

УДК 532.528

ЧАСТКОВА КАВІТАЦІЯ НА ВИДОВЖЕНИХ ТІЛАХ**І. Г. НЕСТЕРУК***Інститут гідромеханіки НАН України, Київ**Отримано 21.01.2004*

Досліджується часткова кавітація на видовжених осесиметричних тілах в ідеальній нестисливій невагомій рідині. Завдяки простоті рівняння першого наближення вдалося пояснити низку ефектів та розрахувати одразу декілька осесиметричних каверн на одному тілі. Показано, що каверни можуть бути не тільки еліпсо-, але і гіперболоподібними, знайдено відповідні області чисел кавітації. З використанням лінійної та нелінійної постановок розраховано форми увігнутих осесиметричних каверн. Деякі з одержаних довгих каверн не потребують замикача і можуть використовуватись для істотного зменшення загального опору тіл, які рухаються у воді з великими швидкостями.

Исследуется частичная кавитация на тонких осесимметричных телах в идеальной несжимаемой невесомой жидкости. Благодаря простоте уравнения первого приближения удалось объяснить ряд эффектов и рассчитать одновременно несколько осесимметричных каверн на одном теле. Показано, что каверны могут быть как эллипсо-, так и гиперболоподобными, найдены соответствующие области чисел кавитации. С использованием линейной и нелинейной постановок рассчитаны формы вогнутых осесимметричных каверн. Некоторые из полученных длинных каверн не нуждаются в замыкателе и могут использоваться для существенного снижения полного сопротивления тел, движущихся в воде с большими скоростями.

The partial cavitation on long axisymmetric bodies in ideal incompressible imponderable fluid are investigated. The simplicity of the first approximation equation enables to explain a series of effects and to calculate several axisymmetric cavities on one body simultaneously. It is shown that cavities may be not only elliptic but also hyperbolic, the corresponding cavitation number regions are found. By means of the linear and non-linear approaches, the shapes of the concave axisymmetric cavities are calculated. Some of this long cavities do not need any rigid closing body and can be used for a considerable total drag reduction of the bodies moving in the water at high velocities.

ВСТУП

Рух у воді з великими швидкостями часто пов'язаний з виникненням каверн – порожнин, заповнених газом та парою. У випадку так званого суперкавітаційного режиму вільна поверхня замикається позаду тіла. Якщо число кавітації

$$\sigma = \frac{2(p_{\infty} - p_k)}{\rho U_{\infty}^2} \quad (1)$$

(тут p_{∞} , p_k – відповідно тиски на нескінченності та на вільній поверхні; ρ – густина рідини; U_{∞} – фіксована швидкість руху) недостатньо мале, виникає режим часткової кавітації, коли вільна поверхня замикається на тілі.

Результати чисельних досліджень часткової кавітації на осесиметричних тілах нещодавно надруковані в [1], де розглядаються каверни за диском і використовується метод межових елементів (особливості розташовуються на поверхні тіла і каверни). Було отримано низку цікавих фактів. Зокрема, виявлено відсутність розв'язків для деяких довжин каверни (див. [1, рис. 14]) та товщин тіла [1, рис. 5], обчислено залежність мінімальної довжини каверни від товщини тіла [1, рис. 8]. Дані результати залишились в [1] без пояснень, що спонукало використати для цього запропоновану в [2] лінійну теорію, зокрема, рівняння першого набли-

ження

$$\frac{d^2 R^2}{dx^2} = \frac{\sigma}{\ln \varepsilon} \quad (2)$$

та його розв'язок

$$R^2(x) = \frac{\sigma x^2}{2 \ln \varepsilon} + 2\beta x + 1, \quad x \geq 0, \quad (3)$$

де $R(x)$ – радіус тонкої осесиметричної каверни; ε – малий параметр її тонкості; β – похідна від радіуса кавітатора в точці початку каверни $x = 0$. Всі довжини будуть віднесеними до радіуса кавітатора в точці відриву каверни $x = 0$. Так само, як в статті [1], обмежимося нев'язким, нестисливим та безвихровим потоком невагомій рідині та розглянутими в [1] кінечно-циліндричними тілами (рис. 1).

Простота рівняння першого наближення (3) дозволяє легко дослідити низку принципів питань кавітаційних течій. Зокрема, застосувати принцип стійкості задач математичної фізики для визначення допустимого діапазону чисел кавітації (див. [3,4]). У даному дослідженні аналізуються особливості цього принципу та форми каверн у випадку часткової кавітації, що впливають з рівняння (3). Зокрема, в розділі 4 буде показано, що в проведеному через вісь симетрії перерізі каверна може бути не тільки еліпсом, але і гіперболою, а також прямою лінією. В розділі 5 аналізуються перспективи застосування різних типів каверн.

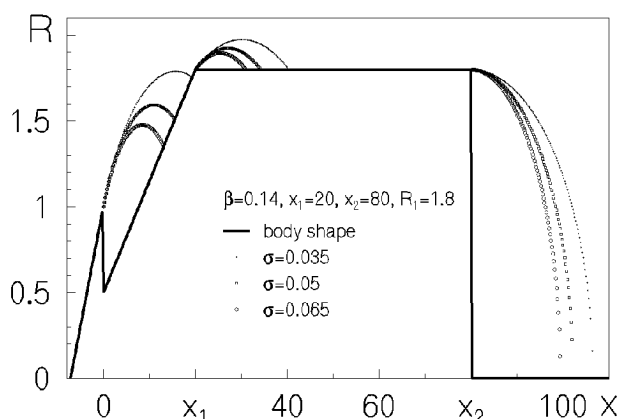


Рис. 1. Форми каверни для різних значень числа кавітації та радіуса циліндричної частини тіла $R_1 = 1.8$

Розраховано форму увігнутої каверни з використанням запропонованої в [5] нелінійної постановки.

1. ЧАСТКОВА КАВІТАЦІЯ НА ТОНКИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛАХ ТА КРИТИЧНІ ЧИСЛА КАВІТАЦІЇ

Теорія тонкого тіла не дозволяє розраховувати каверни за диском та іншими невидовженими в напрямку руху тілами, тому на відміну від [1] перша каверна утворюється конусом з тангенсом напівкута при вершині β , розташованим на ділянці $x < 0$ (див. рис. 1). Далі ($0 < x < x_1$) знаходиться ще одна конічна частина зі значенням похідної β_1 , яка при $x_1 < x < x_2$ переходить в циліндр з радіусом R_1 . Недоліком лінійного підходу є його обмежена точність. Разом з тим він дозволяє розраховувати одразу всі три каверни, що можуть виникати на тілі, показаному на рис. 1, у той час, як застосований в [1] метод обмежується лише однією каверною.

Дійсно, запропонований в [6] метод зрощування асимптотичних розкладів вимагає лише малого значення похідної від радіуса тіла або каверни і залишається справедливим при довільній кількості видовжених каверн. Відповідно для достатньо малих значень параметра ε можна використовувати рівняння (2), (3), які є наслідками отриманого в [6] потенціалу течії. Для досягнення більшої точності слід використовувати рівняння другого або наступних наближень [7].

Варто зауважити, що рівняння (2), (3) дозволяють дуже просто розв'язати проблему замикан-

ня каверни, якщо вважати, що вони описують також форму замикача. Подібна несиметрична схема Рябушинського, яка вперше використовувалась в [2], автоматично забезпечує гладке стикування каверни та замикача. В тих областях, де похідна від радіуса замикача перестає бути малою, лінійна теорія та рівняння (2), (3) втрачають свою точність. У подальшому будемо нехтувати довжиною замикача і вважати, що довжина каверни L визначається з рівняння (3).

Окрему увагу слід звернути на точність першого наближення (2), (3), що становить лише $(-\ln \varepsilon)^{-1}$ [2, 7]. Певна невизначеність параметра ε дозволяє вибирати його з міркувань досягнення найбільшої точності рівняння (3) в цікавому для практики діапазоні чисел кавітації. Зокрема, в якості величини ε можна взяти відношення максимального радіуса кавітатора до його довжини. Тоді для конічного кавітатора $\varepsilon = \beta$. Результати розрахунків максимального радіуса каверни R_m та її довжини до міделя L_m з використанням зазначеного параметра тонкості представлені на рис. 2 і 3. Маркерами наведені результати розрахунків Гузевського [8], виконані в нелінійній постановці, та обчислень за допомогою дещо модифікованого методу статті [5], в якому використовуються джерела та диполі, розташовані на осі симетрії.

З рис. 2 видно цілком задовільну точність рівняння першого наближення (3) в широкому діапазоні чисел кавітації. Для показаної на рис. 3 довжини каверни до міделя рівняння першого наближення дає дещо гіршу точність. Особливо це стосується області більших чисел кавітації $\sigma > 0.05$ і дуже малих кутів при вершині конуса. Точність у цьому діапазоні суттєво покращується при використанні рівняння другого наближення [7].

Отже, рівняння (2), (3) з $\varepsilon = \beta$ можуть успішно використовуватись для оцінок габаритних розмірів каверни за тонкими конусами в широкому важливому для практики діапазоні чисел кавітації. Даний факт ще раз підтверджує відомий принцип "незалежності розширення" перерізу каверни, запропонований Г. В. Логвиновичем [9]. Зокрема, в першому наближенні форма каверни не залежить від наявності і розмірів інших каверн.

Приклади розрахунків з використанням рівняння першого наближення (2) наведені на рис. 1. Значення параметра ε дорівнювали β , β_1 та R_1/x_2 відповідно для першої, другої та третьої каверн.

Зменшення числа кавітації може збільшувати першу каверну до таких розмірів, що вона замикатиме на циліндричній частині тіла. Критичне значення числа кавітації σ_{c1} може бути знайдене

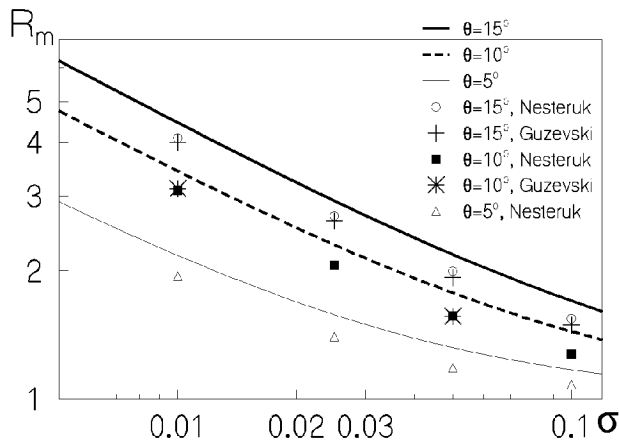


Рис. 2. Максимальний радіус каверни для різних значень напівкута при вершині конуса θ . Лінії – рівняння першого наближення, маркери – нелінійні постановки

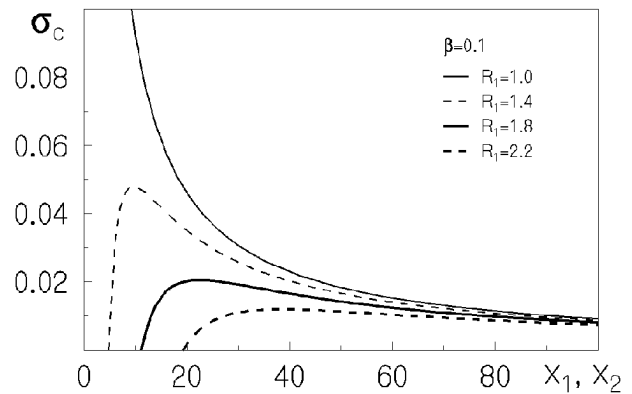


Рис. 4. Критичні числа кавітації σ_{c1} і σ_{c2} для різних значень радіуса циліндричної частини тіла

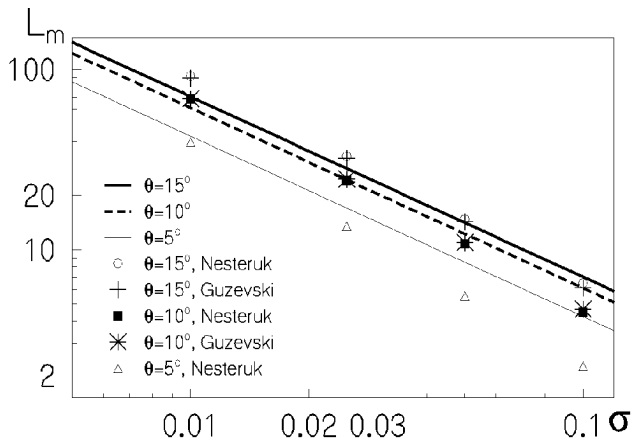


Рис. 3. Довжина каверни до міделя для різних значень напівкута при вершині конуса θ . Лінії – рівняння першого наближення, маркери – нелінійні постановки

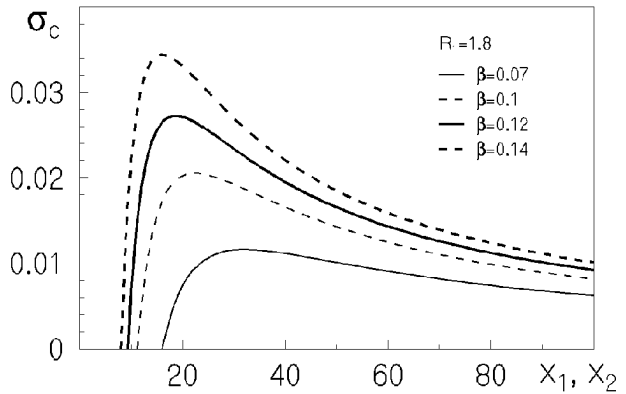


Рис. 5. Критичні числа кавітації σ_{c1} і σ_{c2} для різних конусів

з простого рівняння

$$R_1^2 = \frac{\sigma_{c1} x_1^2}{2 \ln \beta} + 2\beta x_1 + 1, \quad (4)$$

що є наслідком розв'язку (3). З формули (4) випливає

$$\sigma_{c1} = \frac{2 \ln \beta (R_1^2 - 2\beta x_1 - 1)}{x_1^2}. \quad (5)$$

Перша каверна може охоплювати все тіло (випадок суперкавітації). Відповідне критичне число кавітації σ_{c2} може бути визначене такими співвідношеннями:

$$\sigma_{c1} \geq \sigma_{c2} = \frac{2 \ln \beta (R_1^2 - 2\beta x_2 - 1)}{x_2^2}. \quad (6)$$

Результати розрахунків представлені на рис. 4 та 5. Оскільки формули (5) та (6) є подібними, то криві на цих рисунках презентують як σ_{c1} , так і σ_{c2} . Представлені на рис. 4, 5 залежності мають максимум, величина σ_{cm} та положення x_{1m} якого можуть бути визначені з співвідношень (5) або (6) таким чином:

$$x_{1m} = \frac{R_1^2 - 1}{\beta}, \quad \sigma_{cm} = \frac{2\beta^2 \ln \beta}{1 - R_1^2}. \quad (7)$$

На рис. 4, 5 видно стрімке спадання σ_{cm} при зменшенні параметра β та зростанні R_1 . Випадок $\sigma_c = \sigma_{cm}$ відповідає $x_1 = x_2$, тобто нульовій довжині циліндричної частини тіла. При $R_1 = 1$ критичне число кавітації не має максимуму. В цьому випадку величина x_1 не впливає на форму каверни, і відповідна крива на рис. 4 описує лише x_2 .

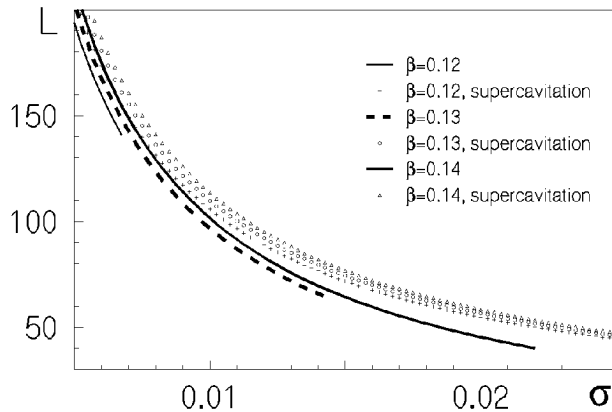


Рис. 6. Довжина каверни при $x_1 = 10$, $R_1 = 1.8$ для різних значень кута при вершині конічного кавітатора

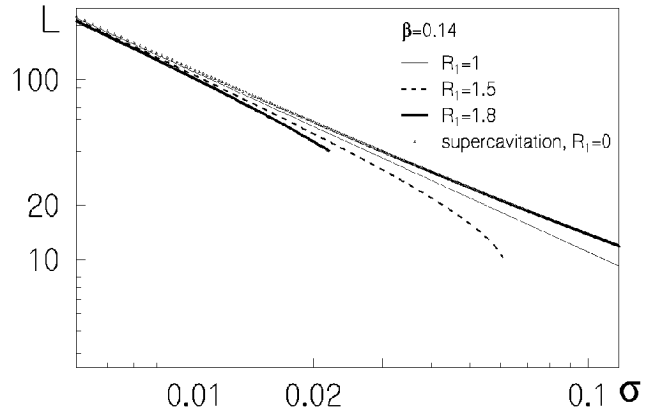


Рис. 7. Довжина каверни при $x_1 = 10$, $\beta = 0.14$ для різних значень радіуса тіла

2. ЗАМИКАННЯ КАВЕРНИ НА ЦИЛІНДРИЧНІЙ ЧАСТИНІ ТІЛА

При $\sigma_{c2} \leq \sigma \leq \sigma_{c1}$ каверна замикається на циліндричній частині. Тоді довжина каверни L може бути визначена з таких рівнянь:

$$R_1^2 = \frac{\sigma L^2}{2 \ln \beta} + 2\beta L + 1, \quad (8)$$

$$L = -\frac{2 \ln \beta (\beta + \sqrt{\beta^2 - 0.5\sigma(1 - R_1^2)/\ln \beta})}{\sigma}. \quad (9)$$

Приклади розрахунків для $x_1 = 10$, $R_1 = 1.8$ представлено на рис. 6. Лінії відповідають частковій кавітації при $\sigma \leq \sigma_{c1}$. Для порівняння маркерами наведено дані для випадку суперкавітації ($R_1 = 0$ у рівнянні (9)). З рис. 6 видно, що довжина каверни для часткової кавітації є близькою до відповідних значень у режимі суперкавітації. Такий самий результат отримано для дискового кавітатора ([1], рис. 3). Розбіжності в значеннях довжини для часткової та суперкавітації збільшуються при зростанні числа кавітації (подібно до [1, рис. 3]).

Розрахунки довжини каверни L , отримані з використанням формули (9) при $\beta = 0.14$, $x_1 = 10$ для різних значень радіуса тіла, представлені на рис. 7. Лінії відповідають частковій кавітації. Так само, як на рис. 6, показані лише значення L при $\sigma \leq \sigma_{c1}$. Для порівняння маркерами представлений випадок суперкавітації. Видно, що частковій кавітації властиві коротші каверни (порівняно із випадком суперкавітації). Те саме спостерігається для дискового кавітатора, [див. 1, рис. 9, а]. Подібно до [1, рис. 9, а] розбіжності між частковою та суперкавітацією зростають для більших σ .

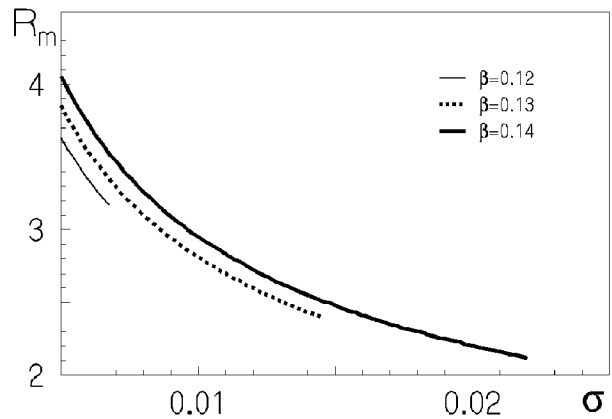


Рис. 8. Максимальний радіус каверни при $x_1 = 10$, $R_1 = 1.8$ для різних значень кута при вершині конічного кавітатора

У першому наближенні максимальний радіус каверни R_m не залежить від товщини циліндричної частини тіла і може бути знайдений з рівняння (3):

$$R_m = \sqrt{1 - \frac{2\beta^2 \ln \beta}{\sigma}}. \quad (10)$$

Вираз (10) справедливий і для випадку суперкавітації. Параметри x_1 , R_1 впливають тільки на критичні значення числа кавітації. Приклади розрахунків за формулою (10) представлені на рис. 8 для значень, що відповідають $\sigma \leq \sigma_{c1}$. З рис. 6–8 видно, що критичне число кавітації суттєво обмежує мінімальні величини L та R_m .

Умова $\sigma \leq \sigma_{c1}$ накладає обмеження також на максимальні значення R_{1m} товщини тіла R_1 при фіксованій довжині каверни L . З співвідношень

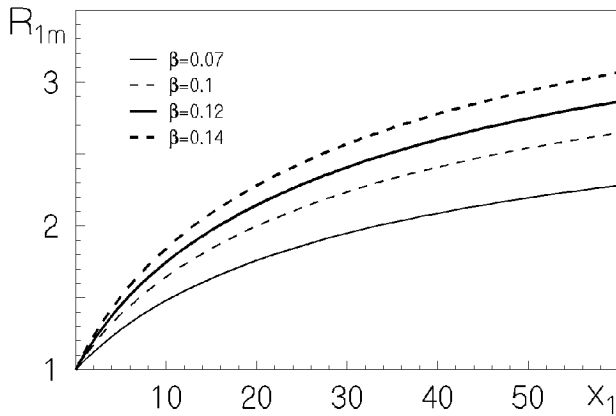


Рис. 9. Максимальне значення радіуса тіла при $L = 60$ для різних значень кута при вершині кінцевого кавітатора

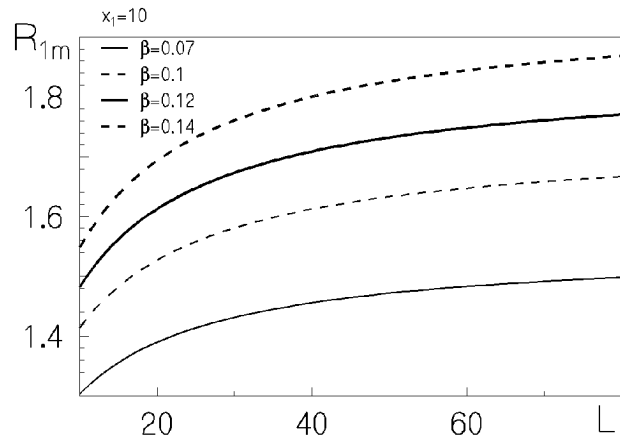


Рис. 11. Максимальний радіус каверни при $L = 60$ для різних значень кута при вершині кінцевого кавітатора

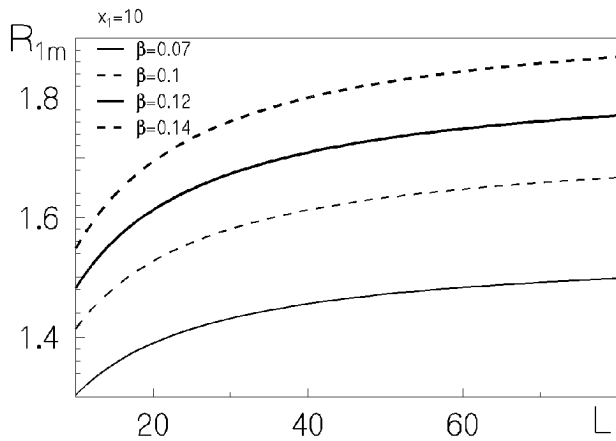


Рис. 10. Максимальне значення радіуса тіла при $x_1 = 10$ для різних значень кута при вершині кінцевого кавітатора

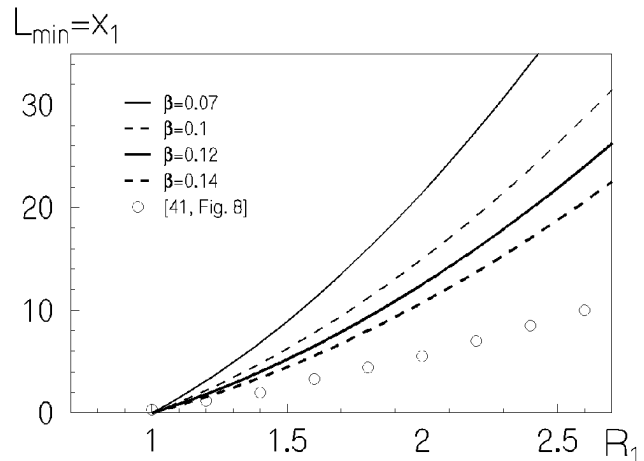


Рис. 12. Мінімальна довжина каверни для різних значень кута при вершині кінцевого кавітатора

(3), (5) випливає проста формула:

$$R_{1m}^2 = 1 + \frac{2\beta L x_1}{L + x_1}, \quad (11)$$

розрахунки за якою представлені на рис. 9 (для фіксованої величини $L = 60$) і на рис. 10 (для $x_1 = 10$). Залежності максимального радіуса каверни від радіуса циліндричної частини тіла для $L = 60$ та $R_1 < R_{1m}$ показані на рис. 11.

Ймовірно, критичне число кавітації обмежує максимальний радіус тіла (див. [1, рис. 5], де було одержане значення $R_{1m} = 2.6$ при $L = 60$). Якщо каверни, представлені в [1, рис. 5], розраховані при $x_1 = 10$ (на жаль, автори не наводять докладної інформації щодо цього), то величину $R_{1m} = 1.84$ (див. рис. 9, 10 або рівняння (11)), що отримана для найтовстішого конуса $\beta = 0.14$,

слід узяти для порівняння зі значенням $R_{1m} = 2.6$, розрахованим в [1] для диска.

У [1, рис. 8] показано залежність мінімальної довжини каверни L_{min} від радіуса тіла R_1 , одержану чисельно (при довжинах каверни, менших від L_{min} , втрачалась збіжність використаного в [1] методу). Даний результат також можна пояснити впливом критичного числа кавітації. Дійсно, каверна, що замикається на циліндричній частині, не може бути коротшою x_1 . З іншого боку, число кавітації для неї не може бути від'ємним (за принципом стійкості задач математичної фізики, див. [3, 4] та розділ 4 даної статті). Тоді з рівняння (3) можна отримати наступну залежність мінімального значення x_1 від радіуса тіла R_1 :

$$R_1^2 = 1 + 2\beta x_1, \quad L_{min} = x_1 \quad (12)$$

(дане значення x_1 одержується саме при мінімально-можливному нульовому числі кавітації).

Проста залежність (12) представлена на рис. 12. Для порівняння маркерами показані дані для диска з [1, рис. 8]. Видно, що для товстіших конусів (більших значень параметра β) функція $L_{min} = x_1(R_1)$ наближається до точок, що відповідають дискові.

3. ЗАМИКАННЯ КАВЕРНИ НА КОНІЧНІЙ ЧАСТИНІ ТІЛА

У випадку, коли каверна замикається на ділянці $0 < x < x_1$, її довжина (що вимірюється вздовж осі симетрії) може бути визначена з рівняння

$$\frac{\sigma L^2}{2 \ln \beta} + 2\beta L + 1 = (1 + \beta_1 L)^2, \quad (13)$$

оскільки форма каверни в першому наближенні описується рівнянням (3), а конічна частина тіла – рівнянням $R(x) = 1 + \beta_1 x$. Із співвідношення (13) випливає, що

$$L = \frac{4 \ln \beta (\beta_1 - \beta)}{\sigma - 2\beta_1^2 \ln \beta}. \quad (14)$$

Приклади розрахунків за рівнянням (14) для $\beta = 0.1$ та різних значень β_1 наведені на рис. 13. Лініями представлені випадки часткової, а маркерами – суперкавітації ($R_1 = 0$ в рівнянні (9)). Видно, що у випадку часткової кавітації каверна набагато коротша, ніж для суперкавітаційного режиму (подібно до дискового кавітатора [див. 1, рис. 10]). Слід відзначити, що для часткової кавітації, утвореної конусом, можливі від'ємні числа кавітації, оскільки довжина каверни в цьому випадку є неперервною функцією σ (див. рис. 13), і принцип стійкості ([див. 3, 4] та розділ 4 даної статті) не порушується.

Особливу увагу слід звернути на ситуацію, коли кінець каверни проходить через лінію перетину конічної та циліндричної частин тіла ($x = x_1$). Приклади наведені на рис. 14, 15. Варто відзначити два характерні випадки проходження кінцем каверни точки $x = x_1$, які залежать від координати міделя каверни x_m . Перший випадок відповідає $x_m < x_1$ і зображений на рис. 14, з якого видно, що довжина каверни міняється неперервно. Абсолютно відмінною є ситуація $x_m > x_1$, яка показана на рис. 15. Для чисел кавітації, більших критичного ($\sigma > \sigma_{c1} = 0.035$), каверна замикається на циліндричній частині і її довжина є неперервною. При $\sigma = \sigma_{c1}$ каверна перетинає контур тіла двічі (див.

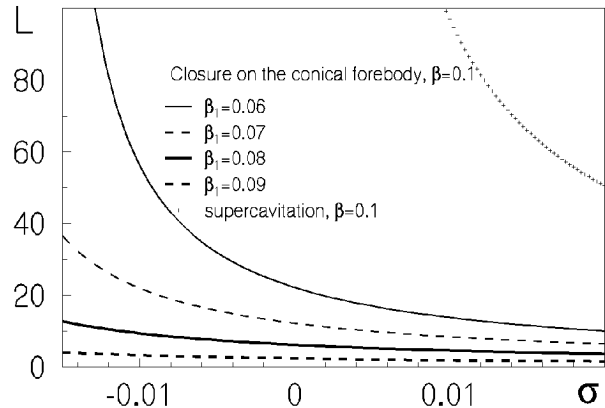


Рис. 13. Довжина каверни при $\beta = 0.1$ та різних значеннях β_1

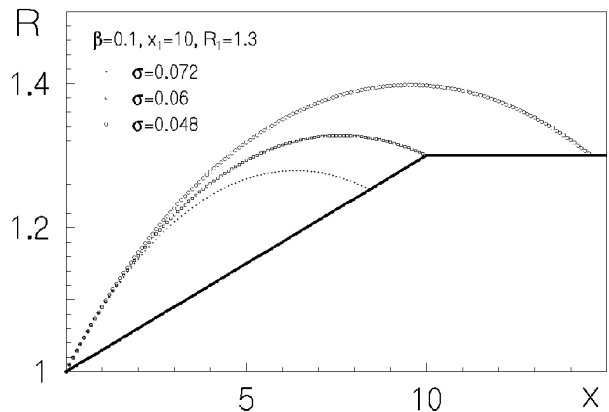


Рис. 14. Контури каверни при $\beta = 0.1$, $x_1 = 10$, $R_1 = 1.3$ для різних значень числа кавітації

рис. 15). Через це виникає "стрибок" у довжині каверни при $L = x_1$.

Цей "стрибок" можна побачити на рис. 16, 17 для величини $x_1 = 25$. Довжина каверни збільшується більше, ніж вдвічі при $\sigma = \sigma_{c1}$. Дані факти дозволяють пояснити відсутність чисельних розв'язків для деяких значень x_1 та довжини каверни, на що зверталась увага в [1]. Величина $x_1 = 25$ для каверни з параметрами $\beta = 0.14$, $R_1 = 2.4$ (рис. 16, 17) відповідає випадкові $x_m > x_1$, показаному на рис. 15. Величини параметрів $x_1 = 35$, $\beta = 0.14$, $R_1 = 2.4$ властиві випадкові $x_m < x_1$ (подібний приклад зображений на рис. 14), і довжина каверни є неперервною при $\sigma = \sigma_{c1}$ (див. рис. 16, 17). Подібну поведінку можна побачити в [1, рис. 11] для більших значень x_1 .

Слід відзначити, що при $\sigma = \sigma_{c2}$ функція $L(\sigma)$ також має розрив (див. рис. 17). "Стрибок"

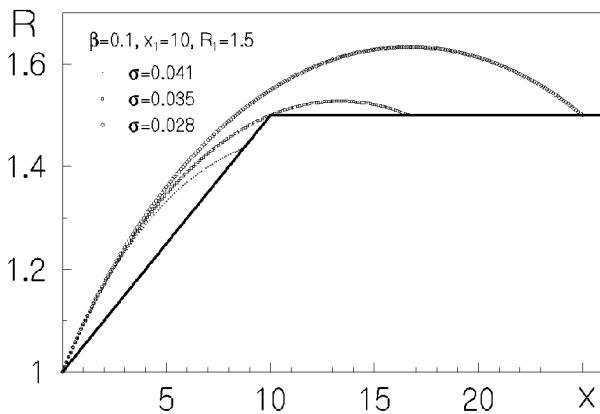


Рис. 15. Контури каверн при $\beta = 0.1$, $x_1 = 10$, $R_1 = 1.5$ для різних значень числа кавітації

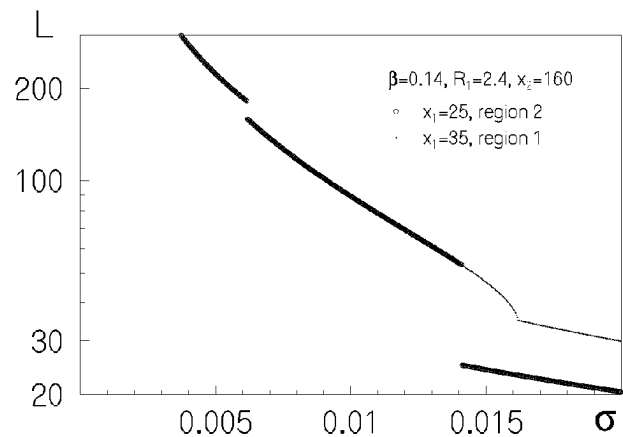


Рис. 17. Довжина каверни при $\beta = 0.14$, $R_1 = 2.4$ та різних значеннях x_1

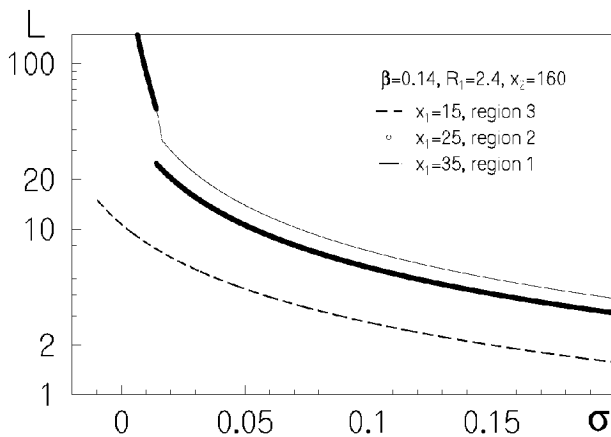


Рис. 16. Довжина каверни при $\beta = 0.14$, $R_1 = 2.4$ та різних значеннях x_1

довжини каверни в цій точці відбувається для довільних значень x_1 . Виняток становить лише випадок дуже малих x_1 , для яких довжина каверни може досягти значення x_1 лише при від'ємних числах кавітації. Це означає, що довжина каверни обмежена величиною x_1 , оскільки каверна з $\sigma < 0$ не може вийти за лінію перетину конічної та циліндричної частин тіла.

4. ОПУКЛІ ТА УВІГНУТІ КАВЕРНИ

Відповідно до принципу Брилюєна (див., наприклад, [10]) каверна в ідеальній нестисливій невагомій рідині повинна бути опуклою. Даний висновок впливає з припущення про те, що мінімум тиску досягається на поверхні каверни. Зокрема, звичною формою просторових каверн при великих

числах Фруда є еліпсоїдоподібна, [8–12]. Властивості гармонічних функцій свідчать про мінімальність тиску на межі течії (на твердому тілі або на вільній поверхні). До висновку про найменше значення тиску саме на поверхні каверни призводить таке міркування: якби мінімум тиску досягався в деякій точці поверхні твердого тіла, то кавітація почалася би саме в цій точці, отже найменше значення тиску все одно досягалось би на поверхні каверни.

Дане пояснення, однак, не стосується штучної кавітації, коли порожнина в рідині утворюється за рахунок піддуву до неї газу, адже подібного кавітаційного режиму можна досягти при невеликих швидкостях, недостатніх для виникнення парової кавітації та поверхні тіла. Інше заперечення принципу Брилюєна випливає з того, що кавітація не обов'язково починається в точці мінімального тиску і її виникнення сильно пов'язане з відривом примежового шару, [13], якого можна уникнути за рахунок спеціально підбраної форми тіла, [13, 14]. Особливо цікавою є робота [15], де в експериментах присутні дві гладкі поверхні, виготовлені з однакового матеріалу – верхня невикривлена та нижня циліндрична – з приблизно однаковим розподілом тиску, але кавітація виникає лише на викривленій поверхні і саме в точці відриву примежового шару.

Наведені міркування про обмеженість принципу Брилюєна вимагають досліджень усіх можливих форм каверн, а не тільки опуклих. Зручним засобом для цього є рівняння першого наближення (3) через його простоту. Подальший аналіз використовує саме це співвідношення, що описує форму осесиметричної каверни в проведеному через вісь симетрії перерізі як криву другого порядку,

хоча одержані висновки підтверджуються нелінійними постановками, і властиві також плоским симетричним кавітаційним течіям. Розглянемо поспідовно всі можливі випадки.

Випадок 1. $\sigma > 0$.

Рівняння (3) можна перетворити до такого вигляду:

$$\frac{R^2}{b^2} + \frac{(x - L_m)^2}{a^2} = 1, \quad L_m = -\frac{2\beta \ln \varepsilon}{\sigma}, \quad (15)$$

$$b^2 = 1 - \frac{2\beta^2 \ln \varepsilon}{\sigma}, \quad a^2 = -\frac{2\ln \varepsilon}{\sigma} + \beta^2.$$

Співвідношення (15) є канонічним рівнянням еліпса, отже при додатніх числах кавітації каверни є частинами еліпсоїдів незалежно від значень похідної в точці сходу струменів β . Всі вони можуть бути реалізовані як у випадку супер-, так і часткової кавітації. Приклади останніх наведені на рис. 1, 14, 15.

Випадок 2. $\sigma = 0$.

Рівняння (3) набуває вигляду

$$R^2 = 2\beta x + 1 \quad (16)$$

і описує опуклу догори параболу, яка, однак, реалізується далеко не завжди. Розглянемо окремі значення параметра β .

Випадок 2.1. $\sigma = 0, \beta > 0$.

Для суперкавітації дана комбінація параметрів не відповідає жодній реальній течії через порушення принципу стійкості рівнянь математичної фізики, згідно з яким малі зміни параметрів, що визначають розв'язок, повинні призводити до малих змін цього розв'язку. Дійсно, при будь-яких додатніх числах кавітації еліптична каверна є обмеженою, а для $\sigma = 0$ вона стає необмеженим параболоїдом (останнє впливає з рівняння (16) при $\beta > 0$). Даний факт зазначався ще в [3].

Якщо каверна замикається на циліндричній частині тіла, то нульове і відповідно від'ємні числа кавітації також недосяжні із зазначених вище міркувань. Але при замиканні на кінчну частину тіла при переході через нульове число кавітації розміри каверни міняються неперервно (див. рис. 13), тому принцип стійкості не порушується, і слід очікувати реалізації течій з нульовим числом кавітації. Приклад контуру каверни на розглянутому в попередніх розділах тілі при $\sigma = 0$ показано на рис. 18. Каверна замикається на кінчній частині і має обмежені розміри як при додатніх, так і при від'ємних числах кавітації.

Випадок 2.2. $\sigma = 0, \beta < 0$.

Від'ємні значення параметра $\beta < 0$ призводять до обмежених розмірів тієї частини параболоїда, що

відповідає каверні ($x > 0$), тому принцип стійкості не порушується, і подібні каверни реалізуються як для випадку супер-, так і часткової кавітації. Приклад такої суперкаверни розраховано в [2].

Випадок 2.3. $\sigma = 0, \beta = 0$.

Для суперкавітації всі висновки для даних значень параметрів збігаються з випадком 2.1 (тобто можна стверджувати, що нульові числа кавітації неможливі для суперкавітаційних течій з $\beta \geq 0$). Але цікавим є випадок часткової кавітації. Тривіальний розв'язок рівняння (3) $R = 1$ збігається з точними розв'язками для плоского та осесиметричного потоку вздовж нескінченної стінки або нескінченно довгого циліндра. Якщо на такій поверхні утворити канавку і заповнити її газом з тиском, рівним тискові на нескінченності, то поверхня каверни нічим не відрізнятиметься від поверхні твердого тіла.

Випадок 3. $\sigma < 0$.

Рівняння (3) відповідає тепер гіперболі, яка може бути опуклою або увігнутою в залежності від величин параметрів β, ε . Розглянемо три можливі випадки.

Випадок 3.1. $0 > \sigma > 2\beta^2 \ln \varepsilon$.

Рівняння для твірної каверни набуває вигляду

$$\frac{(x - L_m)^2}{a^2} - \frac{R^2}{b_1^2} = 1, \quad b_1^2 = -b^2 \quad (17)$$

і описує опуклу гіперболу, яка має скінченні розміри лише при $\beta < 0$. Відповідно тільки для від'ємних значень β можна очікувати реалізації суперкавітаційної течії з гіперболоподібною каверною. Відповідний приклад розрахований в [2].

Якщо каверна замикається на циліндричній частині тіла, то від'ємні числа кавітації (подібно до $\sigma = 0$, випадки 2.1, 2.3) також недосяжні з міркувань стійкості. Але при замиканні на кінчну частину тіла при переході через нульове число кавітації розміри каверни міняються неперервно (див. рис. 13), тому принцип стійкості не порушується, і слід очікувати реалізації течій з від'ємними числами кавітації. Приклад контуру опуклої гіперболічної каверни при $\sigma = -0.007$ показано на рис. 18.

Випадок 3.2. $\sigma < 2\beta^2 \ln \varepsilon$.

Рівняння (3) можна привести до вигляду

$$\frac{R^2}{b^2} - \frac{(x - L_m)^2}{a_1^2} = 1, \quad a_1^2 = -a^2. \quad (18)$$

Воно описує увігнуту гіперболу, яка ніколи не перетинає вісь x ($R \geq b$), тому суперкавітаційний режим або замикання на циліндричній частині тіла, зображеного на рис. 1, в цьому випадку немож-

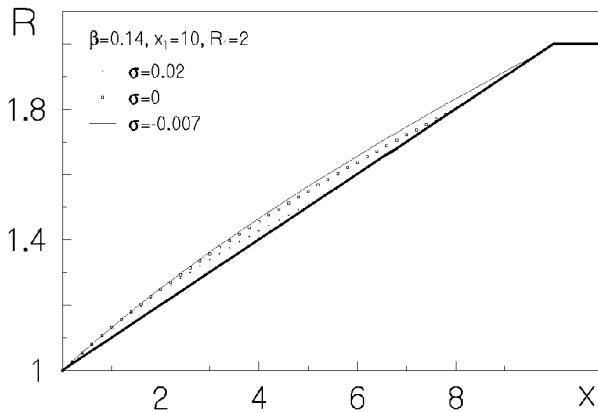


Рис. 18. Контури каверн при $\beta = 0.14$, $R_1 = 2$, $x_1 = 10$ та різних значеннях числа кавітації

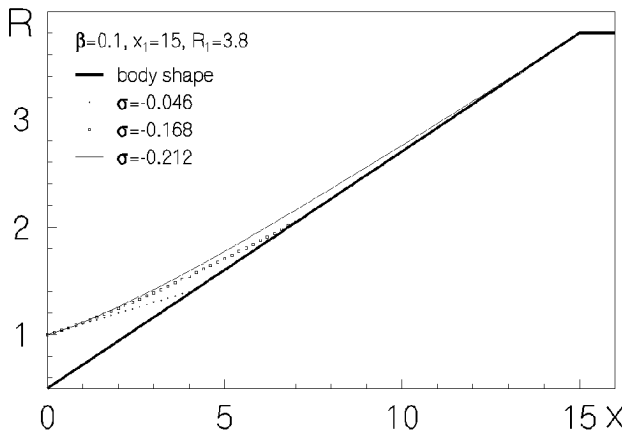


Рис. 19. Контури каверн при $\beta = 0.1$, $R_1 = 3.8$, $x_1 = 15$ та різних значеннях числа кавітації

ливі. Якщо каверна замикається на кінчну частину тіла, то принцип стійкості не порушується. Приклади розрахунків увігнутих гіперболічних каверн наведені на рис. 19. Каверна замикається на кінчну частину, що описується рівнянням $R = 0.5 + \beta_1 x$.

Варто зауважити, що для каверн, утворених диском або товстим конусом, даний режим, ймовірно, не реалізується, оскільки вимагає дуже великих за модулем від'ємних чисел кавітації, а з фізичних міркувань $\sigma > -1$.

Увігнуті форми плоскої каверни отримав Р. Еплер [16] (див. також [10]), який розглядав обтікання кругового циліндра за схемою Рошка-Жуковського. Якщо похідна в точці початку каверни додатня (до міделя циліндра), то каверна Еплера є опуклою (подібною до показаних на рис. 1, 14, 15). Якщо каверна відривається після міде-

ля циліндра, то вона може бути або увігнутою, або мати точки мінімуму та перегину. В статті [5] подібні плоскі та осесиметричні каверни розраховані з використанням симетричної схеми Рябушинського.

Випадок 3.3. $\sigma = 2\beta^2 \ln \epsilon$.

Рівняння (3) набуває вигляду

$$R = \beta \left(x + \frac{1}{\beta} \right), \quad (19)$$

який свідчить про кінчну форму каверни, яка перетинає вісь x лише при від'ємних значеннях параметра β . Тому для $\beta < 0$ цей випадок відповідає мінімальному значенню числа кавітації, при якому можливий суперкавітаційний режим. Вперше мінімальне значення числа кавітації $\sigma_m = 2\beta^2 \ln \epsilon$ та прямолінійна форма твірної каверни були отримані в [2].

Якщо $\beta \geq 0$, то каверну (19) можна реалізувати лише в режимі часткової кавітації. Приклад розрахунку кінчної каверни наведений на рис. 19 ($\sigma = -0.046$). Варто зазначити, що строго кінчна форма каверни може існувати лише в першому наближенні. Точні постановки або наступні наближення можуть давати близькі, але викривлені поверхні.

Використаємо наведену класифікацію можливих форм каверн для опису характерних областей параметрів x_1 і R_1 , показаних на рис. 20. Крива $R_1^2 = 1 + \beta x_1$ відповідає випадкові $x_m = x_1$ і розділяє каверни зі "стрибком" довжини при $\sigma = \sigma_{c1}$ та без нього. В першій області (нижче цієї кривої) каверна має форму, подібну до зображеної на рис. 14, та її довжина є неперервною. Приклад каверни з другої області показаний на рис. 15. Таким кавернам властивий "стрибок" довжини при $\sigma = \sigma_{c1}$.

Наступна крива $R_1^2 = 1 + 2\beta x_1$ відповідає нульовому числу кавітації для каверни з $L = x_1$, тому в областях 3 та 4 (вище цієї кривої) можливі лише каверни, що замикаються на кінчній частині тіла (випадки 3.1, 3.2 та 3.3 з прикладами, показаними на рис. 18 та 19). Пряма лінія $R_1 = 1 + \beta x_1$ розділяє області 3 та 4. Нижче цієї кривої (області 1, 2 та 3) всі можливі каверни є опуклими (див. рис. 14, 15, 18). В області 4 каверни набувають увігнутої форми (випадок 3.2 з прикладами, зображеними на рис. 19). Якщо параметри x_1 , R_1 задовольняють рівнянню $R_1 = 1 + \beta x_1$, то число кавітації не можна зменшити до величини, меншої $\sigma_m = 2\beta^2 \ln \epsilon$. Це критичне значення числа кавітації відповідає кінчній каверні (випадок 3.3 з прикладом на рис. 19), яка замикається в точці x_1 .

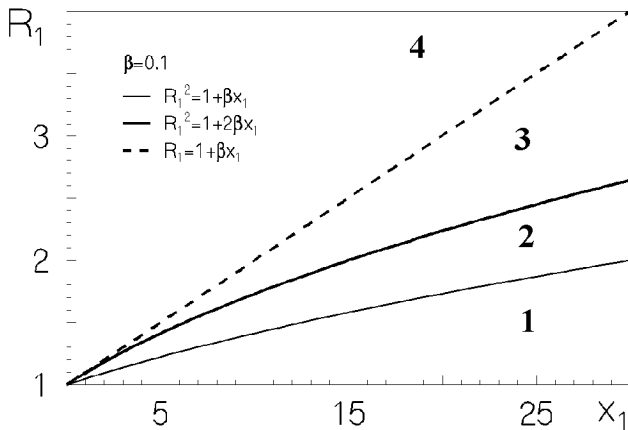


Рис. 20. Характерні області параметрів R_1 та x_1 для $\beta = 0.1$

5. ПЕРСПЕКТИВИ ЗМЕНШЕННЯ ОПОРУ ВИСОКОШВИДКІСНИХ ТІЛ ЗА ДОПОМОГОЮ КАВІТАЦІЇ

Контрольований кавітаційний режим обтікання може використовуватись для зменшення опору тертя, оскільки тоді значна частина поверхні тіла контактує лише з газом, густина якого майже у 800 разів менша порівняно з водою. Розглянемо спочатку випадок суперкавітації. Для оцінки переваг цього режиму обмежимося дисковим кавітатором і будемо вважати корисним об'ємом V весь об'єм каверни. Тоді об'ємний коефіцієнт опору визначається формулою

$$C_V = \frac{2X}{\rho U_\infty^2 V^{2/3}} = \left(\frac{9\pi\sigma^4}{-16\ln\sigma} \right)^{1/3} \quad (20)$$

(X – повний опір, який для дискового кавітатора збігається з опором тиску). Рівняння (20) одержано в [17] з використанням напівемпіричних залежностей [12].

Варто зауважити, що за формулою (20) об'ємний коефіцієнт опору диска залежить лише від числа кавітації і прямує до нуля при його зменшенні швидше, ніж $\sigma^{4/3}$. Подібна поведінка властива також залежностям $C_V(\sigma)$ для тонких конусів, що було продемонстровано в статтях [17,18].

Дуже малим числам кавітації відповідають великі видовження каверни $\lambda = L_m/R_m$. Оскільки контур суперкавітуючого тіла має бути вписаним у каверну, то транспортний засіб повинен мати якнайбільше видовження. Існують однак конструктивні міркування, що обмежують значення видовження корпусів транспортних засобів. Нехай максимальне значення λ дорівнює 20 (див.

[19]). Тоді за формулами роботи [12] мінімально допустиме число кавітації для диска становить приблизно 0,01, а рівняння (20) дає мінімально можливе значення об'ємного коефіцієнта опору $C_V(0, 01) = C_{Vmin} = 0, 00157$.

Цікаво порівняти отриману величину з опором традиційних тіл (без використання кавітації). Зокрема, для підводного апарату "DOLPHIN" фірми North American Aviation [20] було досягнуте значення $C_V = 0.007$ при $Re_V = 8500000$. Порівняння, здавалось би, однозначно свідчить на користь кавітаційного режиму, але не слід забувати, що реальний апарат "DOLPHIN" має додатковий опір стабілізаторів і він не обов'язково є оптимальним, хоча і показав менший опір, порівняно з не-ламінаризованими формами корпусів.

Що стосується теоретичних розрахунків традиційних осесиметричних оптимальних форм, то варто відзначити протиріччя між чисельними результатами Лутца і Вагнера [21], що пропонують "оптимальне" тіло зі значенням опору, майже втричі більшим ніж C_V реального апарату "DOLPHIN" для того ж діапазону чисел Рейнольдса. Даний факт, а також непрозорість методів комп'ютерної гідромеханіки спонукали звернутись до теоретичних оцінок опору тертя видовжених осесиметричних тіл, що обтікаються у безвідривному режимі. Огляд результатів зусиль автора в цьому напрямку наведений в [14, 22].

Зокрема, для чисто ламінарного обтікання одержано формулу

$$C_V = \frac{4.708}{\sqrt{Re_V}}, \quad Re_V = \frac{U_\infty V^{1/3}}{\nu}, \quad (21)$$

яка добре узгоджується з даними, узагальненими в [23]. Розрахунки за формулою (21) свідчать, що в діапазоні $500000 < Re_V < 5000000$ кавітаційний режим забезпечує менший опір, але число кавітації при цьому не повинно сильно відрізнятись від мінімально допустимого з конструктивних міркувань значення 0,01.

Високошвидкісним об'єктам властиві набагато більші числа Рейнольдса з турбулентним приміжовим шаром. Зокрема, для чисто турбулентного випадку в [22] запропоновано таку формулу:

$$C_V = 0.087 \frac{\varepsilon^{10/21}}{Re_V^{1/7}}, \quad (22)$$

яка дає значно менші значення опору тертя порівняно з відомими залежностями Хорнера [23], що не враховують особливостей осесиметричних тіл і використовують турбулентний коефіцієнт опору

пластинки. Разом з тим, формули Хорнера отримані шляхом узагальнення експериментальних даних і добре описують повний опір осесиметричних тіл. Тому відмінності від залежності (22) можна пояснити додатковим опором, що виникає внаслідок відриву примежового шару, і який Хорнер неправомірно приписує до опору турбулентного тертя. Даний факт дозволив зробити в [24] висновок про забезпечення безвідривного режиму обтікання як основного резерву зменшення опору тонких осесиметричних тіл.

Варто відзначити, що формула (22) дозволяє пояснити парадокс Грея [20] про неправдоподібно великі енергетичні можливості дельфінів, що можуть розвивати швидкість, більшу 10 м/с, яка на твердих тілах подібної форми відповідає турбулентному режиму обтікання. При цьому для ламінарного примежового шару оцінки за формулами, близькими до (21), дають правдоподібні оцінки. Тому було піддано сумніву наявність турбулентного режиму на тілі морських тварин або саму величину максимальної швидкості плавання [20].

Оцінки ламінарного опору тіла з об'ємом $0,55 \text{ м}^3$ і видовженням $\lambda = 5$ ($\varepsilon = 0.1$) дають за формулою (21) на швидкості 10 м/с ($Re_V = 6300000$) значення $C_V = 0.00188$. Для чисто турбулентного обтікання з рівняння (22) можна одержати $C_V = 0.0031$, а за оцінками Хорнера або інших авторів, які не враховують особливості осесиметричного примежового шару, – приблизно в 5, 6 разів більшу величину. Отже, якщо тіла дельфінів обтікаються без відриву примежового шару, ламінарний і турбулентний опір на максимальних швидкостях відрізняються тільки на 60–70% (а не майже на порядок, як цього вимагають оцінки Хорнера [23]). Таким чином можна усунути парадокс Грея.

На відміну від ламінарного випадку (де величина C_V за формулою (21) інваріантна щодо форми тонкого осесиметричного тіла), турбулентний опір відповідно до рівняння (22) зменшується для тонких тіл. Якщо взяти максимально допустиме тонке тіло з $\lambda = 20$ ($\varepsilon = 0,025$), то оцінка (22) дає значення $C_V < 0.0015$ для $Re_V > 10^7$. Тобто, для високошвидкісних об'єктів видовжені безвідривні форми корпусів забезпечують менший опір, ніж суперкавітаційний режим обтікання.

У зв'язку з цим виникає інтерес до випадку часткової кавітації та нетрадиційних (нееліптичних) каверн. Якщо каверна гладко замикається на тілі, то через парадокс Даламбера сумарний опір тиску дорівнюватиме нулю, і при її достатньо великій площі можна досягти значного виграшу в опорі тертя. Тому дуже цікавим є випадок 2.3,

тобто майже циліндричні (або майже прямолінійні в плоскому потоці) каверни, утворені на видовжених тілах. Але реалізація цього випадку потребує вирішення питання про безвідривний режим обтікання на частині, що передує каверні, та на твердій поверхні, розташованій поза нею. Можливо корисними будуть теоретичні та експериментальні дослідження безвідривних форм, виконані в [4, 13, 14, 22], але дане питання потребує подальших досліджень.

Дуже цікавими могли би бути каверни, що не потребують твердого замкача або іншої більш екзотичної схеми замикання (наприклад, оберненого струменя). Одразу слід підкреслити обов'язкову присутність замкача для традиційних еліптичних каверн ($\sigma > 0$, випадок 1), оскільки такі каверни мають затуплену задню кромку, де втрачається придатність теорії тонкого тіла, а швидкість потоку прямує до нуля. Разом з тим випадок 3.3 дозволяє отримати каверну з гострою задньою кромкою, що робить можливим застосування теорії тонкого тіла аж до точки замикання. Можна очікувати, що подібні каверни взагалі не потребують замкача і можуть бути реалізовані без виникнення обернених струменів.

Для підтвердження цієї гіпотези була використана нелінійна постановка [5]. Приклад розрахунку наведений на рис. 21. Для числа кавітації $\sigma = -0,0041$ вдалося одержати увігнуту каверну, яка не потребує замкача, оскільки сталий тиск, що відповідає зазначеному числу кавітації, вдалося забезпечити для всіх значень радіуса каверни, більших 0,001 (відхилення тиску на поверхні каверни від величини 0,0041 не перевищували 1%).

Тіло, вписане при $x = 0$ в показану на рис. 21 каверну, разом з його частиною при $x < 0$ матиме нульовий опір тиску (через парадокс Даламбера), а значна площа контакту лише з газом дозволяє суттєво знизити опір тертя. Питання реалізації подібних течій потребують додаткових досліджень, оскільки мінімальне значення тиску досягається на поверхні тіла поблизу його міделя, що робить можливим відрив у цій області.

6. ВИСНОВКИ

Рівняння першого наближення з використанням відповідного значення параметра тонкості може забезпечувати достатню точність при розрахунках габаритних розмірів каверни, а його простота дозволила пояснити ряд закономірностей течій із частковою кавітацією, виявлених за допомогою нелінійної постановки. Зроблено систематизацію

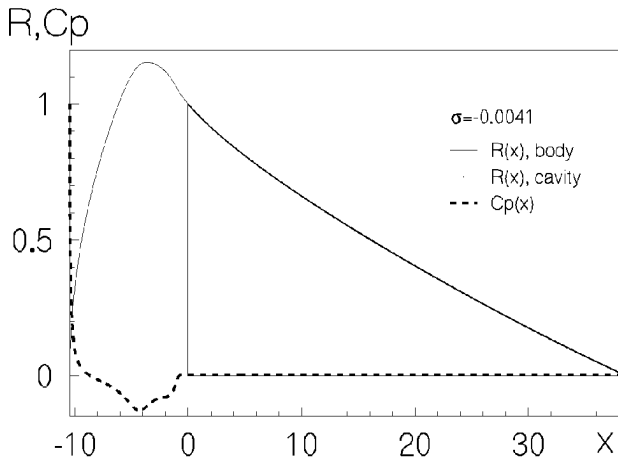


Рис. 21. Форма осесиметричного тіла ($x < 0$) та увігнутої каверни ($x > 0$), яка не потребує замикача

можливих типів форми тонких осесиметричних каверн (подібні типи, ймовірно, властиві також плоскому випадку). Особливий теоретичний інтерес викликають увігнуті каверни, які можна реалізувати для часткової кавітації, а також каверни, що не потребують замикача. Останні можуть використовуватись для суттєвого зменшення повного гідродинамічного опору високошвидкісних тіл.

- Varghese A.N., Uhlman J.S. and Kirschner I.N High-speed bodies in partially cavitating axisymmetric flow // Fifth International Symposium on Cavitation (Cav2003).– 2003.– No. Cav03-OS-7-016.– P. 1-8.
- Нестерук І.Г. К вопросу о форме тонкой осесиметричной каверны в весоной жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ.– 1979.– N 6.– С. 133-136.
- Нестерук І.Г. Об ограничениях на параметры кавитационных течений // Прикладная математика и механика.– 1986.– Т.50, вып.4.– С. 584-588.
- Nesteruk I. Influence of the flow unsteadiness, compressibility and capillarity on the long axisymmetric cavities // Fifth International Symposium on Cavitation (Cav2003).– 2003.– No. GS-6-004.– P. 1-13.
- Нестерук І.Г. Моделювання осесиметричних і плоских вільних поверхонь за допомогою джерел та диполів // Прикладна гідромеханіка.– 2003.– Т. 5(77), N 2.– С. 37-44.
- Cole J. D. Perturbation Methods in Applied Mathematics.– Waltham; Toronto; London: Blaisdell Publishing Company, 1968.– 268 p.
- Нестерук І.Г. Об определении формы тонкой осесиметричной каверны на основе интегродифференциального уравнения // Изв. АН СССР, МЖГ.– 1985.– N 5.– С. 83-90.
- Гузевський Л.Г. Численный анализ кавитационных течений // Новосибирск: СО АН СССР, Ин-т теплофизики.– 1979.– Препринт 40-79.– С. 3-36.
- Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами.– Киев: Наук.думка, 1969.– 208 с.
- Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости.– М.: Наука, 1979.– 536 с.
- Knapp R. T., Daily J.W., Hammit F.G. Cavitation.– New York: McGraw-Hill Book Co., 1970.– 687 p.
- Savchenko Yu.N., Semenenko V.N., Putilin S.N Unsteady Supercavitated Motion of Bodies // Int. J. Fluid Mech. Res.– 2000.– V. 27, No. 1.– P. 109-137.
- Nesteruk I. Subsonic Shapes without Separation and Cavitation // Вісник Київського ун-ту, фіз.-мат. науки.– 2002.– N 1.– С. 127-136.
- Nesteruk I. Can Shapes with Negative Pressure Gradients Prevent Cavitation // Proceedings of 4th ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference.– 2003.– FEDSM2003-45323.– P. 1-8.
- Takahashi S., Washio S., Uemura K. and Okazaki A. Experimental study on cavitation starting at and flow characteristics close to the point of separation // Fifth International Symposium on Cavitation (Cav2003).– 2003.– No. Cav03-OS-3-003.– P. 1-8.
- Eppler R. Beitrage zur Theorie und Anwendung der unstenigen Stroemungen // J. Rat. Mech. Anal.– 1954.– V. 3.– P. 315-325.
- Нестерук І.Г. Розрахунки опору тонких конусів з використанням другого наближення для форми утворених ними каверн // Прикладна гідромеханіка.– 2003.– Т. 5, N 1.– С. 42-46.
- Бурара О.А., Нестерук І. Г., Савченко Ю.М. Порівняння опору тонких конусів при безвідривному та суперкавітаційному режимах обтікання // Прикладна гідромеханіка.– 2002.– Т. 4(76), N 2.– С. 3-8.
- Savchenko Yu.M. Supercavitating object propulsion // Von Karman Institute for Fluid Dynamics.– February 12-16, 2001.– Lecture 3.– P. 1-25.
- Гидробионика в судостроении. Обзор Петровой И.М.– М.: ЦНИИТЭИС, 1970.– 272 с.
- Lutz Th. and Wagner S. Drag Reduction and Shape Optimization of Airship Bodies // Journ. of Aircraft.– 1998.– V. 35, 3.– P. 345-351.
- Nesteruk I. The Problems of Drag Reduction in High Speed Hydrodynamics // International Summer Scientific School "High Speed Hydrodynamics".– June 16-23, 2002.– Cheboksary, Russia.– P. 351- 359.
- Hoerner S.F.– Fluid-Dynamic Drag: MidlandPark, N.Y.– 1965 p.216
- Nesteruk I. Reserves of the hydrodynamical drag reduction for axisymmetric bodies // Вісник Київського ун-ту, фіз.-мат. науки.– 2002.– N 4.– С. 112-118.