

УДК 532.542.4

## К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ КОНЦЕНТРАЦИИ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ СУСПЕНЗИИ НА СКОРОСТЬ ИХ СЕДИМЕНТАЦИИ

С. И. КРИЛЬ, В. П. БЕРМАН

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

*Получено 03.03.2004*

Предложен новый подход к определению скорости падения множества взвешенных твердых частиц в жидкости, в основу которого положена аналогия с эффективной вязкостью суспензии. Получена простая зависимость для определения относительной скорости седиментации стоксовых частиц и установлена степень влияния объемной концентрации и формы частиц на величину этой скорости. Приведены результаты сопоставления экспериментальных значений скорости седиментации с расчетными.

Запропоновано новий підхід до визначення швидкості падіння безлічі завислих твердих частинок у рідині, в основу якого покладена аналогія з ефективною в'язкістю суспензії. Одержано просту залежність для визначення відносної швидкості седиментації стоксових частинок та встановлено ступінь впливу об'ємної концентрації і форми частинок на величину цієї швидкості. Наведені результати зіставлення експериментальних значень швидкості седиментації з розрахунковими.

The new approach to definition of velocity of falling of set of the weighed firm particles in a liquid in which basis the analogy to effective viscosity of suspension is put is offered. Simple dependence for definition of relative velocity of stokes particles sedimentation is received and the degree of influence of volumetric concentration and the form of particles is established on size of this velocity. Results of comparison of experimental values of sedimentation velocity with settlement are resulted.

### ВСТУПЛЕНИЕ

Фундаментальному исследованию скоростей оседания взвешенных в жидкости твердых частиц посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ. Полный и последовательный обзор работ, опубликованных в зарубежной литературе в период до середины 60-х годов прошлого столетия, представлен в [1]. К более поздним работам, вплоть до настоящего времени, относятся, в частности [2–11]. В теоретических работах скорость седиментации исследуется, как правило, в рамках гидродинамики медленных течений вязкой жидкости, характеризующихся малыми числами Рейнольдса. Иначе говоря, течение жидкости относительно падающих частиц рассматривается ламинарным и достаточно медленным, чтобы при решении уравнений Навье-Стокса можно было не учитывать инерционные эффекты.

Согласно результатам выполненных исследований, на уровне микроструктуры суспензии процесс оседания твердых частиц под действием, например, силы тяжести, в общем-то, довольно сложный. Степень гидродинамического взаимодействия седиментируемых частиц между собой зависит в общем случае от многих параметров, в частности, от формы и размеров частиц и расстояний между ними; ориентации каждой частицы относительно направления силы тяжести; ско-

ростей поступательного и вращательного движения частиц по отношению к жидкости на бесконечности. Процесс оседания суспензии значительно усложняется в случаях броуновских и полидисперсных частиц. На скорость оседания могут влиять также стенки, ограничивающие суспензию.

Известно большое количество формул для определения скорости седиментации, полученных разными авторами для различных ситуаций гидродинамического взаимодействия частиц между собой и с ограничивающими суспензию стенками. Однако, несмотря на корректность постановок и решения краевых гидродинамических задач и принятия тех или других физически приемлемых гипотез, связанных с определением скорости седиментации, многие из полученных формул находятся в не совсем удовлетворительном согласии с опытными данными.

Ниже предлагается простая формула седиментационной скорости, которая получена на основе аналогии с вязкостью суспензии и вполне удовлетворительно согласуется с результатами экспериментов. Однако, прежде чем перейти к ее выводу, проанализируем результаты теоретической работы [2], в которой исследовано гидродинамическое взаимодействие частиц, медленно перемещающихся относительно жидкости в концентрированных дисперсных системах, и получено выражение силы вязкого сопротивления, действующей на каждую

из частиц.

В [2] рассматриваются сферические стоксовы частицы радиуса  $a$ , равномерно распределенные в вязкой безграничной жидкости, которая покоится на бесконечности. Для определения вышеуказанной силы вязкого сопротивления используется ячеечная модель. Область, заполненная суспензией, разбивается на ряд одинаковых ячеек, причем в каждой из них находится ровно одна частица. Предполагается, что ячейки сферические и концентрические с частицей. Радиус ячейки  $b$  определяется из условия, что внутри нее объемная концентрация твердой фазы равняется средней объемной концентрации суспензии  $C$ . В этом случае  $b/a = C^{-1/3}$ , хотя в [2] используется более общее выражение

$$\frac{b}{a} = KC^{-1/3}, \quad (1)$$

где  $K$  – поправочный коэффициент, близкий к единице. Возмущения течения, вносимые отдельной частицей, локализованы в пределах объема ячейки, так что наличие соседних частиц вне ячейки не влияет на возмущенное течение внутри нее. Математически это выражается в задании на поверхности ячейки условия равенства нулю радиальной составляющей скорости возмущения, вносимого частицей в соответствующей ей ячейке. Внутри кольцевого слоя  $a < r < b$  возмущенное течение жидкости удовлетворяет линеаризованным уравнениям Навье-Стокса. Решение этих уравнений в сферических координатах получается в замкнутом виде и учитывает посредством вышеуказанного граничного условия на поверхности ячейки концентрацию суспензии  $C$ . На основе полученного решения в [2] найдено следующее выражение для силы вязкого сопротивления  $F$ , действующей на одну частицу:

$$F = 6\pi\mu_0 aU \left( 1 + \frac{5}{3}M(\psi) \right), \quad (2)$$

$$M(\psi) = \frac{\psi^3(3 - \psi^2)}{2 - 5\psi^3 + 3\psi^5}, \quad \psi = \frac{a}{b} = \frac{1}{K}C^{1/3}, \quad (3)$$

где  $\mu_0$  – динамическая вязкость жидкости;  $U$  – скорость перемещения частиц относительно жидкости. Как видим, весь эффект влияния объемной концентрации твердых частиц на силу  $F$  заключен в величине  $5/3M(\psi)$ .

Анализ выражения (2) показывает, что в случае установившегося гравитационного оседания твердых частиц суспензии, когда сила тяжести, действующая на частицу с учетом выталкивающей силы, уравновешивается силой вязкого сопротивления, величина  $5/3M(\psi)$  не может рассматри-

ваться в качестве поправки к скорости  $U$ , поскольку с ростом объемной концентрации суспензии в опытах наблюдается уменьшение скорости  $U$ , тогда как вышеуказанная величина в этом случае увеличивается. Единственным параметром, по отношению к которому величину  $5/3M(\psi)$  можно рассматривать в качестве поправки, является вязкость жидкости  $\mu_0$ . Поэтому величина  $(1 + 5/3M(\psi))$  должна физически трактоваться как отношение вязкости суспензии  $\mu$  к вязкости жидкости  $\mu_0$ , т. е.

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left( 1 + \frac{5}{3}M(\psi) \right). \quad (4)$$

Правомочность вышесказанного подтверждается также тем, что модели, близкие к ячейочной в [2], использовались разными исследователями, в частности, Симхой и Хаппелем, для вычисления вязкости суспензий [1]. Все это говорит о том, что выражение (2) можно переписать в виде

$$F = 6\pi\mu aU. \quad (5)$$

Следовательно, при вычислении силы вязкого сопротивления, действующей на каждую из твердых частиц, перемещающихся с постоянной скоростью  $U$  относительно жидкой фазы, нужно учитывать вязкость суспензии. При этом степень достоверности формулы (5) применительно к той или другой ситуации гидродинамического взаимодействия частиц друг с другом и с ограничивающими суспензию стенками будет однозначно определяться степенью достоверности используемой формулы для вязкости суспензии применительно к той же ситуации.

Таким образом, если основываться на аналогии с вязкостью суспензии, то задача определения скорости оседания твердых частиц при их объемной концентрации  $C$  сводится к задаче определения скорости оседания одной частицы в некоторой жидкости, вязкость и плотность которой равняются вязкости и плотности суспензии. Понятно, что полученная таким образом формула для определения скорости седиментации будет учитывать влияние концентрации на эту скорость.

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ СЕДИМЕНТАЦИИ НА ОСНОВЕ АНАЛОГИИ С ВЯЗКОСТЬЮ СУСПЕНЗИИ

Пусть взвешенные в жидкости мелкие сферические частицы радиуса  $a$  под действием силы тяжести падают стационарно со скоростью  $U$ . Будем

полагать, что жидкость неограниченна и покоится на бесконечности, а твердые частицы распределены в ней практически равномерно. Поскольку рассматриваемая суспензия находится в квазистатическом состоянии и взвешенные частицы передают свой вес жидкости, градиент осредненного давления в ней  $\nabla P$  будет:

$$\nabla P = -\rho g, \quad \rho = \rho_0 + (\rho' - \rho_0)C,$$

где  $\rho_0$ ,  $\rho'$  и  $\rho$  – плотность жидкости, твердых частиц и суспензии;  $g$  – ускорение свободного падения.

На каждую из частиц суспензии действуют: сила тяжести  $G$ ,

$$G = \rho' g \frac{4}{3} \pi a^3;$$

выталкивающая сила  $R$ ,

$$R = \int_V \nabla P dV = -\rho g \frac{4}{3} \pi a^3;$$

сила вязкого сопротивления  $F$ ,

$$F = -6\pi\mu aU.$$

Из равенства нулю алгебраической суммы всех этих сил вытекает выражение для скорости седиментации

$$U = \frac{2}{9}(\rho' - \rho_0)ga^2 \frac{1-C}{\mu}. \quad (6)$$

В случае падения с постоянной скоростью  $U_0$  одиночной частицы в неограниченной однородной жидкости, которая покоится на бесконечности, можем написать, по аналогии с (6),

$$U_0 = \frac{2}{9}(\rho' - \rho_0)ga^2 \frac{1}{\mu_0}. \quad (7)$$

Разделив уравнение (6) на уравнение (7), найдем

$$\frac{U}{U_0} = \frac{1-C}{\mu/\mu_0}. \quad (8)$$

Любопытно отметить, что еще в 50-х годах прошлого столетия рядом исследователей была предпринята попытка построить полуэмпирическую теорию вязкости суспензий на основе аналогии с седиментацией. При этом получены различные полуэмпирические соотношения между вязкостью суспензий и скоростью седиментации. Так, в [1] отмечается, что в работе Хоксли это соотношение имеет вид

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{(1-C)^2}{U/U_0},$$

а в работе Кинч –

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1-C}{U/U_0}.$$

Видно, что второе из этих соотношений соответствует формуле (8).

Как известно, относительная вязкость суспензии  $\mu/\mu_0$  увеличивается с ростом объемной концентрации твердых частиц, поэтому, согласно (8), скорость оседания твердых частиц суспензии будет в данном случае уменьшаться. Физически это объясняется тем, что увеличение объемной концентрации приводит к увеличению интенсивности работы вязких напряжений возмущенного течения жидкости, окружающей твердые частицы, за счет чего и увеличивается эффективная вязкость суспензии.

Для определения величины  $\mu/\mu_0$  используем формулу [12]

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1+1.5C}{(1-C)^2}, \quad (9)$$

область применения которой ограничена значениями концентрации  $C \leq 0.3$ . Для предельно малых концентраций эта формула упрощается и принимает вид

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + 3.5C. \quad (10)$$

Формула (9) получена на основе структурно динамического метода математического реологического моделирования суспензий, т.е. путем вычисления осредненных касательных напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}$  суспензии. Для чисто сдвигового медленного течения суспензии выражение для  $\bar{\sigma}_{ij}$  можно формально записать в виде

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2\mu(1-C)\alpha_{ij}, \quad (11)$$

$$\mu = \mu_0 \left( 1 + \frac{C\langle\sigma'_{ij}\rangle}{2\mu_0(1-C)\alpha_{ij}} \right), \quad (12)$$

где  $\alpha_{ij}$  – постоянный симметрический тензор градиентов скоростей невозмущенного течения жидкости;  $\langle\sigma'_{ij}\rangle$  – осредненные касательные напряжения в твердой фазе. Следовательно, непосредственное вычисление эффективной вязкости суспензии  $\mu$  по формуле (12) требовало бы исследования осредненных касательных напряжений в твердых частицах, что представляется весьма сложным. Поэтому для возможного вычисления напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}$  используется структурно динамический метод, при этом, что очень важно, в [12] доказано равенство

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\bar{\sigma}_{ij}^0}{1-C}, \quad (13)$$

где  $\bar{\sigma}_{ij}^0$  – осредненные касательные напряжения в жидкой фазе суспензии, которые выражаются через осредненные касательные напряжения невозмущенного течения жидкости, равные  $2\mu_0\alpha_{ij}$ , и через дополнительные касательные напряжения, связанные с гидродинамическим взаимодействием жидкости и твердых частиц. Выражение (13) принимает с учетом вычисленных напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}^0$  следующий вид:

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2\mu_0 \frac{1 + 1.5C}{1 - C} \alpha_{ik}. \quad (14)$$

Сравнив оба выражения (11) и (14), получим формулу (9).

Что касается формулы (10), то она отличается от аналогичной формулы Эйнштейна [13]

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + 2.5C$$

коэффициентом при  $C$  по той причине, что в правой части уравнений (13) и (14) дополнительно учитывается множитель  $(1 - C)^{-1}$ .

Формулы (9) и (10) относятся к сферическим частицам суспензии. Учитывая, однако, что вязкость, а следовательно, и скорость седиментации суспензии зависят также от формы частиц, попытаемся учесть ее в (9) и (10), для чего перепишем эти формулы в более общем виде

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1 + \alpha C}{(1 - C)^2}, \quad (15)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \beta C, \quad (16)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – поправочные коэффициенты.

В случае частиц в виде сфероидов вращения коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  зависят от отношения  $a'/b'$ , где  $a'$  и  $b' = c'$  – полуоси сфероидов. Для таких частиц числовые значения коэффициента, аналогичного коэффициенту  $\beta$ , приведены для нескольких значений отношения  $a'/b'$  в [14] и отвечают обобщению формулы Эйнштейна на случай суспензии рассматриваемых сфероидальных частиц. При аналогичном обобщении же формулы (10) значения коэффициента  $\beta$  равняются, очевидно, значениям аналогичного коэффициента в [14], увеличенным на единицу. Что касается значений коэффициента  $\alpha$ , то их можно определить, представив правую часть уравнения (15) в виде степенного ряда и приравняв коэффициент при  $C$  этого ряда к найденному выше коэффициенту  $\beta$ . В результате получим  $\alpha = \beta - 2$ .

На основании вышеизложенного имеем:

$a'/b' =$	0.1	0.2	0.5	1.0	2	5	10
$\alpha =$	7.04	3.71	1.85	1.5	1.91	4.81	12.6
$\beta =$	9.04	5.71	3.85	3.5	3.91	6.81	14.6

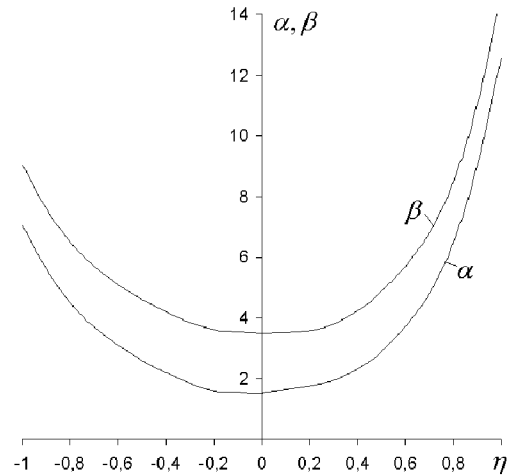


Рис. 1. Зависимости коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  от  $\eta$

Графическое изображение кривых зависимости коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  от параметра  $\eta = \lg a'/b'$  показано на рис. 1.

Таким образом, подставляя выражение (15) в (8), получаем формулу для определения относительной скорости седиментации, соответствующую умеренным концентрациям суспензий:

$$\frac{U}{U_0} = \frac{(1 - C)^3}{1 + \alpha C}, \quad (17)$$

а в случае подстановки выражения (16) в (8) – аналогичную формулу, соответствующую предельно малым концентрациям:

$$\frac{U}{U_0} = \frac{(1 - C)}{1 + \beta C}. \quad (18)$$

В качестве примера, на рис. 2 показаны отвечающие формуле (17) расчетные кривые зависимости относительной скорости седиментации  $U/U_0$  от концентрации  $C$  для сферических частиц ( $a'/b' = 1$ ) и частиц в виде сплюснутого ( $a'/b' < 1$ ) и вытянутого ( $a'/b' > 1$ ) сфероидов вращения. Видно, что при одной и той же объемной концентрации вытянутые частицы оседают медленнее сплюснутых, а те, в свою очередь, медленнее сферических.

Рассмотрим результаты сопоставления расчетных значений относительных вязкости  $\mu/\mu_0$  и скорости седиментации  $U/U_0$  с экспериментальными.

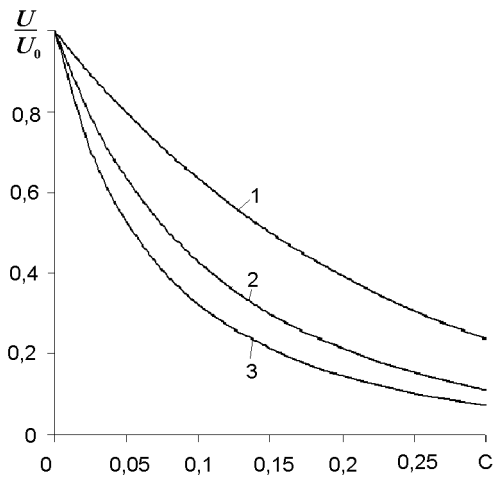


Рис. 2. Зависимость относительной скорости седиментации  $U/U_0$  от  $C$  при различных значениях отношения  $a'/b'$ :  
 1 –  $a'/b' = 1$ ; 2 –  $a'/b' = 0.1$ ; 3 –  $a'/b' = 10$

## 2. СРАВНЕНИЕ С ОПЫТНЫМИ ДАННЫМИ

Для сравнения экспериментальных значений эффективной вязкости суспензий с расчетными, полученными по формуле (9), в [12] использованы опытные данные, собранные Томасом [15] и Хаппелем [1] и приведенные в [3]. Кроме того, обработаны, с целью определения  $\mu/\mu_0$ , опытные данные по измерению градиентов давления при движении суспензий в трубах [16].

Результаты сопоставления расчетных значений относительной вязкости  $\mu/\mu_0$  с экспериментальными показаны на рис. 3. При этом точками изображены экспериментальные значения величины  $\mu/\mu_0$  для соответствующих концентраций, сплошными линиями 1 и 2 – расчет по соответствующим формулам (9) и (10), пунктирной – расчет по полиному

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 5.2335C^3 + 10.88C^2 + 2.6343C + 1.0336, \quad (19)$$

который аппроксимирует экспериментальные данные и получен методом наименьших квадратов.

Как видим, в пределах умеренных концентраций  $C \leq 0.3$  соответствие между экспериментальными данными и формулой (9) весьма хорошее.

Однако с дальнейшим ростом концентрации расчетные значения относительной вязкости  $\mu/\mu_0$  начинают отклоняться от опытных. Это объясняется тем, что при  $C > 0.3$  уже заметным становится гидродинамическое взаимодействие твердых частиц между собой, что не учитывает фор-

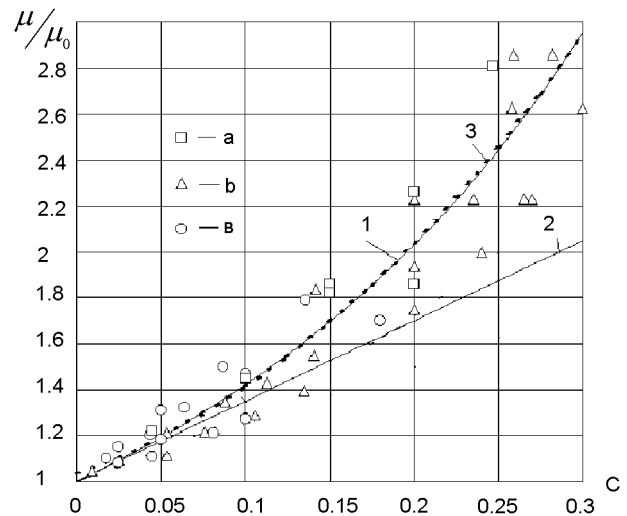


Рис. 3. Зависимость относительной вязкости  $\mu/\mu_0$  от  $C$  для суспензий сферических твердых частиц:  $a, b, v$  – опытные данные, заимствованные из [1], [15], [16] соответственно; 1-3 – расчет по соответствующим формулам (9), (10), (19)

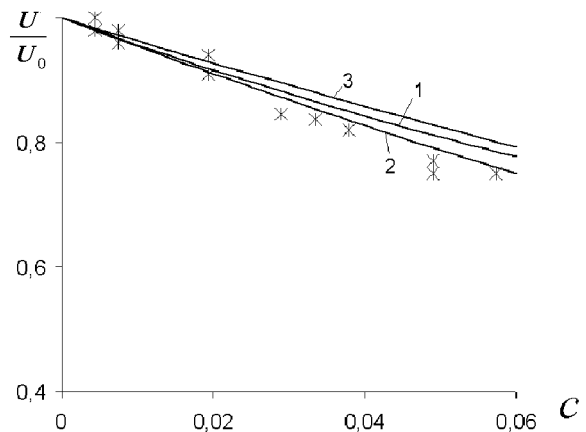


Рис. 4. Зависимость относительной скорости седиментации  $U/U_0$  от  $C$  для суспензии сферических частиц: 1-3 – расчет по соответствующим формулам (18) при  $\beta = 3.5$ , (20), (21); \* – опытные данные Чена и Шахмана, заимствованные из [1]

мула (9). Что касается упрощенной формулы (10), то она хорошо согласуется с опытными данными при  $C < 0.05$ .

Для проверки достоверности формулы (18) использованы опытные данные, заимствованные из [1] и полученные Ченом и Шахманом. В этих опытах исследовались скорости седиментации мелких шариков, объемная концентрация которых не превышала 0.06. Изображенные на рис. 4 точки отно-

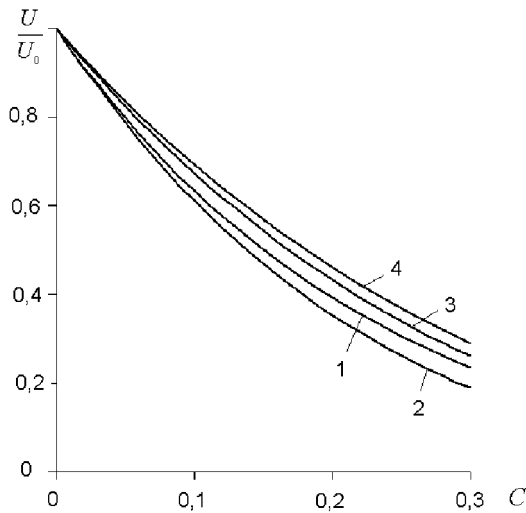


Рис. 5. Зависимость относительной скорости седиментации  $U/U_0$  от  $C$  для суспензии сферических частиц:  
 1–4 – расчет по соответствующим формулам (17) при  $\alpha = 1.5$ , (20), (21), (8) с учетом (4) при  $K = 1$

саятся к экспериментальным значениям величины  $U/U_0$ , а кривая 1 соответствует расчетным значениям этой величины, полученным по формуле (18) при  $\beta = 3.5$ . Кроме того, на этом рисунке приведены для сравнения кривые 2 и 3, построенные на основе эмпирических формул

Ричардсона и Заки [1]

$$\frac{U}{U_0} = (1 - C)^{4.65} \quad (20)$$

и Тодеса [17]

$$\frac{U}{U_0} = (1 - C)^{3.75}, \quad (21)$$

которые относятся к стоксовым сферическим частицам суспензии. Видно, что формулы (18) и (20) вполне удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, тогда как формула (21) дает несколько завышенные расчетные значения.

Наконец, на рис. 5 приведены расчетные кривые 1–3, соответствующие сферическим частицам и полученные по соответствующим формулам (17), (20) и (21) при концентрациях  $C \leq 0.3$ . Кроме того, приведена расчетная кривая 4, полученная по формуле (8) с учетом выражения (4) при значении коэффициента  $K$ , входящего в (3), равном единице. Видно, что кривая 1 занимает промежуточное положение между эмпирическими кривыми 2 и 3, что тоже свидетельствует о ее достоверности. Кривая же 4 расположена несколько выше кривых 1–3, хотя и близка к кривой 3. При расчете кривой 4 можно было бы подобрать такое значение коэффициента  $K$ , для которого эта кривая приблизится,

например, к кривой 2. Однако в этом случае изложенная в [2] теория становится уже полуэмпирической.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В существующих теоретических работах, посвященных исследованию гидродинамического влияния друг на друга взвешенных твердых частиц, падающих в жидкости, используются различные подходы к определению скорости седиментации. Однако общим для них является то, что, как правило, рассматриваются гидродинамические возмущения, вносимые падающими частицами. При этом, в одних работах рассматриваются гидродинамические возмущения, вносимые одной отдельной частицей, после чего результат умножается на количество частиц в единице объема смеси (случай разбавленных суспензий), а в других предполагается, что обусловленные отдельной частицей возмущения течения существенны лишь в некотором конечном объеме, окружающем данную частицу, и они не проникают в аналогичные объемы, окружающие соседние частицы (ячеечная модель). Уменьшение скорости седиментации множества частиц по сравнению со скоростью падения одиночной частицы физически объясняется неким эффективным экранированием дальнего гидродинамического взаимодействия падающих частиц.

Ввиду того, что подходы, аналогичные вышеуказанным, используются и для вычисления эффективной вязкости суспензий, в настоящей работе скорость седиментации множества частиц определена на основе аналогии с вязкостью суспензии. При этом установлено, что скорость седиментации частиц, равномерно распределенных в неограниченной жидкости, которая покоится на бесконечности, равна скорости падения одиночной частицы в некоторой неограниченной жидкости, плотность и вязкость которой такая же, как плотность и эффективная вязкость суспензии. Иначе говоря, скорость седиментации множества частиц в однородной жидкости рассматривается как скорость падения одиночной частицы в некоторой жидкости, более плотной и вязкой по сравнению с однородной. Этим, собственно, физически объясняется эффект уменьшения скорости седиментации частиц с увеличением их объемной концентрации. В результате получена простая зависимость (17) для определения относительной скорости седиментации стоксовых монодисперсных частиц, которая достаточно хорошо согласуется с опытными данными в диапазоне изменения объ-

емной концентрации до 0.3. Показано, что при одной и той же объемной концентрации относительная скорость седиментации частиц в виде вытянутого сфероида меньше аналогичной скорости седиментации частиц в виде сплюснутого сфероида, тогда как вторая из них меньше относительной скорости седиментации сферических частиц. При этом степень влияния сфероидальных частиц на относительную скорость их группового падения тем больше, при одной и той же объемной концентрации, чем больше соотношение полуосей сфероида.

Полученные результаты исследования имеют не только научное, но и практическое значение и могут быть использованы, в частности, в современных технологиях очистки вод.

1. Хашель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
2. Буевич Ю.А. Взаимодействие фаз в концентрированных дисперсных системах // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1966. – N 3. – С. 115–117.
3. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
4. Batchelor G.K. Sedimentation in a dilute dispersion of spheres // J. Fluid mech. – 1972. – 52. – P. 245–268.
5. Batchelor G.K., Wen C.-S. Sedimentation in a polydisperse system of interacting spheres. Part. 2. Numerical results // J. Fluid mech. – 1982. – 124. – P. 495–528.
6. Caffisch R.E., Luke J.H.C. Variance in the sedimentation speed of a suspension // Phys. Fluids. – 1985. – N 3. – P. 759–760.
7. Koch D.L., Shaqfeh E.S.G. Screening in sedimenting suspension // J. Fluid mech. – 1991. – 224. – P. 275–303.
8. Ladd A.J.C. Sedimentation of homogeneous suspensions of non Brownian spheres // Phys. Fluids. – 1997. – N 9. – P. 491–512.
9. Brenner M.P. Screening mechanisms in sedimentation // Phys. Fluids. – 1999. – N 11. – P. 754–762.
10. Guazzelli E. Evolution of particle-velocity correlations in sedimentation // Phys. Fluids. – 2001. – N 13. – P. 1537–1551.
11. Bergougnox L, Ghicini S., Hinch J. Spreading fronts and fluctuations in sedimentation // Phys. Fluids. – 2003. – N7. – P. 1875–1887.
12. Криль С.И. До питання про реологічне моделювання суспензій // Прикладна гідромеханіка. – 2003. – 5 (77), N 2. – С. 20–26.
13. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 3. – М.: Наука, 1966. – 75–90 с.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, VI. Гидромеханика. – М.: Наука, 1986. – 730 с.
15. Thomas D.G. The Viscosity of Newtonian Suspensions of Uniform Spherical particles // J. Colloid and Interface Sci. – 1965. – 20. – P. 267–276.
16. Коберник С.Г., Войтенко В.И. Напорный гидротранспорт хвостов горнообогатительных комбинатов. – К.: Наукова думка, 1967. – 140 с.
17. Горошко В.Д., Розенбаум Р.Е., Тодес О.М. Приближенные закономерности гидравлики псевдооживленного слоя // Изв. высш. учебн. завед., Нефть и газ. – 1958. – Т. 1, N 1. – С. 125–130.