

УДК 532.527

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ

Т. П. КОНОВАЛЮК

Институт гидромеханики НАН Украины, г. Киев

Получено 19.04.2005

В рамках моментной модели второго порядка рассмотрена задача о взаимодействии двух плоских пятен одинаковой завихренности, помещенных в невязкую однородную безграничную жидкость. Проведено сравнение результатов с данными, полученными при моделировании данного течения методами точечных вихрей и методом контурной динамики. Определены границы применимости метода точечных вихрей и моментной модели второго порядка.

У рамках моментної моделі другого порядку розглянуто задачу про взаємодію двох плоских плям однакової завихреності, що розміщені в невязкій однорідній необмеженій рідині. Проведено порівняння результатів з даними, що отримані при моделюванні даної течії методами точкових вихорів та контурної динаміки. Визначені границі застосування методу точкових вихорів та моментної моделі другого порядку в даному випадку.

The problem of the interaction of two planar patches of equal vorticity embedded in the inviscid homogeneous unbounded liquid is considered in the framework of the second-order moment model. The comparison of results with the data obtained from modelling studied flow by means of point vortex model and method of contour dynamics are carried out. In this case the boundary of application of point vortex model and the second-order moment model is determined.

ВВЕДЕНИЕ

Исследования, выполненные во второй половине прошлого столетия, позволили установить, что процессы переноса таких физических величин, как масса, тепло, импульс, завихренность, в турбулентных слоях смешения осуществляются главным образом когерентными вихревыми структурами [1]. Когерентные структуры есть сконцентрированные, крупномасштабные массы жидкости, завихренность которых фазово скоррелирована по всему объему структуры. Данные структуры являются организованной компонентой завихренности в отличие от фазово случайной (т. е. некогерентной) компоненты. Несмотря на то, что когерентные вихревые структуры отвечают, в основном, за процессы переноса, они не обязательно обладают высокой кинетической энергией. Большая часть турбулентной кинетической энергии, как правило, сосредоточена в некогерентной турбулентности [1].

Когерентные структуры могут существовать изолировано в потоке (например, спиральный вихрь) или в соседстве с другими такими же структурами (например, вихревые кольца). Когерентные вихревые структуры пространственно не перекрываются: каждая из них имеет собственную границу, хотя смежные структуры могут быть связаны шнурами – областями слабой завихренности. Взаимодействие когерентных структур между собой осуществляется в соответствии с законом Био–Савара. В результате взаимодействия либо изменяются форма, характер движения и вращение структур (пятна находятся на определенном рас-

стоянии друг от друга), либо образуются новые когерентные структуры (вихри расположены близко друг к другу) [1]. Время жизни пятен сконцентрированной завихренности велико по сравнению со временем их оборота вокруг своей оси [2].

Существование крупномасштабных организованных движений в турбулентных слоях смешения было впервые предположено Townsend и подробно исследовано Grant, Lindgen, Rotta и другими (см. ссылки в источнике [1]). Отметим, что прототипы когерентных структур наблюдались еще Reynolds в 1883 г.

Понимание механизмов возникновения и взаимодействия когерентных структур представляет интерес с точки зрения прикладных и фундаментальных исследований. Среди основных теоретических направлений изучения данных объектов отметим прямое численное решение уравнений Навье–Стокса и построение моделей, описывающих структуры. При численном анализе уравнений Навье–Стокса используются спектральные методы, методы конечных разностей и конечных элементов и т. д. К достоинству первого направления следует отнести его универсальность. Однако применение данного подхода к решению широкого класса задач сопровождается трудностями, связанными с физической интерпретацией результатов.

Суть представления реального течения его модельным аналогом заключается в аппроксимации уравнений, описывающих течение, таким образом, чтобы “отфильтровать” все физические явления, кроме самых существенных. В моделях, описывающих когерентные вихри, непрерывное поле завихренности заменяют локализованными вихревыми

пятнами, помещенными в потенциальное течение. Распределение завихренности в пятнах подчиняют определенным законам.

Наряду со сложными моделями [3] (см. также список литературы в источнике), описывающими когерентные вихри, успешно применяются достаточно простые модели, позволяющие в большинстве случаев получить адекватные экспериментам результаты и существенно сократить время вычислений. К таким моделям относятся модель точечных вихрей (МТВ) [4–6] и моментные модели [7].

При исследовании динамики вихревых течений будем использовать МТВ и моментную модель второго порядка (ММ2П). МТВ и ММ2П могут быть получены из общей моментной модели, в которой вихрь описывается положением его центра завихренности и бесконечным числом геометрических моментов сечения, при ее усечении вплоть до моментов нулевого и второго порядков, соответственно [7]. В результате такого усечения вихри вырождаются в точки или эллипсы с однородно распределенной внутри них завихренностью одного знака при использовании МТВ и ММ2П соответственно.

1. КРАТКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИСПОЛЬЗУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ

1.1. Модель точечных вихрей

Взаимодействие N точечных вихрей с интенсивностями κ_α и координатами (x_α, y_α) в безграничной идеальной среде описывается гамильтоновой системой уравнений второго порядка [5]:

$$\kappa_\alpha \dot{x}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}; \quad \kappa_\alpha \dot{y}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}; \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (1)$$

с независимым явно от времени гамильтонианом H ,

$$H = -\frac{1}{8\pi} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \kappa_\alpha \kappa_\beta \ln l_{\alpha\beta}^2; \quad (2)$$

$$l_{\alpha\beta}^2 = (x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2,$$

точка означает дифференцирование по времени; штрих означает, что в сумме опущен член, соответствующий $\alpha = \beta$. Кроме H , система (1) обладает еще тремя независимыми первыми интегралами [5]:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{\alpha=1}^N \kappa_\alpha x_\alpha; & P &= \sum_{\alpha=1}^N \kappa_\alpha y_\alpha; \\ I &= \sum_{\alpha=1}^N \kappa_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2). \end{aligned} \quad (3)$$

Постоянство величин (2), (3) в процессе движения выражает выполнение законов сохранения энергии (H), импульса (Q, P) и момента импульса (I) течения, образованного системой вихрей.

МТВ используется как в плоском, так и в пространственном случаях при моделировании ряда течений, включая свертывание вихревой пелены, слой смешения, следы и турбулентные пятна (см. ссылки в [8]). Такое моделирование хорошо воспроизводит крупномасштабные движения, однако при этом довольно грубо моделируются соответствующие им напряжения [8]. Данный факт, вероятно, обусловлен игнорированием внутренней динамики вихрей, поскольку завихренность в МТВ задается совокупностью δ -функций. Несмотря на некоторую схематичность, МТВ отражает такие свойства реальных вихревых структур, как хаотическое поведение [9, 10] и слияние вихрей [11–13]. Отражение последнего явления в рамках МТВ особенно важно, так как процесс слияния вихревых структур является основным при формировании новых масштабов в потоке. Следует также отметить, что точечные сингулярные вихри реально существуют в сверхтекучем He II [14].

Подробный анализ решений системы (1)–(2) и обширная библиография по исследованию точечных вихрей содержится в [9, 15].

1.2. Моментная модель второго порядка

По сравнению с МТВ, ММ2П обладает большими возможностями для описания процесса взаимодействия когерентных структур, поскольку учитывает деформацию вихревого ядра. В данной модели, как отмечено выше, вихревые пятна однородной завихренности описываются эллиптическими вихрями [7]. В безграничной среде и в отсутствии внешних потоков одиночный эллиптический вихрь (вихрь Кирхгоффа) вращается вокруг оси, проходящей через его центр завихренности, с постоянной угловой скоростью, при этом форма его не меняется [4, 6]. В основу общей моментной теории положено два основных предположения:

- максимальный размер любого пятна в процессе взаимодействия намного меньше минимального расстояния между центрами завихренности пятен;
- центр завихренности пятна всегда расположен внутри него, т. е. вихри не претерпевают сильных деформаций.

Пятно завихренности с номером k , характеризуемое двумя парами переменных (x_k, y_k) и (ϕ_k, λ_k) ,

где x_k, y_k – координаты центра завихренности пятна; ϕ_k – угол наклона большей полуоси эллипса к оси x в инерциальной системе координат; λ_k – отношение полуосей эллипса (рис. 1), описывается гамильтоновой системой уравнений четвертого порядка [7]:

$$\Gamma_k \dot{x}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y_k}; \quad \Gamma_k \dot{y}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_k};$$

$$\frac{\Gamma_k A_k}{8\pi} \frac{1 - \lambda_k^2}{\lambda_k^2} \dot{\phi}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \lambda_k}; \quad \frac{\Gamma_k A_k}{8\pi} \frac{1 - \lambda_k^2}{\lambda_k^2} \dot{\lambda}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \phi_k} \quad (4)$$

с гамильтонианом

$$\tilde{H} = H_1 + H_2 + H_3, \quad (5)$$

$$H_1 = -\frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^N \Gamma_k^2 \ln \left[\frac{1 + \lambda_k^2}{4\lambda_k} \right] + \frac{\Gamma_k^2}{16\pi};$$

$$H_2 = -\frac{1}{8\pi} \sum_{k,\beta=1}^N \Gamma_k \Gamma_\beta \ln l_{k\beta}^2;$$

$$H_3 = -\frac{1}{32\pi^2} \sum_{k,\beta=1}^N \Gamma_k \Gamma_\beta \frac{1}{l_{k\beta}^2} \times$$

$$\times \left[A_\beta \frac{1 - \lambda_\beta^2}{\lambda_\beta} \cos(2(\theta_{k\beta} - \phi_\beta)) + \right.$$

$$\left. + A_k \frac{1 - \lambda_k^2}{\lambda_k} \cos(2(\theta_{k\beta} - \phi_k)) \right],$$

где $\Gamma_i = \omega_i A_i$, $i = 1, \dots, N$ – интенсивность вихревого пятна с номером i ; ω_i, A_i – завихренность и площадь пятна с номером i соответственно; $\theta_{k\beta}$ – угол, под которым из центра эллипса с номером k виден центр эллипса с номером β (рис. 1); $l_{k\beta}$ – расстояние между центрами вихрей с номерами k и β . Составляющие гамильтониана \tilde{H} (5) представляют собой: H_1 – собственную энергию эллипса; H_2 – энергию системы эквивалентных точечных вихрей (под эквивалентной системой точечных вихрей будем понимать точечные вихри с интенсивностями, равными интенсивностям распределенных вихрей, и расстояниями между вихрями, равными расстояниям между центрами завихренности пятен); H_3 – поправку к энергии, обусловленную взаимодействием вихревых ядер. В данной модели выполнение законов сохранения заключается в требовании постоянства соотношений (5) и

$$Q = \sum_{k=1}^N \Gamma_k x_k; \quad P = \sum_{k=1}^N \Gamma_k y_k;$$

$$I = \sum_{k=1}^N \left[\Gamma_k (x_k^2 + y_k^2) + \frac{A_k}{4\pi} \frac{1 + \lambda_k^2}{\lambda_k} \right]. \quad (6)$$

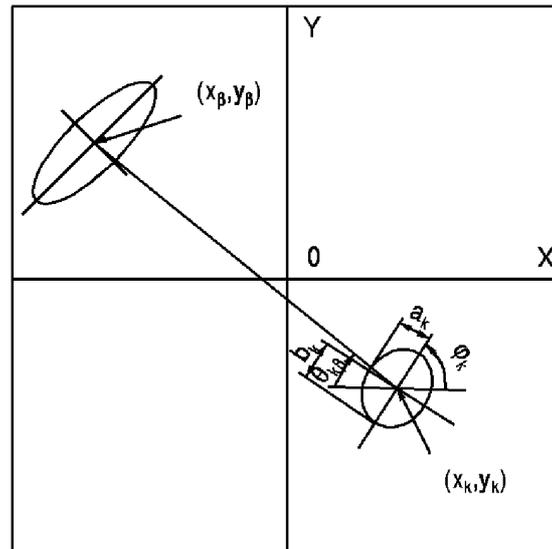


Рис. 1. Основные параметры, описывающие взаимодействие эллиптических вихрей Кирхгофа: (x_k, y_k) – координаты центра завихренности вихревого пятна с номером k ; ϕ_k – угол наклона эллипса с номером k к оси x в инерциальной системе координат; $\lambda_k = a_k/b_k$ – отношение полуосей эллипса с номером k ; $\theta_{k\beta}$ – угол, под которым из центра эллипса с номером k виден центр эллипса с номером β ; $l_{k\beta}$ – расстояние между центрами эллипсов k и β

Дополнительно к величинам (5) и (6), в рамках данной модели сохраняется площадь каждого эллипса, что является следствием теоремы Кельвина об инвариантности циркуляции в идеальной среде [5].

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ВИХРЕВЫХ ПЯТЕН ОДИНАКОВОЙ ЗАВИХРЕННОСТИ В РАМКАХ ММ2П

Имеется значительное количество работ, посвященных исследованию взаимодействия двух распределенных пятен завихренности, поскольку, несмотря на свою простоту, данное течение является фундаментальным с точки зрения образования новых масштабов и роста сдвигового слоя, как отмечает ряд авторов [2] (см. также ссылки в [8]). В существующих исследованиях определены различные типы взаимодействия вихрей [2, 16–18], исследована устойчивость стационарных вихревых движений, так называемых “V-состояний” [19]. В частности, было найдено, что в отличие от двух вихрей с завихренностью разных знаков, два вихря с завихренностью одного знака при определенных условиях сливаются, образуя составной вихрь.

В рамках ММ2П решим задачу о взаимодей-

ствии двух первоначально круговых пятен разных размеров с однородно распределенной внутри пятен одинаковой завихренностью, т. е. исследуем траектории движения и деформацию пятен в наведенном ими поле скоростей. В реальных потоках локализованные вихри имеют тенденцию сохранять осесимметричную форму [2], слияние вихрей с неоднородно распределенной завихренностью приводит к образованию составного вихря, профиль завихренности которого приближается к однородному (см. ссылки в [16]). Таким образом, предположения относительно формы и профиля завихренности пятен являются физически обоснованными. Поведение эллиптических вихрей сравним с поведением эквивалентной системы точечных вихрей (МТВ) [4, 5] и с данными, полученными в рамках метода контурной динамики (МКД) [16, 17], что позволит определить границы применимости МТВ и ММ2П в конкретном случае.

Остановимся на основных предположениях, сделанных относительно течения жидкости. Рассматривается двумерное течение невязкой однородной по плотности жидкости. Жидкость полагается неограниченной, покоящейся на бесконечности. При изучении динамики завихренности эффектами сжимаемости будем пренебрегать. Также не будем учитывать диффузию завихренности, что справедливо при рассмотрении определенного класса течений с высокими числами Re , кроме того, это позволяет моделировать вихри локализованными пятнами завихренности.

При решении поставленной задачи методом экстраполяции [20] интегрировались системы уравнений (1)–(2) и (4)–(5) с соответствующими начальными условиями. Точность вычислений контролировалась по выполнению условия постоянства инвариантов (2), (3) и (5), (6).

Характер взаимодействия вихрей в данной постановке определяется отношением радиусов вихрей R_2/R_1 и начальным расстоянием между их центрами d (рис. 2). Начальный радиус первого вихря во всех исследуемых случаях полагался равным постоянной величине $R_1 = \text{const}$. Начальный радиус второго вихря изменялся в диапазоне $0.1R_1 \leq R_2 \leq R_1$. Задача решалась в безразмерном виде. Все линейные размеры были нормированы на начальный радиус большего вихря R_1 , интенсивности вихрей – на единичную интенсивность $\Gamma = 1$, время – на характерный для данного течения временной промежуток R_1^2/Γ . При анализе полученных результатов учитывались выполнение законов сохранения моделей (2)–(3) и (5)–(6) и выполнение основных предположений, положен-

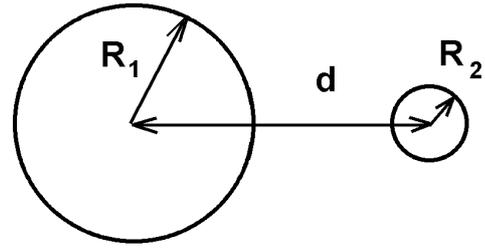


Рис. 2. Форма и расположение вихрей в начальный момент времени

ных в основу моментной модели. Для проведения сравнения результатов в рамках ММ2П и МКД завихренность пятен полагалась равной $\omega = 2\pi$, как в [16, 17].

Результаты численного эксперимента показали, что в случае двух первоначально круговых пятен с однородно распределенной завихренностью в рамках ММ2П имеют место два типа взаимодействия: упругое (УВВ) и неупругое (НВВ). При УВВ вращение вихрей вокруг центра завихренности сопровождается осцилляциями угловой скорости вращения вихревой системы относительно ее центра завихренности Ω_{Π} , расстояния между центрами вихрей d , а также осцилляциями формы вихрей, т. е. их полюсей λ_i , $i = 1, 2$, относительно своих средних значений. Поведение распределенных вихрей может описываться точечными вихрями лишь в области УВВ. При НВВ с течением времени происходит уменьшение расстояния между вихрями и значительная деформация их формы, в результате чего происходит нарушение основных предположений ММ2П.

Это означает, что вследствие возбуждения внутренних степеней свободы в этом режиме вихри проявляют “готовность” к перераспределению завихренности. Отметим, что в области НВВ в рамках МКД имеет место образование вихревых волокон, изменение размеров вихрей и их слияние при определенных условиях [16, 17]. Эти эффекты не могут быть в явном виде получены в рамках ММ2П, поскольку сближение и деформация вихрей приводят к нарушению основных предположений модели. Результаты вычислений представлены в виде схемы, отражающей типы взаимодействия вихрей в зависимости от начальных отношения радиусов вихрей R_2/R_1 и расстояния между их центрами Δ , отнесенного к R_1 : $\Delta/R_1 = (d - R_1 - R_2)/R_1$ (рис. 3). Отметим, что расстояние между центрами есть наименьшее расстояние между границами областей завихренности. Кривая зависимости R_2/R_1 от Δ/R_1 представляет со-

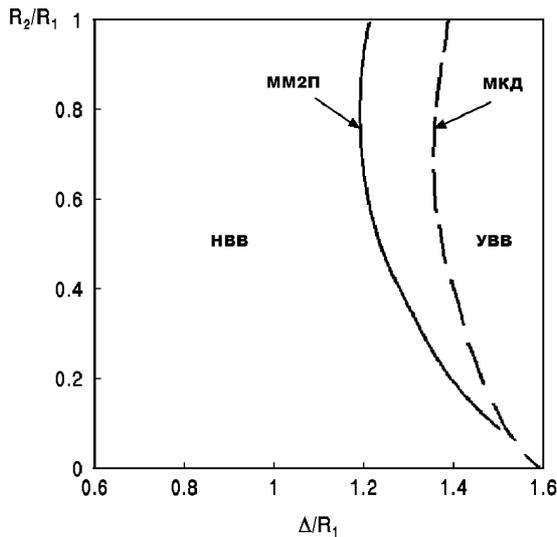


Рис. 3. Типы взаимодействия вихрей

бой границу между УВВ и НВВ (сплошная линия на рис. 3). Расстояния между кромками вихрей $\Delta_{кр}/R_1$, а также между их центрами $d_{кр}/R_1$, определяемые по этой кривой, называются критическими. Критическое расстояние $\Delta_{кр}/R_1$ (или $d_{кр}/R_1$) есть то расстояние, ниже которого вихри демонстрируют неупругое взаимодействие.

Анализ численных данных позволил заключить следующее. Критическое расстояние между кромками $\Delta_{кр}/R_1$ сильно различающихся по размеру вихрей больше, чем критическое расстояние вихрей, близких по размеру (рис. 3). Полученная зависимость $R_2/R_1(\Delta_{кр}/R_1)$ не является монотонной. С уменьшением R_2/R_1 от значения, равного 1, величина $\Delta_{кр}/R_1$ вначале падает, а затем начинает расти. Минимальное значение $\Delta_{кр}/R_1$ соответствует отношению радиусов $R_2/R_1 \approx 0.8$. Это означает, что расстояние между кромками, начиная с которого вихри попадают в область НВВ, минимально, когда вихри имеют близкие размеры. $\Delta_{кр}/R_1$ является наибольшим для вихрей, размеры которых различаются в 10 раз. Анализ результатов, приведенных на рис. 3, показывает, что НВВ проявляют лишь близко расположенные вихри: расстояние между кромками таких вихрей должно быть не более, чем 1.5 радиуса, а межцентровое расстояние – не более, чем 3.2 радиуса большего вихря. При этом граница между УВВ и НВВ достаточно нечувствительна к различию в вихревых размерах: изменение R_2/R_1 в 10 раз приводит к изменению критического расстояния между центрами вихрей в 1.2 раза, между кромками вихрей

– в 1.3 раза.

Как отмечено выше, если начальное расстояние между центрами вихрей превышает $\Delta_{кр}/R_1$, то имеет место УВВ. В этом режиме поведение вихревых пятен может быть описано МТВ тем точнее, чем больше начальное расстояние между вихрями. Кратко остановимся на взаимодействии двух точечных вихрей с интенсивностями κ_1, κ_2 , $\kappa_1 \neq -\kappa_2$, и расстоянием d между ними. Такая вихревая система проявляет лишь один тип взаимодействия: вихри вращаются вокруг неподвижного центра завихренности с постоянной угловой скоростью $\Omega_T = (\kappa_1 + \kappa_2)/2\pi d^2$, при этом расстояние между ними не меняется [4, 5]. Постоянство d следует из закона сохранения энергии (2) и означает, что два точечных вихря не могут сливаться в один [11]. Период обращения вихрей вокруг центра завихренности равен $T_T = 2\pi/\Omega_T$.

Отличия в поведении вихревых пятен при УВВ от точечных вихрей будем оценивать с помощью четырех коэффициентов:

$$k_1 = \left| \frac{\Omega_{срп} - \Omega_T}{\Omega_T} \right|; \quad k_2 = \left| \frac{d_{ср} - d^{(0)}}{d^{(0)}} \right|; \quad (7)$$

$$k_3 = \left| \frac{\lambda_{ср1} - \lambda_1^{(0)}}{\lambda_1^{(0)}} \right|; \quad k_4 = \left| \frac{\lambda_{ср2} - \lambda_2^{(0)}}{\lambda_2^{(0)}} \right|,$$

выражающих: k_1 – относительное изменение осредненной по времени t угловой скорости вращения пятен вокруг центра завихренности системы вихрей $\Omega_{срп} = 1/\tau \int_0^\tau \Omega_{п}(t) dt$ от угловой скорости вращения эквивалентной системы точечных вихрей Ω_T ; k_2 – относительное изменение среднего межцентрового расстояния пятен $d_{ср} = 1/\tau \int_0^\tau d(t) dt$ от их начального расстояния $d^{(0)}$; k_3, k_4 – относительные изменения средних отношений полуосей вихрей $\lambda_{срi} = 1/\tau \int_0^\tau \lambda_i(t) dt$, от их начальных значений $\lambda_i^{(0)}$, $i = 1, 2$. Коэффициенты k_1, k_2 (7) отражают отличия в поведении пятен от точечных вихрей в целом, коэффициенты k_3, k_4 (7) характеризуют меру возбуждения внутренних степеней свободы первого и второго вихрей соответственно. Отметим, что такое разделение условно, поскольку эти коэффициенты взаимосвязаны, как следует из уравнений (4) – (5), описывающих ММ2П.

Угловую скорость вращения вихревых пятен относительно центра завихренности определим как полную производную по времени от угла θ_{12} , образованного осью OX неподвижной системы координат и прямой, соединяющей центры ви-

хрей (рис. 1):

$$\Omega_{\Pi}(t) = \frac{d\theta_{12}}{dt} = \frac{\partial\theta_{12}}{\partial x_i} \frac{dx_i(t)}{dt} + \frac{\partial\theta_{12}}{\partial y_i} \frac{dy_i(t)}{dt}, \quad (8)$$

где $x_i(t)$, $y_i(t)$ – координаты центра завихренности любого из двух вихревых пятен. Отметим, что центр завихренности исследуемой системы расположен в начале координат. Подставив значения

$$\frac{\partial\theta_{12}}{\partial x_i} = -\frac{y_i(t)}{x_i^2(t) + y_i^2(t)}, \quad \frac{\partial\theta_{12}}{\partial y_i} = \frac{x_i(t)}{x_i^2(t) + y_i^2(t)}$$

в (8), получим выражение для угловой скорости вращения системы пятен:

$$\Omega_{\Pi}(t) = \frac{1}{x_i^2(t) + y_i^2(t)} \times \left(-y_i(t) \frac{dx_i(t)}{dt} + x_i(t) \frac{dy_i(t)}{dt} \right). \quad (9)$$

Здесь и далее в параграфе правило суммирования по повторяющемуся индексу не выполняется. В качестве индекса i может быть взято любое из его значений $i = 1, 2$. Осреднение величин $\Omega_{\Pi}(t)$, $d(t)$, $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2$, осуществлялось на временном интервале τ , равном нескольким периодам вращения точечных вихрей $\tau = NT_T$. В расчетах принималась $N = 3$.

На рис. 4, а–г представлены зависимости коэффициентов $k_1 \div k_4$ от начального расстояния $d^{(0)}/R_1$ для вихрей различных размеров ($0.1 \leq R_2/R_1 \leq 1$). Для каждого отношения радиусов вихрей $d^{(0)}/R_1$ изменялось в пределах от $d_{кр}/R_1 + 10^{-3}$ до 4 (рис. 4, а–г). Как и следовало ожидать, свои максимальные значения коэффициенты $k_1 \div k_4$ принимают вблизи $d_{кр}/R_1$, с ростом $d^{(0)}/R_1$ все коэффициенты проявляют общую тенденцию к уменьшению. Это означает, что по мере увеличения начального межцентрового расстояния для всех исследуемых вихревых размеров возбуждение внутренних степеней свободы ослабевает, и поведение распределенных вихрей приближается к поведению эквивалентных точечных вихрей. Коэффициенты k_3 , k_4 отражают, как было отмечено, меру возбуждения внутренних степеней свободы. Поэтому, желая корректно аппроксимировать распределенные вихри точечными, следует исходить из величин этих коэффициентов. При этом отметим, поскольку меньший вихрь испытывает большее влияние со стороны своего “напарника”, чем наоборот (по аналогии с взаимодействием масс в небесной механике [21]), то следует ожидать, что $k_4 \geq k_3$. Наши рассуждения согласуются с численными результатами, которые свидетельствуют о том, что среди

всех исследуемых коэффициентов коэффициенты k_3 , k_4 имеют наибольший диапазон изменения в исследуемом интервале начальных расстояний между вихрями (рис. 4, а–г). При этом $k_4 \geq k_3$ при одинаковых $d^{(0)}/R_1$ (рис. 4, в, г). Поэтому при аппроксимации пятен точечными вихрями в данной вихревой системе следует в первую очередь учитывать степень отклонения формы меньшего вихря от круговой. Будем полагать, если $k_4 \leq 0.05$, т. е. отклонение формы меньшего вихря от первоначальной круговой составляет менее 5%, то распределенные вихри можно надежно описывать точечными. Как показывает анализ численных данных (рис. 4, г), это имеет место, когда межцентровое расстояние превышает примерно четыре радиуса большего вихря для вихрей всех размеров. Таким образом, МТВ адекватно описывает поведение двух распределенных вихрей одинаковой завихренности, начиная с достаточно малых межцентровых расстояний, составляющих примерно четыре радиуса большего из вихрей. При расстояниях ниже указанного значения моделирование взаимодействия двух вихревых пятен с одинаковой завихренностью должно осуществляться с учетом внутренних степеней свободы у вихрей.

Обратимся к исследованию области НВВ. Отметим, что ММ2П не позволяет исследовать поведение вихрей при $d^{(0)}/R_1 < d_{кр}/R_1$ на больших временных промежутках, поскольку с уменьшением начального расстояния между вихрями уменьшается время “жизни” вихревой системы в рамках ММ2П. Поэтому поведение вихрей в области НВВ в рамках ММ2П изучалось в окрестности ММ2П-граничной кривой. Отметим, что в малой окрестности слева и справа от граничной кривой поведение центров завихренности пятен различно, однако характер деформации пятен одинаков. Поэтому при анализе деформации эллиптических вихрей в области НВВ воспользуемся результатами деформации пятен в приграничной области УВВ (коэффициенты k_3 , k_4 вблизи $d_{кр}/R_1$ – рис. 4, в, г). В этой области вихри сближаются, что приводит к их сплющиванию, как следует из закона сохранения момента импульса течения, образованного вихрями (6).

Характер деформации вихрей зависит от различия в их размерах. Как следует из рис. 4, в, г, увеличение разницы в вихревых размерах приводит к уменьшению возмущения от первоначальной круговой формы большего вихря (значение коэффициента k_3 вблизи $d_{кр}/R_1$ падает при $R_2/R_1 \rightarrow 0.1$) и росту деформации меньшего вихря (общая тенденция коэффициента k_4 вблизи $d_{кр}/R_1$ к увеличению при $R_2/R_1 \rightarrow 0.1$). На рис. 5, а, рис. 6, а при-

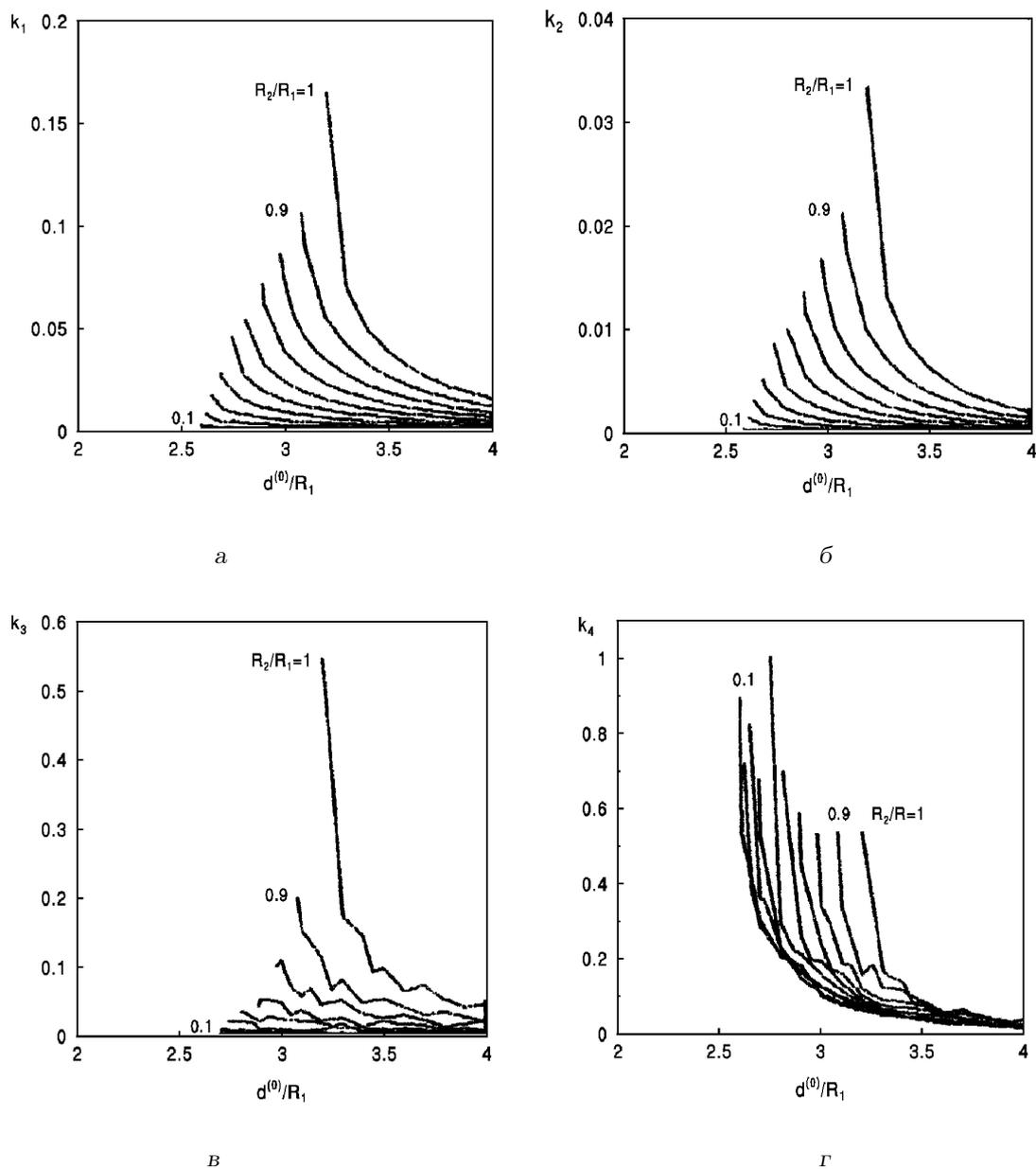


Рис. 4. Коэффициенты, характеризующие отличия в поведении двух распределенных вихрей одинаковой завихренности от эквивалентной системы точечных вихрей

ведены примеры НВВ, полученные при использовании ММ2П для вихрей различных размеров.

Сравним результаты по взаимодействию вихрей, имеющему место в рамках ММ2П, с данными, полученными при использовании МКД [17]. Как отмечено выше, ММ2П, как и МКД, позволяет выделить два основных типа взаимодействия вихрей: УВВ и НВВ. Поведение вихрей в области УВВ сходно для обоих методов. Хотя ММ2П,

в отличие от МКД, не позволяет классифицировать неупругие взаимодействия, тем не менее моментная модель верно отражает характер деформации вихревых пятен, который согласуется с типами НВВ в рамках МКД [17]. Увеличение деформации меньшего вихря по сравнению с большим при уменьшении R_2/R_1 , имеющее место в рамках ММ2П в области НВВ, означает, что вихрь с радиусом R_2 стремится закрутиться вокруг своего “на-

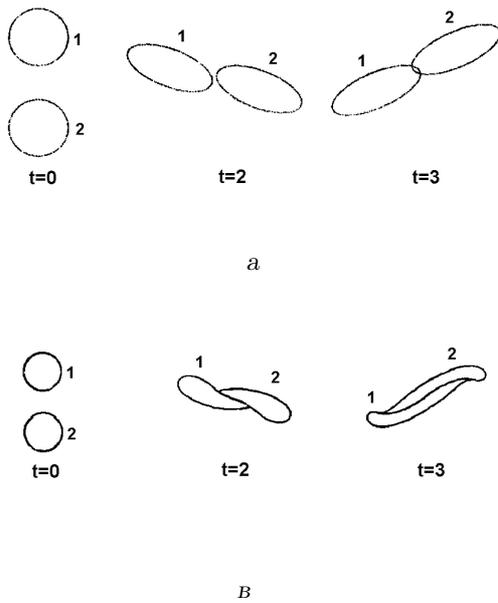


Рис. 5. Моделирование НВВ двух распределенных вихрей равных радиусов одинаковой завихренности в рамках:
 а – ММ2П: $R_2/R_1 = 1$, $d^{(0)}/R_1 = 3.2$, $d_{кр}/R_1 = 3.201$;
 б – МКД: $R_2/R_1 = 1$, $d^{(0)}/R_1 = 3.2$ [16]

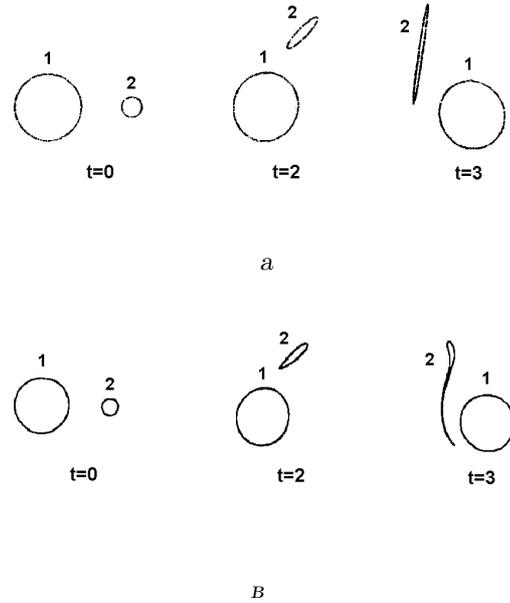


Рис. 6. Моделирование НВВ двух распределенных вихрей различных радиусов одинаковой завихренности в рамках:
 а – ММ2П: $R_2/R_1 = 0.3$, $d^{(0)}/R_1 = 2.5$, $d_{кр}/R_1 = 2.647$;
 б – МКД: $R_2/R_1 = 0.3$, $d^{(0)}/R_1 = 2.5$ [17]

парника”. Эта тенденция в рамках используемого метода согласуется с результатами исследований в рамках МКД, направленных на изучение вопроса: какой же из вихрей при заданной геометрии и распределении завихренности будет заворачиваться вокруг другого [18].

Выясним, как точно в рамках ММ2П определяется граница между областями УВВ и НВВ. На рис. 3 представлены граничные расстояния между кромками вихрей, разделяющие упругий и неупругий режимы, определенные с помощью двух методов: сплошная линия относится к ММ2П, штриховая – к МКД [17]. Как следует из рисунка, граничная кривая, построенная с помощью ММ2П, воспроизводит характер зависимости $R_2/R_1(\Delta_{кр}/R_1)$, полученной в рамках МКД: ММ2П–граница несколько сдвинута в область НВВ, определенных МКД. Отклонение ММ2П–граничной кривой от МКД–кривой максимально для одинаковых вихрей (относительное отклонение составляет 17%) и уменьшается по мере увеличения различий в вихревых размерах, т. е. минимально для $R_2/R_1 = 0.1$ (0.8%).

Возникает вопрос о времени “жизни” ММ2П в области НВВ. Сравнение результатов ММ2П и МКД [16, 17] показывает, что время, в течение которого ММ2П адекватно отражает поведение

вихрей в области НВВ, невелико и составляет примерно $2 \div 4$ безразмерные единицы. Нижний предел относится к соизмеримым вихрям, различие в вихревых размерах приводит к некоторому увеличению времени “жизни” модели (рис. 5, 6). На рис. 5 представлено слияние вихрей одинаковых размеров в рамках ММ2П (рис. 5, а) и МКД (рис. 5, б) [16]. Картина взаимодействия сходна вплоть до безразмерного времени $t = 2$. В момент времени $t = 3$ модель дает нефизичный результат, поскольку процесс слияния вихрей сопровождается их сближением и закручиванием нитей завихренности пятен вокруг общего ядра, а не перекрытием вихревых областей, как следует из ММ2П. На рис. 6 изображено неупругое взаимодействие вихрей разных размеров в рамках ММ2П (рис. 6, а) и МКД (рис. 6, б) [17]. Режим частичного растяжения, демонстрируемый в рамках МКД, воспроизводится в основных чертах вплоть до $t = 4$ в ММ2П.

Поясним данную ситуацию. В соответствии с результатами, полученными МКД [17], в области НВВ вблизи граничной кривой имеют место следующие типы взаимодействия (терминология взята из источника [17]): для равных вихрей характерно *полное слияние* (вихри сближаются, выделяющаяся из них завихренность закручивается вокруг

общего ядра); вихри, близкие по размерам, демонстрируют *частичное слияние* (часть завихренности меньшего вихря внедряется в больший, результирующая система представляет собой два вихря и нитевидную завихренность); для вихрей, различающихся по размерам, характерно *частичное растяжение* (нитевидная завихренность, выделяющаяся из меньшего вихря, закручивается вокруг большего, но не внедряется в него). ММ2П не способна адекватно описать процессы слияния в силу предположений, положенных в ее основу. А начальные этапы частичного растяжения, сопровождающиеся вытягиванием меньшего из вихрей, ММ2П отражает вполне удовлетворительно. То, что ММ2П–граничная кривая вычисляется более точно для вихрей, различающихся по размерам, является следствием особенностей взаимодействия рассматриваемой вихревой системы.

Таким образом, сдвиг ММ2П–граничной кривой по отношению к МКД–кривой, а также невозможность классифицировать в рамках ММ2П поведение вихрей в области НВВ в отличие от МКД, обусловлены учетом лишь небольшого числа степеней свободы при моделировании вихрей в рамках ММ2П.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Данная задача является тестовой как для корректного описания распределенных вихрей точечными, так и для понимания ситуаций, требующих учета внутренних степеней свободы вихрей.
2. В отличие от двух точечных вихрей, два вихревых пятна с однородно распределенной внутри них завихренностью одного знака в рамках ММ2П проявляют два типа взаимодействия: упругое и неупругое. Граница между УВВ и НВВ достаточно нечувствительна к различию в вихревых размерах: увеличение различий в отношении радиусов вихрей на порядок приводит к незначительному изменению критического расстояния между центрами вихрей. НВВ проявляют лишь близко расположенные вихри, межцентровые расстояния которых не превышают приблизительно трех радиусов большего из вихрей.
3. Сравнение полученных результатов в рамках ММ2П с существующими данными в рамках МКД позволяет заключить следующее:

ММ2П адекватно описывает характер взаимодействия и деформации распределенных вихрей, если межцентровое расстояние превышает примерно три радиуса большего из вихрей, т. е. в области УВВ. Ниже указанной величины, т. е. в области НВВ, ММ2П верно отражает основные тенденции в поведении пятен, но финальные стадии взаимодействия не могут быть описаны в рамках ММ2П ввиду нарушения ее основных предположений.

4. Несмотря на определенную ограниченность ММ2П, данная модель адекватно описывает основные типы взаимодействия локализованных плоских вихревых структур. Важным достоинством данного подхода является возможность использования при моделировании когерентных вихревых структур аналитических представлений.

1. Hussain A. K. M. F. Coherent structures – reality and myth // *Phys. Fluids.*– 1983.– **26**, N 10.– P. 2816–2849.
2. McWilliams J. C. The emergence of isolated coherent structures in turbulent flows // *J. Fluid Mech.*– 1984.– **146**.– С. 21–43.
3. Dritschel D. G., Reinaud J. N., McKiver W. J. The quasi-geostrophic ellipsoidal vortex model // *J. Fluid Mech.*– 2004.– **505**.– P. 201–223.
4. Lamb H. *Hydrodynamics.*– New York: Dover, 1945.– 738 p.
5. Бэтчелор Дж. Введение в механику жидкости.– М.: Мир, 1973.– 758 с.
6. Вилля Г. Теория вихрей.– М.–Л.: ОНТИ, 1936.– 266 с.
7. Melander M. V., Zabuzky N. J., Styczek A. S. A moment model for vortex interactions of two-dimensional Euler equations. Part I. Computational validation of a Hamiltonian elliptical representation // *J. Fluid Mech.*– 1986.– **167**.– P. 95–115.
8. Кантуэлл Б. Дж. Организованные движения в турбулентных потоках. Вихри и волны. Сб. статей. Сер. Механика. Новое в зарубежной науке // М.: Мир.– 1984, **33**.– С. 9–79.
9. Aref H. Intergable, chaotic, and turbulent vortex motion in two dimensional flows // *Ann. Rev. Fluid Mech.*– 1983.– **15**.– P. 345–389.
10. Aref H. Chaos in the dynamics of a few vortices – fundamentals and applications // *Theor. and Appl. Mech., IUTAM.*– Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), 1985.– P. 43–68.
11. Новиков Е. А., Седов Ю. Б. Коллапс вихрей // *ЖЭТФ.*– 1979.– **77**, вып. 2(8).– С. 588–597.
12. Aref H. Motion of three vortices // *Phys. Fluids.*– 1979.– **22**, N 3.– P. 393–400.
13. Novikov E. A. Stochastization and collapse of vortex system // *Ann. NY. Acad. Sci.*– 1980.– **357**.– P. 47–54.

14. *Donnelly R. J., Roberts P. H.* Superfluid mechanics // *Ann. Rev. Fluid Mech.*– 1974.– **6**.– P. 179–225.
15. *Мелешко В. В., Константинов М. Ю.* Динамика вихревых структур.– Киев: Наук. думка, 1993.– 279 с.
16. *Waugh D. W.* The efficiency of symmetric vortex merger // *Phys. Fluids.*– 1992.– **A4**, N 8.– P. 1745–1758.
17. *Dritschel D. G., Waugh D. W.* Quantification of the unelastic interaction of unequal vortices in two-dimensional vortex dynamics // *Phys. Fluids.*– 1992.– **A4**, N 8.– P. 1737–1744.
18. *Melander M. V., Zabuzky N. J., McWilliams J. C.* Asymmetric vortex merger in two dimensions: Which vortex is “victorious”? // *Phys. Fluids.*– 1987.– **30**.– P. 2610–2612.
19. *Overman E. A., Zabuzky N. J.* Evolution and merger of isolated vortex structures // *Phys. Fluids.*– 1982.– **25**, N 8.– P. 1297–1305.
20. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи.– М.: Мир, 1990.– 512 с.
21. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика.– М.–Л.: ОНТИ, 1937.– 500 с.