих полное решение задачи, используются решения задач кавитационного обтекания криволинейного препятствия струей конечной ширины и течения струи вдоль криволинейной поверхности.

## 1. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ

Поток завихренной идеальной жидкости рассматривается в виде дискретных слоев, границами которых являются линии тока либо твердая граница. Профиль скорости набегающего потока в каждом слое принимается равномерным и меняющимся дискретно от слоя к слою. На границе двух слоев имеет место разрыв скорости, соответствующий изменению среднеинтегральной скорости в набегающем вихревом потоке, а давление меняется непрерывно. Так как завихренность набегающего потока в слое отсутствует, а жидкость считается идеальной, то для расчета течения в каждом слое можно применить модель безвихревого течения идеальной жидкости. Таким образом, непрерывная завихренность набегающего потока заменяется дискретными вихревыми линиями, совпадающими с линиями тока и образующими границы слоев, как показано на рис. 1. С увеличением числа слоев  $N$ , что равнозначно уменьшению ширины каждого слоя  $\delta_i$ ,  $i = 0, N$ , скачок изменения скорости на границе слоя уменьшается, то есть в пределе при  $N \rightarrow \infty$  течение будет соответствовать заданному течению с непрерывной завихренностью. Сделанные предположения сводят задачу

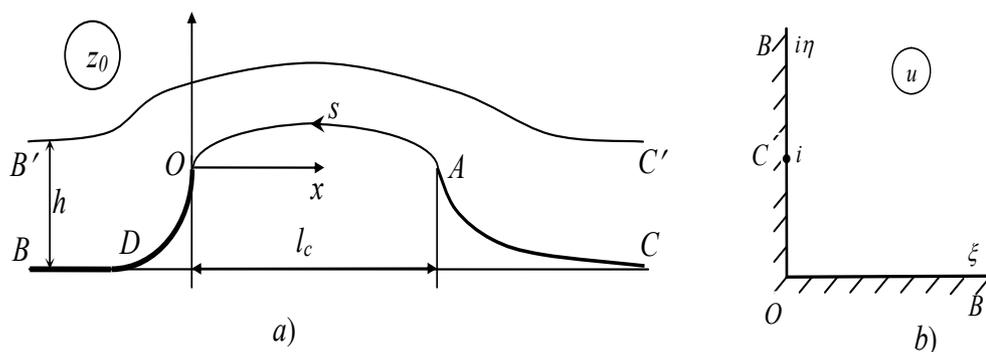


Рис. 2. Схема кавитационного обтекания криволинейного контура струей конечной ширины: *a* – физическая область течения; *b* – область параметра

кавитационного обтекания тела произвольно завихренным потоком к следующим трем типам задач безвихревого течения идеальной жидкости.

1. Кавитационное обтекание тела струей конечной ширины с заданным распределением давления на внешней границе (слой “0” на рис. 1).
2. Течение струи конечной ширины вдоль криволинейной поверхности с заданным распределением давления на свободной границе (слой 1 –  $N$ ).
3. Течение неограниченного потока вдоль заданной криволинейной поверхности (слой  $N + 1$ ).

Из решения первой задачи, соответствующей нулевому кавитационному слою, можно определить форму внешней границы струи по заданному распределению давления на ней. Эта граница рассматривается как твердая поверхность для слоя  $i = 1$ . Решая задачу 2 для  $i$ -го слоя, можно установить форму ее внешней (свободной) границы, которая рассматривается как твердая граница для  $(i + 1)$ -го слоя. Решая задачу 3 для  $(N + 1)$ -го слоя полубесконечной ширины, можно найти распределение скорости на твердой поверхности, а соответственно и распределение давления на ней. Это давление должно совпадать с распределением давления на свободной границе для слоя  $N$ . Двигаясь в обратном направлении от внешнего слоя к нулевому слою кавитационного течения, можно получить распределение давления на свободных границах в каждом слое. Последовательный расчет в прямом и обратном направлении повторяется до достижения сходимости итерационного процесса. Нетрудно заметить, что эффективность предложенного численного метода зависит от разработки

эффективных в вычислительном отношении решений задач 1 – 3. Следуя методам Жуковского [9] и Чаплыгина [10], решение перечисленных выше задач ищется путем построения выражения комплексной скорости  $dW/dz$  и производной комплексного потенциала  $dW/du$  в области параметрического переменного  $u$ . Если эти выражения известны, то зависимость между областью параметра и физической плоскостью течения определяется отображающей функцией

$$z(u) = \int_0^u \frac{dW}{du} / \frac{dW}{dz} du + z_0, \quad (1)$$

где  $z_0$  – координата точки в физической плоскости, в которую отображается точка  $u = 0$ . Методы Жуковского и Чаплыгина позволяют построить выражения комплексной скорости и производной комплексного потенциала для задач стационарного обтекания тел с прямолинейными границами и постоянной скоростью на свободной границе. Рассматриваемые в данной работе задачи несколько сложнее, так как твердая граница криволинейна, а на внешней (свободной) границе модуль скорости (давление) не является постоянной величиной. Метод построения выражения комплексной скорости, учитывающий данные особенности, представлен в работе [11].

## 2. КОМПЛЕКСНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

### 2.1. Кавитационное обтекание криволинейного контура струей конечной ширины

На рис. 2, *a* представлена схема течения на “нулевом” кавитационном слое. Для упрощения записи номер слоя при переменных опущен. Струя идеальной жидкости шириной  $h$  и имеющая скорость на бесконечности  $v_\infty$ , направлена вдоль твердой

границы  $BDO$ . На внешней границе струи давление меняется в соответствии с заданной функцией  $p(s)$ , где  $s$  – длина дуги вдоль контура. Каверна образуется в точке  $O$  и замкнута на криволинейный контур  $AC$ , на котором задан модуль скорости  $v^*(s)$ . Форма контура замыкания каверны  $AC$ , как и форма внешней границы струи, неизвестна и должна быть определена из решения задачи. В качестве области параметра выбран первый квадрант, действительная ось которого соответствует твердой границе  $BDO$ . Интервал мнимой оси  $0 < \eta < 1$  соответствует контуру замыкания каверны  $AC$ , а интервал  $1 < \eta < \infty$  – контуру внешней границы струи  $B'C'$ . Соответствие точек области параметра и физической плоскости ясно из рис. 2. Форма границы  $BDO$  задана функцией угла наклона касательной  $\beta(s)$ . На верхней границе  $B'C'$  модуль скорости  $v^{up}(s)$  изменяется в соответствии с заданным давлением  $p(s)$ , а на контуре каверны модуль скорости  $v_0$  постоянен и определяется числом кавитации  $\sigma_0$ :

$$v_0 = v_\infty \sqrt{1 + \sigma_0}, \quad \sigma_0 = \frac{2(p_\infty - p_c)}{\rho u_\infty^2} = \sigma v_\infty^2, \quad (2)$$

где  $v_\infty = u_\infty/U$  – безразмерная скорость набегающего потока;  $\sigma$  – число кавитации, определенное по скорости внешнего безвихревого течения  $U$ ;  $p_c$  – давление в каверне. Давление на бесконечности справа и слева одинаково, поэтому скорость вдоль контура  $AC$  изменяется от значения  $v_0$  в точке  $A$  до значения  $v_\infty$  в точке  $C$ .

Выражение комплексной скорости, удовлетворяющее заданным граничным условиям, имеет вид [11]:

$$\frac{dw}{dz} = v_0 \exp \left[ -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d \eta} \ln \left( \frac{i \eta - u}{i \eta + u} \right) d \eta - \right. \quad (3)$$

$$\left. -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \beta}{d \xi} \ln \left( \frac{\xi - u}{\xi + u} \right) d \xi - i \beta_0 \right],$$

где  $\beta_0$  – угол наклона вектора скорости в точке  $O$ ;  $v(\eta)$  – модуль скорости вдоль свободных границ  $OC$  и  $C'B'$ . Подставляя в выражение (3)  $u = i \eta$ , можно видеть, что вдоль мнимой оси области параметра  $|dw/dz| = v(\eta)$ , где  $v(\eta) = v[s(\eta)]$  – заданная функция модуля скорости. Подставляя в (3)  $u = \xi$ , можно видеть, что  $\arg(dw/dz) = -\beta(\xi)$ , где  $\beta(\xi) = \beta[s(\xi)]$  – заданный угол наклона касательной к твердой границе  $OB$ . Функции  $s = s(\eta)$  и  $s = s(\xi)$  определены ниже через отображающую функцию  $z = z(u)$ .

Комплексный потенциал течения имеет логарифмические особенности в точке  $C$  ( $u = i$ ), соответствующей стоку конечного расхода  $q = v_\infty h$ , и в точке  $B$  ( $u = \infty$ ), соответствующей источнику такой же интенсивности. Применяя метод Чаплыгина для построения производной комплексного потенциала, можно получить следующие выражения:

$$\frac{dw}{du} = M \frac{u}{u^2 + 1}, \quad w(u) = \frac{q}{\pi} \ln(u^2 + 1), \quad (4)$$

где  $M = 2q/\pi$  – масштабный коэффициент. Подставляя выражения (3) и (4) в (1), можно найти производную отображающей функции  $z = z(u)$ , а также функции  $s = s(\eta)$  и  $s = s(\xi)$ :

$$\frac{dz}{du} = \frac{M}{v_0} \frac{u}{u^2 + 1} \exp \left[ \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d \eta} \ln \left( \frac{i \eta - u}{i \eta + u} \right) d \eta \right] \times$$

$$\times \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \beta}{d \xi} \ln \left( \frac{\xi - u}{\xi + u} \right) d \xi + i \beta_0 \right], \quad (5)$$

$$s(\eta) = - \int_0^\eta \left| \frac{dz}{du} \right|_{u=i \eta} d \eta, \quad s(\xi) = - \int_0^\eta \left| \frac{dz}{du} \right|_{u=\xi} d \xi. \quad (6)$$

Координата длины дуги вдоль контура возрастает при движении вдоль контура против часовой стрелки. Функции  $v(\eta)$  и  $\beta(\xi)$  находятся из решения интего-дифференциальных уравнений

$$\frac{d \ln v}{d \eta} = \frac{d \ln v}{ds} \frac{ds}{d \eta}, \quad \frac{d \beta}{d \xi} = \frac{d \beta}{ds} \frac{ds}{d \xi}. \quad (7)$$

Система интего-дифференциальных уравнений (7) решается методом последовательных приближений,  $k+1$  итерация определяется выражениями

$$\left( \frac{d \ln v}{d \eta} \right)^{k+1} = \frac{d \ln v}{ds} \left( \frac{ds}{d \eta} \right)^k,$$

$$\left( \frac{d \beta}{d \xi} \right)^{k+1} = \frac{d \beta}{ds} \left( \frac{ds}{d \xi} \right)^k,$$

где  $v(s)$  и  $\beta(s)$  – заданные функции.

Для численного решения интего-дифференциальных уравнений на действительной оси области параметра задаются фиксированные точки  $\xi_j$ ,  $j = 1, K_\xi$ , а на мнимой оси – фиксированные точки  $\eta_j$ ,  $j = 1, K_\eta$ . На каждом интервале  $(\xi_{j-1}, \xi_j)$  и  $(\eta_{j-1}, \eta_j)$  производные  $d\beta/d\xi$  и  $d \ln v/d\eta$  интерполируются линейно, что позволяет получить аналитические выражения интегралов, входящих в

выражения (3) и (5), и существенно сократить объем вычислений.

Решение задачи кавитационного течения в рамках модели идеальной жидкости не единственно в силу парадокса Бриллюэна. В используемой схеме замыкания каверны это проявляется в том, что функция модуля скорости  $v^*(s)$ , определяющая форму контура замыкания каверны, может быть выбрана произвольным образом. Выбирая функцию  $v^*(s)$ , симметричную относительно половины длины каверны,  $s = -l_c/2$ , можно получить симметричную картину течения. Для этого значения функции  $v^*(s)$  определяются путем вычисления модуля скорости на твердой границе  $ODB$  на каждой итерации:

$$v^*(s(\eta) - s_c) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{u=\xi}. \quad (8)$$

На рис. 3 представлены расчет обтекания дуги окружности с углом  $\pi/2$  струей ширины  $H/L = 1$  (сплошная линия) и  $H/L = 2$  (штриховая линия), где  $L$  – длина дуги, принятая в качестве характерного линейного размера. Давление на внешней границе струи постоянно и соответствует числу кавитации  $\sigma = 1.5$ . Как видно из рисунка, распределение скорости на контуре замыкания, заданное выражением (8), приводит к симметричному относительно половины длины каверны течению, то есть контур замыкания также имеет форму дуги окружности. Аналогично можно видеть, что с увеличением ширины струи размеры каверны увеличиваются.

На рис. 4 представлены зависимости числа кавитации от длины каверны для различных значений ширины струи. При фиксированной длине каверны число кавитации увеличивается с увеличением ширины струи.

### 2.2. Течение струи конечной ширины вдоль криволинейной поверхности

Верхнюю границу струи можно рассматривать как твердую границу для следующего в поперечном направлении слоя. Скорость на бесконечности в слое  $i$  может быть не равна скорости на бесконечности в нижнем слое  $i - 1$ . Это позволяет учесть неравномерность набегающего потока. На рис. 5 приведена схема течения струи вдоль криволинейной поверхности. Нижняя граница для слоя  $i$  рассматривается как твердая криволинейная граница, форма которой определяется из решения задачи для слоя  $i - 1$ . На верхней границе задается модуль скорости (давление). Обозначая

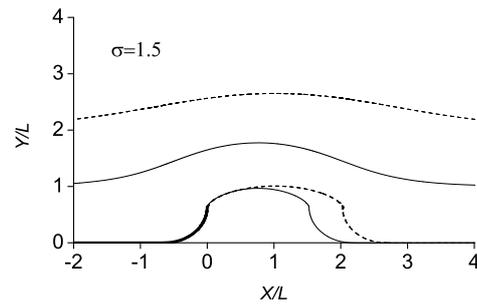


Рис. 3. Контурсы каверны и внешней границы струи при обтекании дуги окружности с углом  $\delta = \pi/2$  струей ширины  $h/L = 1$  (сплошная линия) и  $h/L = 2$  (штриховая линия)

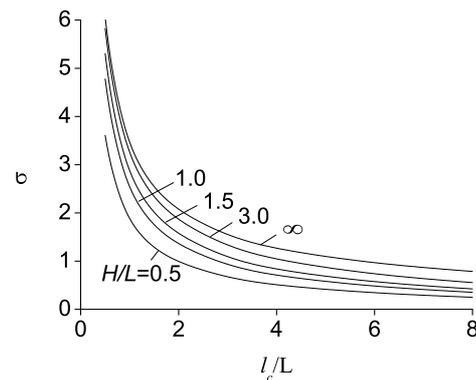


Рис. 4. Зависимости числа кавитации от длины каверны для струй различной ширины

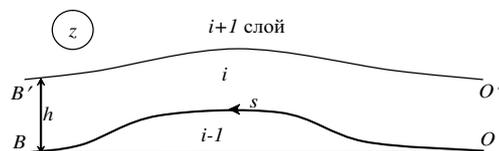


Рис. 5. Схема течения струи конечной ширины вдоль криволинейной поверхности

точками  $O$  и  $B$  бесконечно удаленную точку течения справа и слева соответственно и применяя метод построения выражения комплексной скорости [11], можно получить выражение комплексной скорости для слоя  $i$ :

$$\frac{dw}{dz} = v_\infty \exp \left[ -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v^{up}}{d\eta} \ln \left( \frac{i\eta - u}{i\eta + u} \right) d\eta \right] \times \exp \left[ -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\beta^{lw}}{d\xi} \ln \left( \frac{\xi - u}{\xi + u} \right) d\xi \right], \quad (9)$$

где  $v_\infty = u_\infty/U$  – безразмерная скорость на бесконечности справа;  $v^{up}(\eta)$  и  $\beta^{lw}(\xi)$  – модуль скорости на верхней границе и угол наклона касательной к оси  $X$  на нижней границе слоя  $i$ , как функции параметрического переменного (рис. 2, б). В выражении (9) и далее номер слоя  $i$  не приводится.

Комплексный потенциал течения имеет логарифмические особенности в точках  $O$  ( $u = 0$ ) и в точке  $B$  ( $u = \infty$ ), соответствующие стоку и источнику конечного расхода  $q = v_\infty h$ . Применяя метод Жуковского для построения производной комплексного потенциала, можно получить следующее выражение:

$$w(u) = \frac{2q}{\pi} \ln(u). \quad (10)$$

Функции  $v^{up}(\eta)$  и  $\beta^{lw}(\xi)$  определяются из решения интегро-дифференциальных уравнений, вид которых совпадает с уравнениями (7). Пространственная координата  $s = s(\xi)$  вдоль твердой поверхности и вдоль свободной границы  $s = s(\eta)$  определяется выражениями (6), в которых производная отображающей функции с учетом выражений (9) и (10) принимает вид

$$\frac{dz}{du} = \frac{2q}{\pi v_\infty} \exp \left[ \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v^{up}}{d\eta} \ln \left( \frac{i\eta - u}{i\eta + u} \right) d\eta \right] \times \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\beta^{lw}}{d\xi} \ln \left( \frac{\xi - u}{\xi + u} \right) d\xi \right]. \quad (11)$$

Интегрируя выражение (11) вдоль мнимой оси области параметра, можно определить контур верхней границы струи на слое  $i$ .

### 2.3. Течение неограниченного потока вдоль заданной криволинейной поверхности

Если ширина струи  $h$  в предыдущей задаче стремится к бесконечности, то в бесконечно удаленной

точке будет находится источник бесконечного расхода. В этом случае, следуя методу Жуковского, можно получить выражение производной комплексного потенциала в виде

$$\frac{dw}{du} = Mu, \quad (12)$$

где  $M$  – масштабный коэффициент.

Выражение комплексной скорости можно получить из выражения (9), полагая, что скорость на свободной границе постоянна и равна скорости на бесконечности:

$$\frac{dw}{dz} = v_\infty \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\beta^{lw}}{d\xi} \ln \left( \frac{\xi - u}{\xi + u} \right) d\xi \right]. \quad (13)$$

Выражения (12) и (13) позволяют найти производную отображающей функции,  $dz/du$ , для течения неограниченного потока вдоль заданной криволинейной поверхности. Пространственная координата  $s = s(\xi)$  вдоль криволинейной поверхности определяется выражением (6), а функция  $\beta^{lw}(\xi)$  находится из решения интегро-дифференциального уравнения (7).

### 3. КАВИТАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ В НЕРАВНОМЕРНОМ НАБЕГАЮЩЕМ ПОТОКЕ

Профиль скорости неравномерного набегающего потока в безразмерном виде можно аппроксимировать функцией

$$v_\infty(y) = \frac{u_\infty(y)}{U} = \begin{cases} u_0 + (U - u_0) \left(\frac{y}{\delta}\right)^n, & y < \delta, \\ U, & y \geq \delta, \end{cases} \quad (14)$$

где  $U$  – скорость внешнего равномерного потенциального потока;  $\delta$  – толщина пограничного слоя;  $u_0$  – скорость вблизи твердой границы;  $n$  – формпараметр профиля скорости. Безразмерный расход и скорость набегающего потока для слоя  $i$  с учетом выражения (13) определяются выражениями

$$q_i = \frac{1}{U} \int_{y_i}^{y_{i+1}} u_\infty(y) dy, \quad v_{\infty i} = \frac{q_i}{h_i},$$

где  $h_i$  – ширина слоя  $i$  на бесконечности.

Условия взаимодействия верхней границы слоя  $(i - 1)$  и нижней границы слоя  $i$  включают равенство углов наклона векторов скорости и распределения давления вдоль границы, то есть

$$\gamma_{i-1} = \beta_i, \quad p_{i-1}^{up} = p_i^{lw}, \quad (15)$$

где  $\gamma_{i-1} = \arg\left(\frac{dz}{d\eta}\right)_{i-1}$  – угол наклона свободной границы слоя  $i - 1$ ;  $\beta_i$  – угол наклона твердой границы слоя  $i$ ;  $p_{i-1}^{up}, p_i^{lw}$  – давления при подходе к границе из слоя  $i$  и  $i - 1$  соответственно. Записывая интеграл Бернулли для соседних слоев,

$$p_\infty + \rho \frac{v_\infty^2(i-1)}{2} = p_{i-1}^{up} + \rho \frac{v_{i-1}^2}{2}, p_\infty + \rho \frac{v_\infty^2 i}{2} = p_i^{lw} + \rho \frac{v_i^2}{2},$$

из условия (13) можно найти связь между скоростью на верхней границе слоя  $(i - 1)$  и скоростью на нижней границе в слое  $i$ :

$$v_{i-1}^{2 up} = v_i^{2 lw} + v_\infty^2(i-1) - v_\infty^2 i. \quad (16)$$

Для равномерного набегающего потока  $v_{\infty i-1} = v_{\infty}$ , следовательно,  $v_{i-1}^{2 up} = v_i^{2 lw}$ . Таким образом, при подходе к границе сверху и снизу имеет место равенство как давлений, так и скоростей. С целью тестирования программы расчета и оценки точности вычислений на рис. 6 приведены контур внешней границы потока и число кавитации при обтекании четверти дуги окружности однородным потоком шириной  $h/L = 3$  для двух вариантов расчета. Сплошными линиями показаны границы (линии тока) совместного расчета двух слоев; пунктирная линия соответствует расчету для одного слоя. Длина контура каверны задана  $s_c/L = 2$ . Количество точек дискретизации верхней и нижней границы струи принималось одинаковым и равным  $K_\xi = K_\eta = 400$ . Полученные значения числа кавитации в обоих вариантах отличаются менее чем на 0.002, а контуры внешней границы потока практически совпадают.

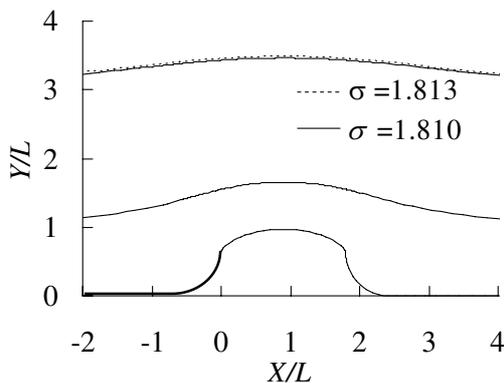


Рис. 6. Линии тока при обтекании дуги окружности потоком шириной  $h/L = 3$ : сплошные линии – совместный расчет двух слоев; пунктир – верхняя граница потока для одного слоя

Эффективность предложенного численно-аналитического метода определяется требуемой

степенью дискретизации толщины пограничного слоя, при которой выбор числа слоев  $N$  потенциального течения не оказывает существенного влияния на результаты расчетов.

На рис. 7 показано влияние числа слоев  $N$  на число кавитации при заданной длине контура каверны  $s_c/L = 2$  для различных значений толщины пограничного слоя. Можно видеть, что достаточно разделить пограничный слой на 3–4 подслоя потенциального течения, чтобы определить параметры течения, соответствующие предельному течению с непрерывным изменением скорости в пограничном слое. Также можно видеть, что увеличение толщины пограничного слоя не оказывает заметного влияния на требуемое число дискретизации.

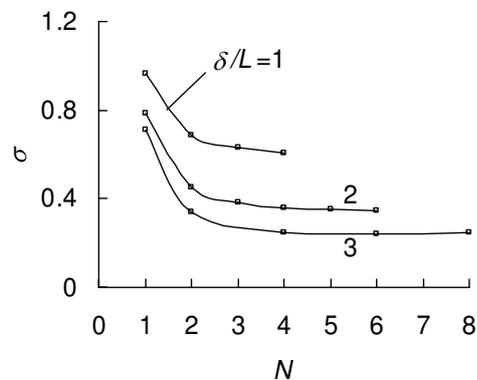
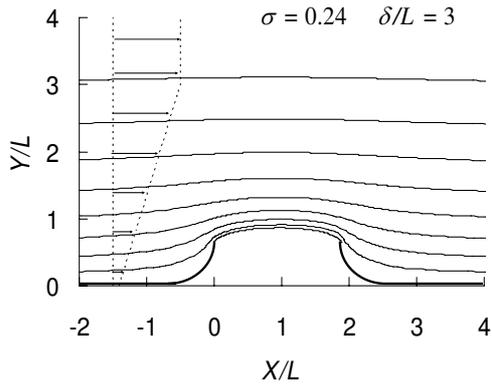


Рис. 7. Влияние степени дискретизации пограничного слоя на число кавитации при длине контура каверны  $s_c/L = 2$  для различной толщины пограничного слоя

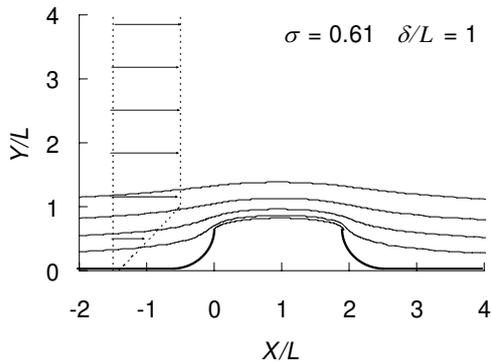
При фиксированной длине контура каверны с увеличением толщины пограничного слоя число кавитации, определенное по скорости внешнего равномерного потока, уменьшается. Это можно объяснить тем, что в соответствии с выражением (12) с увеличением толщины пограничного слоя уменьшается среднеинтегральная скорость и, следовательно, полное давление потока вблизи тела.

На рис. 8 показаны линии тока при кавитационном обтекании дуги окружности для двух значений толщины пограничного слоя. При толщине пограничного слоя  $\delta/L = 3$  и длине контура каверны  $s_c/L = 2$  расчетное значение числа кавитации  $\sigma = 0.24$ . При той же длине контура каверны и толщине пограничного слоя  $\delta/L = 1$  значение числа кавитации  $\sigma = 0.61$ .

Из уравнения Бернулли, записанного для “нулевого” кавитационного слоя и внешнего потенциального течения, можно найти коэффициент дав-



a



b

Рис. 8. Линии тока при длине контура каверны  $s_c/L = 2$  и относительной толщине пограничного слоя: а –  $\delta/L = 3$ ,  $\sigma = 0.24$ ; б –  $\delta/L = 1$ ,  $\sigma = 0.61$

ления на теле:

$$C_n = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = v_{\infty 0}^2 + \sigma - v^2,$$

где  $v_{\infty 0}$  и  $v$  – безразмерная скорость на бесконечности для “нулевого” слоя и на теле соответственно. Коэффициент сопротивления вычислялся по формуле

$$C_x = \frac{1}{h^*} \int_0^b C_n[s(\xi)] \sin \beta[s(\xi)] \frac{ds}{d\xi} d\xi, \quad (17)$$

где высота дуги окружности  $h^* = \int_0^L \sin \beta(s) ds$ ;  $b$  – координата действительной оси области параметра, соответствующая точке сопряжения дуги окружности с прямолинейной границей.

Влияние толщины пограничного слоя на число кавитации и коэффициент сопротивления показано на рис. 9. Можно видеть, что при толщине

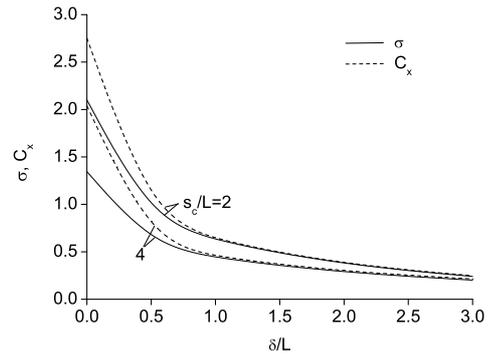


Рис. 9. Зависимости числа кавитации и коэффициента сопротивления от толщины пограничного слоя

пограничного слоя  $\delta/L > 0.5$ , вследствие малого вклада динамической составляющей полного давления, значения числа кавитации и коэффициента сопротивления практически совпадают.

Для достаточно толстого пограничного слоя скорости значения  $v_{\infty 0}$  и  $v$  намного меньше 1, что можно видеть также из рис. 8, а. В этом случае из выражения (15) следует, что коэффициент давления  $C_n \approx \sigma$ . При толщине пограничного слоя  $\delta \rightarrow 0$  значения числа кавитации и коэффициента сопротивления стремятся к соответствующим значениям для потенциального безвихревого обтекания дуги окружности.

#### 4. ВЫВОДЫ

Представлена физическая модель двумерного кавитационного обтекания тел потоком с произвольной завихренностью. Модель основана на замене непрерывно распределенной завихренности дискретной завихренностью, сосредоточенной на линиях тока. Это позволяет вместо решения уравнения Пуассона для области непрерывно завихренного течения решать уравнения Лапласа в подобластях безвихревого течения и воспользоваться для этого аппаратом теории функций комплексного переменного. В представленном численно-аналитическом методе, как составные элементы, использованы аналитические решения задач кавитационного течения в струе и течение струи вдоль криволинейной поверхности.

Метод позволяет получить количественную оценку влияния толщины пограничного слоя на параметры кавитационного течения. Показано, что увеличение толщины пограничного слоя приводит к существенному снижению числа кавита-

ции и коэффициента сопротивления тела при заданной длине каверны. При толщине пограничного слоя, большей высоты обтекаемого препятствия, значения числа кавитации и коэффициента сопротивления практически совпадают.

1. Котляр Л. М., Лазарев В. А. Кавитационное обтекание клина завихренным потоком // Труды семинара по краевым задачам.– Казан. гос. ун-т, Казань.– 1971.– С. 15-25.
2. Street R. L. A linearized Theory for Rotational Super-Cavitating Flow // J. of Fluid Mech.– 1963.– V. 17, part 4.– P. 513-545.
3. Васильев В.Н., Галанин А.В. Влияние завихренности потока на геометрические и гидродинамические характеристики кавитирующего клина // Струйные и кавитационные течения и современные вопросы теории управления.– Чуваш. ун-т. Чебоксары.– 1978.– С. 3–18.
4. Васильев В.Н. Кавитационное обтекание криволинейной дуги завихренным потоком // Нестационарное движение тел в жидкости.– Чуваш. ун-т. Чебоксары.– 1979.– С. 3-15.
5. Васильев В. Н. Кавитационное обтекание симметричных тел завихренным потоком // Динамика сплошной среды со свободными поверхностями.– Чуваш. ун-т. Чебоксары.– 1980.– С. 38-46.
6. Васильев В. Н. Кавитационное обтекание пластинки, перпендикулярной твердой стенке, завихренным потоком // Динамика сплошных сред с границами раздела.– Чуваш. ун-т. Чебоксары.– 1983.– С. 26-34.
7. Буров А. В. Струйное обтекание клина равномерно завихренным потоком // Гидродинамика больших скоростей.– Чуваш. ун-т. Чебоксары.– 1985.– С. 22-24.
8. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.– М.: Наука, 1980.– 448 с.
9. Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на известной линии тока // Матем. сборник.– 1890.– т. XV.
10. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости.– М.: Наука, 1979.– 536 с.
11. Семенов Ю.А. Комплексный потенциал нестационарного течения со свободной границей // Вестник Херсонского университета.– Херсон.– 2003, Том 2.– С. 384 - 387.