ISSN 1561-9087 *Прикладна гiдромеханiка. 2003. Том 5 (77), N 4. С. 12 – 43*

УДК 532.5

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ ВАРИАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

И. А. ЛУКОВСКИЙ, Г. Ф. ЗОЛОТЕНКО, А. М. ПИЛЬКЕВИЧ

Институт математики НАН Украины, Киев

Получено 15.07.2003

Сравниваются модели динамики жидкости, построенные на основе вариационного принципа Бейтмена–Люка–Уизема. Тестовой является задача о нелинейных колебаниях идеальной однородной несжимаемой жидкости в вертикальном круговом цилиндре, совершающем произвольное поступательное движение в поле силы тяжести. В основу одной из моделей, называемой гамильтоновой, положены точные интегро-дифференциальные уравнения типа Гамильтона, а в основу другой, назывемой 5-модовой – обыкновенные дифференциальные уравненния с полиномиальными коэффициентами. Анализируются и сопоставляются исходные соотношения моделей, устанавливается связь между ними. Приведен подробный вывод уравнений 5-модовой модели, активно применяемой в последнее время. Численно решается задача о колебаниях свободной поверхности жидкости в равномерно ускоряемом из состояния покоя баке. Сравниваются результаты расчетов обобщенных координат и ординат свободной поверхности. Приведены оценки взвешенной средней квадратической ошибки и относительных погрешностей расчетов по гамильтоновой модели относительно 5-модовой. Отмечены случаи существенных расхождений в расчетах по этим моделям.

Порiвнюються моделi динамiки рiдини, побудованi на основi варiацiйного принципу Бейтмена–Люка–Уiзема. Тестовою є задача про нелiнiйнi коливання iдеальної однорiдної нестисливої рiдини у вертикальному круговому цилiндрi, що здiйснює довiльнi поступальнi рухи у полi сил тяжiння. В основу однiєї з моделей, яку названо гамiльтоновою, покладенi точнi нтегро-диференцiйнi рiвняння типу Гамiльтона, а в основу другої, яку названо 5-модовою – звичайнi диференцiйнi рiвняння з полiномiальними коефiцiєнтами. Аналчзуються та спiвставляються вихiднi спiввiдношення моделей, встановлюється зв'язок мiж ними. Наведено докладне виведення рiвнянь 5-модової моделї, що активно застосовуються останнiм часом. Чисельно розв'язується задача про коливання вiльної поверхнi рiдини у бацi, який рiвномiрно прискорюється з стану спокою. Порчвнюються результати обчислень узагальнених координат та ординат вiльної поверхнi. Наведено оцiнки середньої квадратичної похибки та вiдносних похибок розрахункiв за гамiльтоновою моделлю вiдносно 5-модової. Зазначено випадки суттєвих розбiжностей у розрахунках за цими моделями.

Two fluid dynamics models constructed on the base of the variational Bateman-Luke-Whithem principle are compared. As a test problem, it is considered the problem of the nonlinear sloshing of an inviscid homogeneous incompressible liquid that partially fills a vertical circular cylinder performing an arbitrary translational movement. One of the model named Hamiltonian is based on the exact ordinary integro-differential Hamiltonian type equations and the other named 5-modal is based on the ordinary differential equations with the polinomial coefficients. The input models equations are ahalyzed and compared and the relations between them are established. A detailed derivation of the 5-modal equations actively used at the present time are carried out. Numerically it is solved a problem of the liquid free surface vibrations inside the uniformly accelerated tank which was in the state position initially. The numerical results for the generalized fluid coordinates and the free surface ordinates are compared. The estimates of the weighted mean square errors and relative errors of the calculations according to Hamiltonian model with respect to 5-model are given. The cases of the essential discrepancies in the calculations according to this model are noted.

ВВЕДЕНИЕ

Вариационные методы принадлежат к числу наиболее эффективных в исследовании задач математической физики и техники. В динамике ограниченного объема идеальной несжимаемой жидкости, совершающей безвихревое абсолютное движение, широко используются два вариационных метода, один из которых основан на принципе Гамильтона–Остроградского [1, 2], а другой – на принципе Бейтмена–Люка–Уизема [3-5]. Каждый из этих методов, в свою очередь, приводит к различным расчетным моделям в зависимости от конкретных алгоритмов их реализации.

Настоящая работа посвящена двум расчетным моделям, основанным на принципе Бейтмена–Люка–Уизема и существенно отличающимся друг от друга подходами к решению известной системы уравнений Эйлера–Лагранжа (см., например, [3, стр.56])

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_i} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{R}_k} - \frac{\partial L}{\partial R_k} = 0$$

для функционала давления

$$L(t, \beta_i, R_k) = \int_{\Omega(t)} (P - p^*) d\Omega.$$

Здесь β_i, R_k – обобщенные координаты и квазискорости жидкости соответственно; $\Omega(t)$ – занятая жидкостью пространственная область; t – время; P, p^* – давление в жидкости и на ее свободной поверхности соответственно. Эта система уравнений относительно неизвестных функций

 © И. А. Луковский, Г. Ф. Золотенко, А. М. Пилькевич, 2003

$\beta_i(t)$, $R_k(t)$ принадлежит к классу систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производных, и в общем случае довольно сложна.

Один из рассматриваемых в данной статье подходов предложен в [4] и состоит в исключении величин $R_k(t)$ из уравнений исходной системы с помощью линейной зависимости

$$R(t) = G \cdot \frac{d\beta(t)}{dt},$$

вытекающей из второй группы уравнений Эйлера – Лагранжа (здесь G – некоторая матрица). С использованием этой идеи в [6] из уравнений Эйлера – Лагранжа выведена система пяти обыкновенных (без интегральных членов) дифференциальных уравнений второго порядка относительно только неизвестных $\beta_i(t)$. Соответствующая модель в дальнейшем, для краткости, называется 5-модовой. Существенно, что как при исключении $R_k(t)$, так и при получении окончательной формы дифференциальных уравнений использовались восходящие к Г.С. Нариманову эвристические соображения о малости искомых величин – удерживались члены до 3-го порядка малости включительно относительно β_i и их производных по времени (порядки малости этих величин не одинаковы и оговорены ниже).

С помощью 5-модовой модели исследованы резонансные колебания жидкости в кинематически возбуждаемых цилиндрических баках (в том числе и соосных) и описан ряд наблюдавшихся в экспериментах нелинейных эффектов (круговая волна, подвижность узловой линии, превышение высоты гребня над глубиной впадины, зависимость частоты свободных нелиненйых колебаний от амплитуды). Кроме того, разработаны методы расчета гидродинамических характеристик подвижных объектов с жидкостью [3, 7-9]. Аналогичная модель развивается и в применении к прямоугольным бакам [10].

Второй подход заключается в численном интегрировании точных исходных интегро-дифференциальных уравнений, т.е. без описанных упрощений. Он опробован и дал удовлетворительные результаты в задачах о нелинейных неустановившихся колебаниях жидкости в прямоугольном и цилиндрическом баках, совершающих чередующиеся равномерные и равноускоренные движения [14, 15]. Модель, соответствующая этому подходу, далее будет называться гамильтоновой, ввиду определенного структурного сходства ее уравнений с собственно гамильтоновыми уравнениями динамики жидкости [4].

Цель настоящей работы – сравнительный анализ исходных соотношений 5-модовой и гамильтоновой моделей, встречная проверка получаемых на их основе расчетных данных и оценка областей применимости этих моделей.

В настоящее время с помощью компьютерных технологий разработаны 7- и 11-модовые модели, однако в качестве пробной выбрана именно 5-модовая, поскольку она, с одной стороны, будучи аналитически сложной сама по себе, является наиболее простой среди этих моделей и поддающейся (в разумных пределах) некомпьютерным преобразованиям, а с другой – наиболее из них апробирована. Полученные на ее основе расчетные данные качественно подтверждаются известными экспериментальными данными, установлено также определенное количественное совпадение этих расчетных данных с экспериментом [11] и с расчетами по другим моделям [12, стр.140, 188; 13]. Вместе с тем, 5-модовая модель представляет самостоятельный интерес, поскольку в настоящее время ее возможности недостаточно изучены.

Модели тестируются на задаче о колебаниях жидкости в поступательно перемещающемся цилиндрическом баке. Выбор задачи обусловлен ее большим практическим значением и значительным количеством уже накопленного материала. Алгоритмы решения для каждой из моделей реализованы в виде фортран-программ для персональных компьютеров.

Поскольку исходные формулы 5-модовой модели составляют основу вычислительных алгоритмов и программ, а потому очень важны, то в работе много внимания уделено доказательству этих формул (ранее они были опубликованы без доказательств, лишь с краткими указаниями на способы их получения [3, 8]). В свое время 5-модовая модель по понятным причинам была построена исключительно вручную, что имеет свои достоинства, так как позволяет проследить все нюансы ее построения. В противоположность этому разработанные с помощью компьютерных технологий современные многомодовые модели представляют, как правило, "вещь в себе" и практически поддаются только косвенной проверке. Тем не менее, в данной работе выкладки при доказательстве и перепроверке исходных формул производились с помощью компьютерных программ символьных вычислений. В основном это делалось при разложении трансцендентных функций в ряды Тейлора, перемножении и возведении в степень громоздких многочленов 2-ой и 3-ей степени относительно 5-ти переменных и вычислении однократных инетегралов от полиномиальных и трансцендентных выражений. В тексте статьи это отражено взятыми в скобки словами "символьные вычисления", что позволяет, при необходимости, относительно просто воспроизвести и проверить с помощью компьютера соответствующие формулы.

Сопоставление расчетных данных осуществлено для задачи о колебаниях жидкости в равномерно ускоряемом по горизонтали первоначально покоившемся баке. Рассмотрены два случая, соответствующие: 1) малому ускорению бака по сравнению с g и 2) соизмеримому с g (где g – ускорение силы тяжести). Сравниваемые параметры – обобщенные координаты и ордината свободной поверхности жидкости в контрольной точке как функции времени. Выполнен количественный анализ близости полученных с помощью рассматриваемых моделей данных, причем в качестве меры близости принимались относительные погрешности и средние взвешенные ошибки расчетов.

1. ОБЩИЕ ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ СРАВНИВАЕМЫХ МОДЕЛЕЙ

Тестовой гидродинамической задачей для сравниваемых расчетных моделей является задача о нелинейных колебаниях идеальной однородной несжимаемой жидкости в поступательно перемещающемся вертикальном цилиндре. Приведем соотношения, общие для обеих моделей.

Пусть круглый цилиндрический недеформируемый бак с плоским дном расположен вертикально и частично заполнен идеальной однородной несжимаемой жидкостью плотности ρ. С баком жестко связана правая декартова система координат $Oxyz$, начало O которой размещено в центре невозмущенной свободной поверхности жидкости при неподвижном баке, ось Ox направлена вдоль продольной оси симметрии бака вверх, а оси Oy, Oz расположены в плоскости его поперечного сечения. Вся система "бак–жидкость" находится в поле силы тяжести и движется относительно некоторой инерциальной системы координат $O^*x^*y^*z^*$, ось O^*x^* которой направлена по вектору g_0 ускорения силы тяжести в противоположном ему направлении. Одноименные оси систем координат $O^*x^*y^*z^*$ и $Oxyz$ всегда параллельны, а начала O^* и O в общем случае не совпадают. Радиус бака обозначим через R, высоту – через l, уровень заполнения – через h.

Бак совершает поступательное движение по произвольному закону, а относительно движения жидкости предполагается, что: 1) поле абсолютной скорости жидкости допускает потенциал, 2) свободная поверхность $\Sigma(t)$ может быть представлена явным уравнением

$$x = f(y,z,t), \tag{1}$$

3) свободная поверхность $\Sigma(t)$ ни при каких t не касается дна бака, 4) функция $f(y,z,t)$ может принимать значения, соизмеримые с глубиной заполнения бака h.

Соответствующая начально–краевая задача в цилиндрических координатах x, ξ, η ($y = \xi\cos\eta$, $z = \xi\sin\eta$, $x = x$) имеет вид

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big) + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0,$$
$$(x,\xi,\eta) \in \Omega(t), \quad t \in (t_0, t_1], \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = 0, \quad -h < x < l - h, \quad \xi = R, \quad 0 \le \eta < 2\pi,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad x = -h, \quad 0 \le \xi < R, \quad 0 \le \eta < 2\pi, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0,$$
$$x = \zeta(\xi,\eta,t), \quad 0 \le \xi < R, \quad 0 \le \eta < 2\pi, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big)^2 + \frac{1}{\xi^2}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2\Big] -$$
$$-[(g_0 - w_0)_x x + (g_0 - w_0)_y \xi\cos\eta + (g_0 - w_0)_z \xi\sin\eta] =$$
$$= C(t) - \frac{p^*}{\rho},$$
$$x = \zeta(\xi,\eta,t), \quad 0 \le \xi < R, \quad 0 \le \eta < 2\pi, \tag{5}$$

$$\varphi(x,\xi,\eta,t_0) = \varphi^0(x,\xi,\eta),$$
$$(\triangle\varphi^0(x,\xi,\eta) = 0, \quad (x,\xi,\eta) \in \Omega(t_0)),$$
$$\zeta(\xi,\eta,t_0) = \zeta^0(\xi,\eta), \tag{6}$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{\zeta(\xi,\eta,t)} \xi\, d\xi\, d\eta\, dx = V = \mathrm{const}. \tag{7}$$

Здесь $\varphi = \varphi(x,\xi,\eta,t)$ – потенциал скорости жидкости относительно подвижной системы координат $Oxyz$; $\zeta = \zeta(\xi,\eta,t) = f(\xi\cos\eta, \xi\sin\eta, t)$ – функция, задающая свободную поверхность в цилиндрических координатах; $w_0 = w_0(t)$ – вектор абсолютного ускорения бака; $C(t)$ – произвольная функция времени из интеграла Лагранжа – Коши для относительного движения жидкости. В динамическом условии (5) через $(g_0 - w_0)_x$, $(g_0 - w_0)_y$, $(g_0 - w_0)_z$ обозначены проекции вектора $(g_0 - w_0)$ кажущегося ускорения силы тяжести на оси x, y, z соответственно. (При выводе динамического условия воспользовались инвариантностью скалярного произведения векторов в декартовых и цилиндрических системах координат.) В цилиндрических координатах область $\Omega(t)$ представляет собой совокупность точек (x, ξ, η), удовлетворяющих соотношению

$$\Omega(t) = \{(x, \xi, \eta) : \\ -h < x \leq \zeta(\xi, \eta, t), \quad 0 \leq \xi < R, \quad 0 \leq \eta < 2\pi\}. \tag{8}$$

Искомыми являются функции $\varphi(x, \xi, \eta, t)$, $\zeta(\xi, \eta, t)$. Остальные параметры p^*, $C(t)$, ρ, g_0, w_0, V, t_0, t_1, h, а также размеры l, R поверхности полости $S(t)$ считаются заданными.

Начально–краевая задача (2) – (7) относится к классу задач для уравнения Лапласа, в изменяющейся со временем (неизвестной) области, с нелинейностями в кинематическом и динамическом граничных условиях и с дополнительным интегральным условием. Дальнейшее её исследование выполняется с помощью вариационного метода в форме Бейтмена – Люка – Уизема [3, 4]. Соответствующая вариационная задача приводится к следующему виду:

$$J[\varphi, \zeta] \to extr, \qquad \int_{\Omega(t)} d\Omega = V, \tag{9}$$

где $J[\varphi, \zeta]$ является интегральным функционалом вида

$$J[\varphi, \zeta] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \varphi_t, \nabla\varphi, \zeta) dt \tag{10}$$

с интегрантом

$$L(t, \varphi_t, \nabla\varphi, \zeta) = \int_{\Omega(t)} \Big[P(r, t, \varphi_t, \nabla\varphi) - p^*\Big] d\Omega. \tag{11}$$

Давление, определяемое из интеграла Лагранжа–Коши, задается формулой

$$P(r, t, \varphi_t, \nabla\varphi) = \rho[C(t) - \varphi_t - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + (g_0 - w_0) \cdot r]. \tag{12}$$

где $r = (x, y, z)$ – радиус-вектор произвольной жидкой частицы. Векторы $\nabla\varphi$ и r определяются в цилиндрических координатах, область интегрирования $\Omega(t)$ определяется соотношением (8), а вектор $(g_0 - w_0)$ по-прежнему берётся в проекциях на оси x, y, z.

Запись (9) означает, что необходимо найти пару функций (φ, ζ), доставляющих экстремум (минимум или максимум) функционалу (10) с одновременным выполнением интегрального условия постоянства объема жидкости.

Для решения вариационной задачи (9)–(12) применяется прямой метод, в соответствии с которым искомые функции аппроксимируются следующими выражениями:

$$\zeta(\xi, \eta, t) = \sum_{n=0}^{N} \beta_n(t) f_n(\xi, \eta), \tag{13}$$

$$\varphi(x, \xi, \eta, t) = \sum_{m=0}^{M} R_m(t) \varphi_m(x, \xi, \eta), \tag{14}$$

где

$$\{f_n(\xi, \eta)\}_{n=0}^{N}, \quad \{\varphi_m(x, \xi, \eta)\}_{m=0}^{M}$$

– системы координатных функций, которые будут указаны ниже; $\beta_n(t)$ – обобщенные координаты свободной поверхности; $R_m(t)$ – обобщенные квазискорости жидкости; N, M – целые положительные числа. Задача сводится к нахождению функций $\beta_n(t)$, $R_m(t)$.

Система соотношений, определяющих функции $\beta_n(t)$, $R_m(t)$, получается путем подстановки выражений (13), (14) в (11) с учетом (12) и последующей конкретизации условий обращения в нуль первой вариации функционала (9). В результате интегрант представляется в виде

$$L(t, \beta, \bar{R}) = \rho \int_{\Omega(t)} \Big[C(t) - \frac{p^*}{\rho} - \sum_{m=0}^{M} \frac{dR_m}{dt}\varphi_m - \\ -\frac{1}{2}(\sum_{m=0}^{M} R_m \nabla\varphi_m)^2 + (g_0 - w_0) \cdot r\Big] d\Omega,$$

$$\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_N), \quad \bar{R} = (R_0, \ldots, R_M), \tag{15}$$

а система уравнений Эйлера – Лагранжа вариационной задачи (9) записывается как

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_i} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{16}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{R}_k} - \frac{\partial L}{\partial R_k} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, M. \tag{17}$$

Далее выполняется интегрирование в выражении (15) и по формуле дифференцирования интеграла по параметру находятся производные от полученного выражения, входящие в уравнения (16), (17). В результате получается следующая система интегро-диффернциальных уравнений относительно неизвестных функций $R_m(t)$, $\beta_n(t)$:

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{\partial A_m(\zeta)}{\partial \beta_i}\frac{dR_m}{dt} + \frac{1}{2}\sum_{m,j=0}^{M} \frac{\partial A_{mj}(\zeta)}{\partial \beta_i} R_m R_j = \\ = \Big(g_0 - w_0(t)\Big)_x \frac{\partial l_x(\zeta)}{\partial \beta_i} + \Big(g_0 - w_0(t)\Big)_y \frac{\partial l_y(\zeta)}{\partial \beta_i} + \\ + \Big(g_0 - w_0(t)\Big)_z \frac{\partial l_z(\zeta)}{\partial \beta_i} + \Big[C(t) - \frac{p^*}{\rho}\Big] F_i, \\ i = 0, 1, \ldots, N, \tag{18}$$

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{\partial A_k(\zeta)}{\partial \beta_i} \frac{d\beta_i}{dt} - \sum_{j=0}^{M} A_{kj}(\zeta) R_j = 0,$$
$$k = 0, 1, \ldots, M. \qquad (19)$$

Здесь введены обозначения

$$A_m(\zeta) = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{\zeta(\xi,\eta,t)} \varphi_m(x,\xi,\eta) \xi dx d\eta d\xi,$$

$$\frac{\partial A_m(\zeta)}{\partial \beta_i} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(\xi,\eta) \varphi_m(\zeta,\xi,\eta) \xi d\eta d\xi; \quad (20)$$

$$A_{mk}(\zeta) = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{\zeta(\xi,\eta,t)} \nabla\varphi_m \cdot \nabla\varphi_k \xi dx d\eta d\xi,$$

$$\frac{\partial A_{mk}(\zeta)}{\partial \beta_i} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(\xi,\eta) \Big[\nabla\varphi_m \cdot \nabla\varphi_k\Big]_{x=\zeta} \xi d\eta d\xi,$$

$$\nabla\varphi_m \cdot \nabla\varphi_k =$$
$$= \frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_m}{\partial \xi}\frac{\partial\varphi_k}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial\varphi_m}{\partial \eta}\frac{\partial\varphi_k}{\partial \eta}; \qquad (21)$$

$$F_i = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(\xi,\eta) \xi d\eta d\xi, \quad i = 0, 1, \ldots N; \quad (22)$$

$$l(\zeta) = \Big(l_x(\zeta), l_y(\zeta), l_z(\zeta)\Big),$$

$$l_x(\zeta) = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{\zeta(\xi,\eta,t)} \xi x dx d\eta d\xi,$$

$$l_y(\zeta) = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{\zeta(\xi,\eta,t)} \xi^2 \cos(\eta) dx d\eta d\xi,$$

$$l_z(\zeta) = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{\zeta(\xi,\eta,t)} \xi^2 \sin(\eta) dx d\eta d\xi, \quad (23)$$

$$\frac{\partial l_x(\zeta)}{\partial \beta_i} = \rho \sum_{n=0}^{N} \beta_n \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(\xi,\eta) f_n(\xi,\eta) \xi d\eta d\xi,$$

$$\frac{\partial l_y(\zeta)}{\partial \beta_i} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(\xi,\eta) \xi^2 \cos(\eta) d\eta d\xi,$$

$$\frac{\partial l_z(\zeta)}{\partial \beta_i} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(\xi,\eta) \xi^2 \sin(\eta) d\eta d\xi. \qquad (24)$$

Формулы (23) определяют положение центра масс жидкости под свободной поверхностью $x = \zeta(\xi,\eta,t)$.

Замечание. Уравнения (18), (19) в точности совпадают с аналогичными уравнениями работы [15], однако входящие в них величины (20) – (24) имеют отличия, связанные с выбором системы координат $Oxyz$. В работе [15] вдоль продольной оси цилиндра направлена ось Oz, а начало O системы координат совпадает с центром цилиндра. Чтобы различать эти случаи, оси системы координат $Oxyz$ из настоящей работы будем называть "самолетными", а из работы [15] – "корабельными" (терминология А.И.Лурье [16]). Переход в гамильтоновой модели от корабельных осей к самолетным здесь осуществлен в целях установления взаимосвязей между гамильтоновой и 5-модовой моделями, последняя из которых строилась в самолетных осях.

Уравнения (18), (19) – общие для сравниваемых моделей. Кроме того, одинаковыми являются и системы координатных функций в разложениях (13), (14) свободной поверхности и потенциала. Переход в них от простых к двойным суммам позволяет представлять искомые величины в виде следующих разложений по собственным функциям соответствующей линейной задачи:

$$\zeta(\xi,\eta,t) = \sum_{n=0}^{N} \beta_n(t) f_n(\xi,\eta) =$$
$$= \sum_{i=0}^{I} \sum_{j=1}^{J} \Big[p_{ij}(t)\cos(i\eta) + r_{ij}(t)\sin(i\eta)\Big] \psi_{ij}(0,\xi), \qquad (25)$$

$$\varphi(x,\xi,\eta,t) = \sum_{m=0}^{M} R_m(t) \varphi_m(x,\xi,\eta) =$$
$$= \sum_{i=0}^{I} \sum_{j=1}^{J} \Big[P_{ij}(t)\cos(i\eta) + R_{ij}(t)\sin(i\eta)\Big] \psi_{ij}(x,\xi), \qquad (26)$$

где

$$\psi_{ij}(x,\xi) = \frac{J_i(k_i^{(j)}\xi)}{J_i(k_i^{(j)}R)} \frac{\mathrm{ch}\left[k_i^{(j)}(x+h)\right]}{\mathrm{ch}\left(k_i^{(j)}h\right)}. \qquad (27)$$

В формуле (27) через J_i обозначены функции Бесселя первого рода целого порядка i, а параметр $k_i^{(j)}$ является j-м корнем уравнения

$$\left.\frac{dJ_i(k_i^{(j)}\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=R} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Теперь искомыми являются функции времени $p_{ij}(t)$, $r_{ij}(t)$, $P_{ij}(t)$, $R_{ij}(t)$. Заметим, что верхние пределы I, J двойных сумм и функции $p_{ij}(t)$, $r_{ij}(t)$, $P_{ij}(t)$, $R_{ij}(t)$ с двойными индексами в (27), (26) должны быть согласованы с числами N, M и функциями $\beta_n(t)$, $R_m(t)$ в одинарных суммах. В общем случае числа N и M не обязательно равны.

При выбранных координатных функциях оказываются удовлетворенными уравнение Лапласа, кинематические условия на стенках $S(t)$ цилиндра, условие гармоничности начального потенциала и условие постоянства объема. Остальные соотношения – кинематическое и динамическое условия на свободной поверхности – должны быть удовлетворены за счет функций $p_{ij}(t)$, $r_{ij}(t)$ и $P_{ij(t)}$, $R_{ij}(t)$.

Начальные условия общей начально-краевой задачи (2) – (7) в цилиндрических координатах естественным образом преобразуются в начальные условия для систем интегро-дифференциальных уравнений (18), (19). Представляя правые части начальных условий (6) в виде их усеченных рядов Фурье – Бесселя, имеем

$$\varphi^0(x,\xi,\eta)=\sum_{m=0}^{M}a_m\varphi_m(x,\xi,\eta),$$

$$\zeta^0(\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{N}b_nf_n(\xi,\eta).$$

Приравнивая теперь коэффициенты при одинаковых формах φ_m и f_n в суммах (14) и (13), приходим к следующим начальным условиям:

$$R_m(t_0)=a_m,\quad m=0,1,\ldots,M, \qquad (28)$$

$$\beta_n(t_0)=b_n,\quad n=0,1,\ldots,N. \qquad (29)$$

Итак, исходная начально-краевая задача для уравнения в частных производных (2)–(7) сведена к задаче Коши для системы уравнений (18), (19). Эта система относится к классу нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производных. Ее особая специфика – коэффициенты при производных являются интегралами, зависящими от искомых функций $\beta_i(t)$ (через $\zeta(\xi,\eta,t)$). Она является неавтономной, если ускорение w_0 и функция $C(t)$ переменны, и автономной, если w_0 и C постоянны (что возможно при покоящемся, равномерно или равноускоренно движущемся баке). Порядок системы равен $N+M+2$.

Система уравнений (18), (19) совпадает с точностью до обозначений и слагаемого

$$\Big[C(t)-\frac{p^*}{\rho}\Big]F_i$$

с системой уравнений (11.25), (11.26) работы [3, стр. 78], если в последней положить угловые скорости бака ω_i равными нулю и учесть, что для цилиндрического бака

$$\frac{d}{dt}A_k=\sum_{i=0}^{N}\frac{\partial A_k}{\partial\beta_i}\frac{d\beta_i}{dt}. \qquad (30)$$

Формулы настоящей работы (20), (21), (23), (24) для коффициентов A_k, A_{kj}, l_x, l_y, l_z, $\partial l_x/\partial\beta_i$, $\partial l_y/\partial\beta_i$, $\partial l_z/\partial\beta_i$ являются аналогами формул (11.19) для декартовых координат из [3, стр. 75-76]. Они будут использованы при построении уравнений рассматриваемых моделей.

2. РАЗЛИЧИЯ В МОДЕЛЯХ

Перечисленные особенности уравнений (18), (19) делают их довольно сложными. Ниже рассматриваются два подхода к их решению, приводящие к различным моделям – 5-модовой и гамильтоновой. Различия этих моделей обусловлены различными способами преобразования основных уравнений к форме, пригодной для численного интегрирования на ЭВМ.

В дальнейшем рассматриваются усеченные ряды Фурье – Бесселя (25),(26) вида (в самолетных осях функция $p_{01}\equiv 0$, поскольку начало координат O выбрано в центре невозмущенной поверхности жидкости)

$$\zeta(\xi,\eta,t)=\frac{J_0\big(k_0^{(2)}\xi\big)}{J_0\big(k_0^{(2)}R\big)}p_{02}(t)+$$
$$+\frac{J_1\big(k_1^{(1)}\xi\big)}{J_1\big(k_1^{(1)}R\big)}\Big(p_{11}(t)\cos\eta+r_{11}(t)\sin\eta\Big)+$$
$$+\frac{J_2\big(k_2^{(1)}\xi\big)}{J_2\big(k_2^{(1)}R\big)}\Big(p_{21}(t)\cos 2\eta+r_{21}(t)\sin 2\eta\Big), \qquad (31)$$

$$\varphi(x,\xi,\eta,t)=\frac{J_0\big(k_0^{(2)}\xi\big)}{J_0\big(k_0^{(2)}R\big)}\frac{\mathrm{ch}\,\big[k_0^{(2)}(x+h)\big]}{\mathrm{ch}\,\big(k_0^{(2)}h\big)}P_{02}(t)+$$
$$+\frac{J_1\big(k_1^{(1)}\xi\big)}{J_1\big(k_1^{(1)}R\big)}\frac{\mathrm{ch}\,\big[k_1^{(1)}(x+h)\big]}{\mathrm{ch}\,\big(k_1^{(1)}h\big)}\times$$
$$\times\Big(P_{11}(t)\cos\eta+R_{11}(t)\sin\eta\Big)+$$
$$+\frac{J_2\big(k_2^{(1)}\xi\big)}{J_2\big(k_2^{(1)}R\big)}\frac{\mathrm{ch}\,\big[k_2^{(1)}(x+h)\big]}{\mathrm{ch}\,\big(k_2^{(1)}h\big)}\times$$
$$\times\Big(P_{21}(t)\cos 2\eta+R_{21}(t)\sin 2\eta\Big). \qquad (32)$$

В этих представлениях Функция $p_{01}\equiv 0$ из условия постоянства объема жидкости, а функция $P_{01}(t)$ положена равной нулю, поскольку не влияет на поле скоростей жидкости. Таким образом, определению подлежат по пять функций $p_0(t)$, $p_1(t)$, $r_1(t)$, $p_2(t)$, $r_2(t)$ и $P_0(t)$, $P_1(t)$, $R_1(t)$, $P_2(t)$, $R_2(t)$, уравнения для которых выводятся ниже.

Табл. 1. Соответствие обозначений с одинарными и двойными индексами обобщенных координат и квазискоростей

$p_{02}(t)$	$p_{11}(t)$	$r_{11}(t)$	$p_{21}(t)$	$r_{21}(t)$
$p_0(t)$	$p_1(t)$	$r_1(t)$	$p_2(t)$	$r_2(t)$
$\beta_1(t)$	$\beta_2(t)$	$\beta_3(t)$	$\beta_4(t)$	$\beta_5(t)$

$P_{02}(t)$	$P_{11}(t)$	$R_{11}(t)$	$P_{21}(t)$	$R_{21}(t)$
$P_0(t)$	$P_1(t)$	$R_1(t)$	$P_2(t)$	$R_2(t)$
$R_1(t)$	$R_2(t)$	$R_3(t)$	$R_4(t)$	$R_5(t)$

Для упрощения письма будем обозначать искомые функции буквами с одинарными индексами, связь которых с двойными индексами устанавливается в табл. 1.

Обозначения во вторых строках этих таблиц удобны и были приняты для упрощения выкладок в [3], а в третьих – для матричных представлений уравнений в [15].

2.1. Коэффициенты при производных

Коэффициенты при производных $d\beta_i/dt$ группы уравнений (19) образуют 5×5-матрицу $A(\beta)$ вида

$$A(\beta) = \| a_{ki} \| = \left[\frac{\partial A_k(\zeta)}{\partial \beta_i} \right]. \qquad (33)$$

В группе уравнений (18) коэффициенты при производных dR_m/dt образуют транспонированную матрицу $A^T(\beta)$. Элементы матрицы $A(\beta)$ определяются формулами (20) и зависят от свободной поверхности $\zeta(\xi,\eta,t)$, а, следовательно, и от искомых функций $\beta_i(t)$.

В 5-модовой модели, в отличие от гамильтоновой, используются приближенные значения элементов a_{ki}. Построим эти приближенные значения, следуя [3, стр. 100] и замечая, что там упорядочение системы координатных функций φ_m выполнено в соответствии с представлением потенциала в виде

$$\varphi(x,\xi,\eta,t) = \tilde\varphi_1 P_0 + \tilde\varphi_2 R_1 + \tilde\varphi_3 P_1 + \tilde\varphi_4 R_2 + \tilde\varphi_5 P_2,$$

где

$$\tilde\varphi_{2i+1} = Y_i(\xi)\frac{\mathrm{ch}\,[k_i(x+h)]}{\mathrm{ch}\,(k_i h)}\cos(i\eta), \quad i=0,1,2,$$

$$\tilde\varphi_{2i} = Y_i(\xi)\frac{\mathrm{ch}\,[k_i(x+h)]}{\mathrm{ch}\,(k_i h)}\sin(i\eta), \quad i=1,2,$$

$$k_0 = k_0^{(2)}, \quad k_1 = k_1^{(1)}, \quad k_2 = k_2^{(1)}, \qquad (34)$$

а Y_i обозначают нормированные функции Бесселя

$$Y_i(\xi) = \frac{J_i(k_i\xi)}{J_i(k_i R)}, \quad i=0,1,2,$$

В дальнейшем тильдой отмечаются величины, относящиеся к 5-модовой модели.

В отличие от упорядочения в выражении (32), в формулах (34) четным индексам отвечают координатные функции с синусами, а нечетным – с косинусами. Поэтому для сопоставления моделей получаются соотношения

$$A_1 = \tilde A_1, \quad A_2 = \tilde A_3, \quad A_3 = \tilde A_2,$$

$$A_4 = \tilde A_5, \quad A_5 = \tilde A_4. \qquad (35)$$

В первой из формул (20) интеграл по x (умноженный на ξ) является подынтегральной функцией для повторного интеграла по ξ, η. Заменяя в интеграле по x функцию φ_m на $\tilde\varphi_m$ и замечая, что от x зависят только гиперболические косинусы, после интегрирования по x имеем ($i=0,1,2$, n соответствует $\tilde\varphi_m$)

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\mathrm{ch}\,[k_i(x+h)]}{\mathrm{ch}\,(k_i h)} dx =$$

$$= \frac{1}{k_i}[\mathrm{sh}\,(k_i\zeta) + \mathrm{th}\,(k_i h)\mathrm{ch}\,(k_i\zeta)]. \qquad (36)$$

Здесь ζ является линейной однородной функцией обобщенных координат жидкости вида

$$\zeta(p_0,r_1,p_1,r_2,p_2) = Y_0 p_0 + Y_1(r_1\sin(\eta) + p_1\cos(\eta)) +$$

$$+ Y_2(r_2\sin(2\eta) + p_2\cos(2\eta)). \qquad (37)$$

Правая часть равенства (36) раскладывается в ряд Тейлора по переменной ζ в окрестности точки $\zeta=0$ с удержанием членов до 3-ей степени включительно относительно этой переменной. В результате получается приближенная формула

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\mathrm{ch}\,[k_i(x+h)]}{\mathrm{ch}\,(k_i h)} dx \simeq$$

$$\simeq \frac{\mathrm{th}\,(k_i h)}{k_i} + \zeta + \frac{1}{2}\text{æ}_i\zeta^2 + \frac{1}{6}k_i^2\zeta^3, \qquad (38)$$

где ζ является линейной формой по p_0, r_1, p_1, r_2, p_2 вида (37), а через æ_i обозначено собственное число линейной гидродинамической задачи, определяемое по формуле

$$\text{æ}_i = k_i\mathrm{th}\,(k_i h), \quad i=0,1,2. \qquad (39)$$

Дальнейшая цепочка преобразований заключается в следующем: выражения (34) для $\tilde{\varphi}_i$ подставляются в первую из формул (20); интегралы от гиперболических косинусов заменяются их приближенными выражениями (38); вместо функции ζ подставляются линейные формы (37) (символьные вычисления); полагается (ε – бесконечно малая величина)

$$r_1 \sim p_1 \sim \varepsilon, \quad p_0 \sim r_2 \sim p_2 \sim \varepsilon^2$$

и в полученных полиномах 3-ей степени относительно величин p_0, r_1, p_1, r_2, p_2 удерживаются лишь члены до 3-го порядка малости включительно относительно ε; выполняются интегрирования по угловой координате η (символьные вычисления).

В результате величины $\tilde{A}_m$ $(m = 1, \ldots, 5)$ оказываются приближенно представленными в виде полиномов 3-ей степени относительно обобщенных координат жидкости следующим образом:

$$\tilde{A}_1 \simeq \tilde{a} + \tilde{a}_{17} p_0 + \tilde{a}_4 (p_1^2 + r_1^2),$$

$$\tilde{A}_2 \simeq \tilde{a}_5 r_1 + \tilde{a}_{14} p_0 r_1 + \tilde{a}_{18} (p_1 r_2 - p_2 r_1) + \tilde{a}_6 (p_1^2 r_1 + r_1^3),$$

$$\tilde{A}_3 \simeq \tilde{a}_5 p_1 + \tilde{a}_{14} p_0 p_1 + \tilde{a}_{18} (p_1 p_2 + r_1 r_2) + \tilde{a}_6 (p_1^3 + p_1 r_1^2),$$

$$\tilde{A}_4 \simeq \tilde{a}_{20} r_2 + 2\tilde{a}_7 p_1 r_1,$$

$$\tilde{A}_5 \simeq \tilde{a}_{20} p_2 + \tilde{a}_7 (p_1^2 - r_1^2). \qquad (40)$$

Здесь[1]

$$\tilde{a} = \rho 2\pi \frac{æ_0}{k_0^2} i_1, \quad \tilde{a}_4 = \rho \frac{\pi}{2} æ_0 i_2, \quad \tilde{a}_5 = \rho \pi i_3,$$

$$\tilde{a}_6 = \rho \frac{\pi}{8} k_1^2 i_4, \quad \tilde{a}_7 = \rho \frac{\pi}{4} æ_2 i_5, \quad \tilde{a}_{14} = \rho \pi æ_1 i_2,$$

$$\tilde{a}_{17} = \rho 2\pi i_6, \quad \tilde{a}_{18} = \rho \frac{\pi}{2} æ_1 i_5, \quad \tilde{a}_{20} = \rho \pi i_{12}; \qquad (41)$$

$$i_1 = \int_0^R \xi Y_0 (k_0 \xi) d\xi = 0,$$

$$i_2 = \int_0^R \xi Y_0 Y_1^2 d\xi, \quad i_3 = \int_0^R \xi Y_1^2 d\xi,$$

$$i_4 = \int_0^R \xi Y_1^4 d\xi, \quad i_5 = \int_0^R \xi Y_1^2 Y_2 d\xi,$$

$$i_6 = \int_0^R \xi Y_0^2 d\xi, \quad i_{12} = \int_0^R \xi Y_2^2 d\xi. \qquad (42)$$

[1] Для контроля результатов сохранены, в основном, буквенные обозначения работы [3, стр. 102-104], замена которых неоправданно усложнила бы и без того достаточно громоздкие выкладки. Где нужно, поставлен множитель ρ, изменен знак у $\tilde{a}_7$.

Теперь из матрицы (33), приводя в соответствие обозначения с помощью табл. 1 и формул (35), получаем следующие приближения по 5-модовой модели искомых коэффициентов при производных в точных уравнениях (18), (19):

$$a_{11} = \frac{\partial A_1}{\partial \beta_1} = \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial p_0} \simeq \tilde{a}_{17},$$

$$a_{21} = \frac{\partial A_2}{\partial \beta_1} = \frac{\partial \tilde{A}_3}{\partial p_0} \simeq \tilde{a}_{14} p_1,$$

$$a_{31} = \frac{\partial A_3}{\partial \beta_1} = \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial p_0} \simeq \tilde{a}_{14} r_1,$$

$$a_{41} = \frac{\partial A_4}{\partial \beta_1} = \frac{\partial \tilde{A}_5}{\partial p_0} \simeq a_{51} = \frac{\partial A_5}{\partial \beta_1} = \frac{\partial \tilde{A}_4}{\partial p_0} \simeq 0;$$

$$a_{12} = \frac{\partial A_1}{\partial \beta_2} = \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial p_1} \simeq 2\tilde{a}_4 p_1,$$

$$a_{22} = \frac{\partial A_2}{\partial \beta_2} = \frac{\partial \tilde{A}_3}{\partial p_1} \simeq \tilde{a}_5 + \tilde{a}_{14} p_0 + \tilde{a}_{18} p_2 + \tilde{a}_6 (3p_1^2 + r_1^2),$$

$$a_{32} = \frac{\partial A_3}{\partial \beta_2} = \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial p_1} \simeq 2\tilde{a}_6 p_1 r_1 + \tilde{a}_{18} r_2,$$

$$a_{42} = \frac{\partial A_4}{\partial \beta_2} = \frac{\partial \tilde{A}_5}{\partial p_1} \simeq 2\tilde{a}_7 p_1,$$

$$a_{52} = \frac{\partial A_5}{\partial \beta_2} = \frac{\partial \tilde{A}_4}{\partial p_1} \simeq 2\tilde{a}_7 r_1;$$

$$a_{13} = \frac{\partial A_1}{\partial \beta_3} = \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial r_1} \simeq 2\tilde{a}_4 r_1,$$

$$a_{23} = \frac{\partial A_2}{\partial \beta_3} = \frac{\partial \tilde{A}_3}{\partial r_1} \simeq 2\tilde{a}_6 p_1 r_1 + \tilde{a}_{18} r_2,$$

$$a_{33} = \frac{\partial A_3}{\partial \beta_3} = \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial r_1} \simeq \tilde{a}_5 + \tilde{a}_{14} p_0 - \tilde{a}_{18} p_2 + \tilde{a}_6 (p_1^2 + 3r_1^2),$$

$$a_{43} = \frac{\partial A_4}{\partial \beta_3} = \frac{\partial \tilde{A}_5}{\partial r_1} \simeq -2\tilde{a}_7 r_1,$$

$$a_{53} = \frac{\partial A_5}{\partial \beta_3} = \frac{\partial \tilde{A}_4}{\partial r_1} \simeq 2\tilde{a}_7 p_1;$$

$$a_{14} = \frac{\partial A_1}{\partial \beta_4} = \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial p_2} \simeq a_{54} = \frac{\partial A_5}{\partial \beta_4} = \frac{\partial \tilde{A}_4}{\partial p_2} \simeq 0,$$

$$a_{24} = \frac{\partial A_2}{\partial \beta_4} = \frac{\partial \tilde{A}_3}{\partial p_2} \simeq \tilde{a}_{18} p_1,$$

$$a_{34} = \frac{\partial A_3}{\partial \beta_4} = \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial p_2} \simeq -\tilde{a}_{18} r_1,$$

$$a_{44} = \frac{\partial A_4}{\partial \beta_4} = \frac{\partial \tilde{A}_5}{\partial p_2} \simeq \tilde{a}_{20};$$

$$a_{15} = \frac{\partial A_1}{\partial \beta_5} = \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial r_2} \simeq a_{45} = \frac{\partial A_4}{\partial \beta_5} = \frac{\partial \tilde{A}_5}{\partial r_2} \simeq 0,$$

$$a_{25} = \frac{\partial A_2}{\partial \beta_5} = \frac{\partial \tilde{A}_3}{\partial r_2} \simeq \tilde{a}_{18} r_1,$$

$$a_{35} = \frac{\partial A_3}{\partial \beta_5} = \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial r_2} \simeq \tilde{a}_{18} p_1,$$

$$a_{55} = \frac{\partial A_5}{\partial \beta_5} = \frac{\partial \tilde{A}_4}{\partial r_2} \simeq \tilde{a}_{20}. \qquad (43)$$

Замечание. Матрица A не вырождается при $\beta_i(t) = 0$. Это свойство точной матрицы A сохраняетя и в ее 5-модовом приближении (43).

Таким образом, одно из различий в 5-модовой и гамильтоновой моделях обусловлено различиями в формулах для коэффициентов при производных в основных уравнениях (18), (19): в 5-модовой модели они вычисляются по приближенным формулам (43), а в гамильтоновой – по точным формулам (20). Элементы матрицы A, являющиеся интегралами от неизвестных функций в гамильтоновой модели, заменены их разложениями в степенные ряды в 5-модовой модели.

2.2. Группа уравнений $\boldsymbol{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{R}_k} - \frac{\partial L}{\partial R_k} = 0}$

Рассмотрим вторую группу уравнений основной системы (18), (19). Используя соотношения (30), ее можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^{M} A_{kj}(\zeta) R_j = \frac{d}{dt} A_k, \quad k = 1, \ldots, M. \qquad (44)$$

где A_k являются известными функциями обобщенных координат $p_0(t)$, $r_1(t)$, $p_1(t)$, $r_2(t)$, $p_2(t)$ в силу выражений (35), (40). Отсюда следует, что R_k являются линейными комбинациями производных по времени от обобщенных координат, что оправдывает их название "квазискорости". 5-модовая модель использует уравнения второй группы именно в форме (44), в то время как гамильтонова имеет дело с этими уравнениями в форме (19). Более того, в 5-модовой модели, в отличие от гамильтоновой, величины A_{kj}, определяемые формулами (21), представляются приближенно (с точностью до членов 3-го порядка малости) в виде многочленов относительно обобщенных координат $p_0(t)$, $r_1(t)$, $p_1(t)$, $r_2(t)$, $p_2(t)$. Построим эти многочлены.

В обеих моделях в формуле (21) для коэффициента A_{kj} выполняется интегрирование по координате x, т.е. этот коэффициент представляется в виде двойного интеграла вида

$$A_{kj}(\zeta) = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} F_{kj}(\xi, \eta, \zeta) \xi d\eta d\xi, \qquad (45)$$

где функция $F_{kj}(\xi, \eta, \beta)$ определяется квадратурой

$$F_{kj}(\xi, \eta, \beta) = \int_{-h}^{\zeta(\xi,\eta,t)} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j dx \qquad (46)$$

и выражается через элементарные функции. Однако эти элементарные функции содержат в качестве аргумента функцию $\zeta(\xi, \eta, t)$, что не позволяет провести дальнейшие интегрирования по полярным координатам ξ, η в аналитическом виде. Поэтому в 5-модовой модели функции F_{kj} разлагаются в кратные степенные ряды по p_0, r_1, p_1, r_2, p_2, после чего уже оказывается выполнимым интегрирование по угловой координате η, а интегралы по ξ от различных комбинаций функций Бесселя $Y_i(\xi)$ и их производных $Y_i'(\xi)$ входят множителями в коэффициенты этих рядов.

Для интегрирования по x градиенты от функций φ_k представляются (с учетом связи между φ_k и $\tilde{\varphi}_k$) в виде следующих векторов (в проекциях на оси локальной цилиндрической системы координат):

$$\nabla \tilde{\varphi}_{2i+1} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,(k_i h)} \Big[k_i Y_i(\xi) \mathrm{sh}\,[k_i(x+h)] \cos(i\eta);$$
$$k_i Y_i'(\xi) \mathrm{ch}\,[k_i(x+h)] \cos(i\eta);$$
$$-\frac{i}{\xi} Y_i(\xi) \mathrm{ch}\,[k_i(x+h)] \sin(i\eta) \Big], \quad i = 0, 1, 2,$$
$$\nabla \tilde{\varphi}_{2i} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,(k_i h)} \Big[k_i Y_i(\xi) \mathrm{sh}\,[k_i(x+h)] \sin(i\eta);$$
$$k_i Y_i'(\xi) \mathrm{ch}\,[k_i(x+h)] \sin(i\eta);$$
$$\frac{i}{\xi} Y_i(\xi) \mathrm{ch}\,[k_i(x+h)] \cos(i\eta) \Big], \quad i = 1, 2. \qquad (47)$$

В этих формулах штрих обозначает производную от функции Бесселя $Y_i(k_i\xi)$ по внутренней функции, т.е.

$$Y_i'(\xi) = Y_i'(u)\big|_{u=k_i\xi} = \frac{dY_i(u)}{du}\Big|_{u=k_i\xi}, \quad i = 0, 1, 2. \qquad (48)$$

Последовательная подстановка выражений (47) в (46) и последующее интегрирование по x приводят к точным формулам для подынтегральных функций в повторных интегралах (45). В случае элементов A_{kk} с одинаковыми индексами получаются следующие соотношения (функции $\tilde{F}_{kj}$ отвечают элементам $\tilde{A}_{kj}$, по которым затем определяются A_{kj}):

нечетные индексы –

$$\tilde{F}_{2i+1,2i+1} = \int_{-h}^{\zeta} \nabla\tilde{\varphi}_{2i+1} \cdot \nabla\tilde{\varphi}_{2i+1} dx =$$

$$= X_{2i+1}(\xi,\eta) S_i(\zeta) + \Xi_{2i+1}(\xi,\eta) C_i(\zeta) +$$

$$+\Theta_{2i+1}(\xi,\eta) C_i(\zeta), \quad i = 0,1,2, \qquad (49)$$

где

$$X_{2i+1}(\xi,\eta) = k_i^2 Y_i^2(\xi) \cos^2(i\eta),$$

$$\Xi_{2i+1}(\xi,\eta) = k_i^2 \left(Y_i^{'}(\xi)\right)^2 \cos^2(i\eta),$$

$$\Theta_{2i+1}(\xi,\eta) = \frac{i^2}{\xi^2} Y_i^2(\xi) \sin^2(i\eta), \quad i = 0,1,2, \qquad (50)$$

четные индексы –

$$\tilde{F}_{2i,2i} = \int_{-h}^{\zeta} \nabla\tilde{\varphi}_{2i} \cdot \nabla\tilde{\varphi}_{2i} dx =$$

$$= X_{2i}(\xi,\eta) S_i(\zeta) + \Xi_{2i}(\xi,\eta) C_i(\zeta) +$$

$$+\Theta_{2i}(\xi,\eta) C_i(\zeta), \quad i = 1,2, \qquad (51)$$

где

$$X_{2i}(\xi,\eta) = k_i^2 Y_i^2(\xi) \sin^2(i\eta),$$

$$\Xi_{2i}(\xi,\eta) = k_i^2 \left(Y_i^{'}(\xi)\right)^2 \sin^2(i\eta),$$

$$\Theta_{2i}(\xi,\eta) = \frac{i^2}{\xi^2} Y_i^2(\xi) \cos^2(i\eta), \quad i = 0,1,2, \qquad (52)$$

Для четных и нечетных индексов функции $S_i(\zeta)$, $C_i(\zeta)$ в формулах (49), (51) определяются одинаковым образом, а именно:

$$S_i(\zeta) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(k_i h)} \int_{-h}^{\zeta} \mathrm{sh}^2\left[k_i(x+h)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{4k_i \mathrm{ch}^2(k_i h)} \Big\{ \mathrm{sh}\left[2k_i(h+\zeta)\right] - 2k_i(h+\zeta) \Big\},$$

$$i = 0,1,2, \qquad (53)$$

$$C_i(\zeta) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(k_i h)} \int_{-h}^{\zeta} \mathrm{ch}^2\left[k_i(x+h)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{4k_i \mathrm{ch}^2(k_i h)} \Big\{ \mathrm{sh}\left[2k_i(h+\zeta)\right] + 2k_i(h+\zeta) \Big\},$$

$$i = 0,1,2. \qquad (54)$$

Полученные точные соотношения (49)–(54) сводят вычисление диагональных элементов A_{kk} матрицы $\|A_{ij}\|$ в уравнениях (19) к двойному интегрированию в формулах (45) вместо тройного интегрирования. Это существенно сокращает время вычислений и используется в гамильтоновой модели. В 5-модовой же модели исключается еще одно интегрирование (по η) ценой перехода к приближенным соотношениям и введения ограничений на величины обобщенных координат жидкости. Для этого функции (53), (54) разлагаются в степенные ряды по ζ в окрестности точки $\zeta = 0$. С точностью до членов 3-го порядка малости получаются выражения

$$S_i(\zeta) \simeq \tilde{S}_i(\zeta) = \frac{1}{2k_i^2}\Big[\text{æ}_i - \frac{k_i^2 h}{\mathrm{ch}^2(k_i h)}\Big] +$$

$$+\frac{1}{k_i^2}\text{æ}_i^2\zeta + \text{æ}_i\zeta^2 + \frac{1}{3}(k_i^2 + \text{æ}_i^2)\zeta^3,$$

$$C_i(\zeta) \simeq \tilde{C}_i(\zeta) = \frac{1}{2k_i^2}\Big[\text{æ}_i + \frac{k_i^2 h}{\mathrm{ch}^2(k_i h)}\Big] +$$

$$+\zeta + \text{æ}_i\zeta^2 + \frac{1}{3}(k_i^2 + \text{æ}_i^2)\zeta^3,$$

$$i = 0,1,2. \qquad (55)$$

Затем приближения (55) и аппроксимация (37) функции ζ подставляются в формулы (49), (51), после чего выполняется интегрирование по η полученных выражений (символьные вычисления). В результате имеем следующие приближенные выражения:

$$\int_0^{2\pi} \tilde{F}_{2i+1,2i+1} d\eta \simeq$$

$$\simeq \int_0^{2\pi} \left(X_{2i+1}\tilde{S}_i + \Xi_{2i+1}\tilde{C}_i + \Theta_{2i+1}\tilde{C}_i\right) d\eta =$$

$$= k_i^2 Y_i^2 \Big[\frac{1}{2k_i^2}\Big(\text{æ}_i - \frac{k_i^2 h}{\mathrm{ch}^2(k_i h)}\Big) M_0(i) +$$

$$+\frac{\text{æ}_i^2}{k_i^2} M_1(i) + \text{æ}_i M_2(i) + \frac{1}{3}(k_i^2 + \text{æ}_i^2) M_3(i)\Big] +$$

$$+k_i^2 \left(Y_i^{'}\right)^2 \Big[\frac{1}{2k_i^2}\Big(\text{æ}_i + \frac{k_i^2 h}{\mathrm{ch}^2(k_i h)}\Big) M_0(i) +$$

$$+M_1(i) + \text{æ}_i M_2(i) + \frac{1}{3}(k_i^2 + \text{æ}_i^2) M_3(i)\Big] +$$

$$+\frac{i^2}{\xi^2} Y_i^2 \Big[\frac{1}{2k_i^2}\Big(\text{æ}_i + \frac{k_i^2 h}{\mathrm{ch}^2(k_i h)}\Big) N_0(i) +$$

$$+N_1(i) + \text{æ}_i N_2(i) + \frac{1}{3}(k_i^2 + \text{æ}_i^2) N_3(i)\Big],$$

$$i = 0,1,2, \qquad (56)$$

$$\int_0^{2\pi} \tilde{F}_{2i,2i} d\eta \simeq$$

$$\simeq \int_0^{2\pi} \left(X_{2i}\tilde{S}_i + \Xi_{2i}\tilde{C}_i + \Theta_{2i}\tilde{C}_i\right) d\eta =$$

$$= k_i^2 Y_i^2 \Big[\frac{1}{2k_i^2}\Big(\text{æ}_i - \frac{k_i^2 h}{\mathrm{ch}^2(k_i h)}\Big) N_0(i) +$$

$$+\frac{\text{æ}_i^2}{k_i^2}N_1(i)+\text{æ}_iN_2(i)+\frac{1}{3}(k_i^2+\text{æ}_i^2)N_3(i)\Big]+$$

$$+k_i^2\big(Y_i'\big)^2\Big[\frac{1}{2k_i^2}\Big(\text{æ}_i+\frac{k_i^2h}{\operatorname{ch}^2(k_ih)}\Big)N_0(i)+$$

$$+N_1(i)+\text{æ}_iN_2(i)+\frac{1}{3}(k_i^2+\text{æ}_i^2)N_3(i)\Big]+$$

$$+\frac{i^2}{\xi^2}Y_i^2\Big[\frac{1}{2k_i^2}\Big(\text{æ}_i+\frac{k_i^2h}{\operatorname{ch}^2(k_ih)}\Big)M_0(i)+$$

$$+M_1(i)+\text{æ}_iM_2(i)+\frac{1}{3}(k_i^2+\text{æ}_i^2)M_3(i)\Big],$$

$$i=1,2. \qquad (57)$$

Здесь через $M_j(i)$, $N_j(i)$ $(j=0,1,2,3)$ обозначены следующие интегралы:

$$M_0(i)=\int_0^{2\pi}\cos^2(i\eta)d\eta=\pi\left\{\begin{array}{ll}2, & i=0,\\ 1, & i=1,\\ 1, & i=2,\end{array}\right.$$

$$M_1(i)=\int_0^{2\pi}\cos^2(i\eta)\zeta d\eta\simeq$$

$$\simeq\pi\left\{\begin{array}{ll}2p_0Y_0, & i=0,\\ p_0Y_0+\frac{1}{2}p_2Y_2, & i=1,\\ p_0Y_0, & i=2,\end{array}\right.$$

$$M_2(i)=\int_0^{2\pi}\cos^2(i\eta)\zeta^2 d\eta\simeq$$

$$\simeq\frac{\pi}{4}Y_1^2\left\{\begin{array}{ll}4(p_1^2+r_1^2), & i=0,\\ 3p_1^2+r_1^2, & i=1,\\ 2(p_1^2+r_1^2), & i=2,\end{array}\right.$$

$$M_3(i)=\int_0^{2\pi}\cos^2(i\eta)\zeta^3 d\eta\simeq 0, \quad i=0,1,2;$$

$$N_0(i)=\int_0^{2\pi}\sin^2(i\eta)d\eta=\pi\left\{\begin{array}{ll}0, & i=0,\\ 1, & i=1,\\ 1, & i=2,\end{array}\right.$$

$$N_1(i)=\int_0^{2\pi}\sin^2(i\eta)\zeta d\eta\simeq$$

$$\simeq\pi\left\{\begin{array}{ll}0, & i=0,\\ p_0Y_0-\frac{1}{2}p_2Y_2, & i=1,\\ p_0Y_0, & i=2,\end{array}\right.$$

$$N_2(i)=\int_0^{2\pi}\sin^2(i\eta)\zeta^2 d\eta\simeq$$

$$\simeq\frac{\pi}{4}Y_1^2\left\{\begin{array}{ll}0, & i=0,\\ p_1^2+3r_1^2, & i=1,\\ 2(p_1^2+r_1^2), & i=2,\end{array}\right.$$

$$N_3(i)=\int_0^{2\pi}\sin^2(i\eta)\zeta^3 d\eta\simeq 0, \quad i=0,1,2. \qquad (58)$$

Из формул (56), (58) после необходимых преобразований получаются следующие искомые приближения по 5-модовой модели для коэффициентов A_{kj} с одинаковыми индексами:

$$A_{11}=\tilde A_{11}\simeq\tilde a_1+\tilde a_{21}p_0+\tilde a_9(p_1^2+r_1^2),$$

$$A_{22}=\tilde A_{33}\simeq\tilde a_{10}+\tilde a_{22}p_0+\tilde a_{19}p_2+\tilde a_{11}p_1^2+\tilde a_{12}r_1^2,$$

$$A_{33}=\tilde A_{22}\simeq\tilde a_{10}+\tilde a_{22}p_0-\tilde a_{19}p_2+\tilde a_{12}p_1^2+\tilde a_{11}r_1^2,$$

$$A_{44}=\tilde A_{55}\simeq\tilde a_2+\tilde a_{25}p_0+\tilde a_{13}(p_1^2+r_1^2),$$

$$A_{55}=\tilde A_{44}=A_{44}. \qquad (59)$$

В этих формулах в дополнение к обозначениям (41), (42) введено[2]:
для элемента A_{11} –

$$\tilde a_1=\rho\pi\Big[\Big(\text{æ}_0-\frac{k_0^2h}{\operatorname{ch}^2(k_0h)}\Big)i_6+\Big(\text{æ}_0+\frac{k_0^2h}{\operatorname{ch}^2(k_0h)}\Big)i_7\Big],$$

$$\tilde a_9=\rho\pi k_0^2\text{æ}_0(i_8+i_9), \quad \tilde a_{21}=2\rho\pi(\text{æ}_0^2i_{25}+k_0^2i_{26}),$$

$$i_6=\int_0^R\xi Y_0^2d\xi, \quad i_7=\int_0^R\xi\big(Y_0'\big)^2d\xi,$$

$$i_8=\int_0^R\xi Y_0^2Y_1^2d\xi, \quad i_9=\int_0^R\xi\big(Y_0'\big)^2Y_1^2d\xi,$$

$$i_{25}=\int_0^R\xi Y_0^3d\xi, \quad i_{26}=\int_0^R\xi\big(Y_0'\big)^2Y_0d\xi$$

$$\Big(i_6=i_7,\ i_{26}=\frac{1}{2}i_{25},\ k_1^2i_4=i_{24}+3k_1^2i_{42},\ \tilde i_9=k_0^2i_9\Big); \qquad (60)$$

для элементов A_{22} и A_{33} [3] –

$$\tilde a_{10}=\rho\frac{\pi}{2}\Big[\Big(\text{æ}_1-\frac{k_1^2h}{\operatorname{ch}^2(k_1h)}\Big)i_3+$$

$$+\Big(\text{æ}_1+\frac{k_1^2h}{\operatorname{ch}^2(k_1h)}\Big)i_{10}+\frac{1}{k_1^2}\Big(\text{æ}_1+\frac{k_1^2h}{\operatorname{ch}^2(k_1h)}\Big)i_{11}\Big],$$

$$\tilde a_{11}=\rho\frac{\pi}{4}\text{æ}_1\big(3k_1^2i_4+3k_1^2i_{42}+i_{24}\big),$$

$$\tilde a_{12}=\rho\frac{\pi}{4}\text{æ}_1\big(k_1^2i_4+k_1^2i_{42}+3i_{24}\big),$$

$$\tilde a_{19}=\rho\frac{\pi}{2}\big(\text{æ}_1^2i_5+k_1^2i_{31}-i_{23}\big),$$

$$\tilde a_{22}=\rho\pi\big(\text{æ}_1^2i_2+k_1^2i_{28}+i_{29}\big),$$

---

[2] В книге [3, формулы (15.10)] символ Y_i' обозначает, в отличие от (48), производную по ξ, т. е. $Y_i'(k_i\xi)=$ $=k_idY_i(u)/du$. Поэтому, например, i_9 в [3] равно $k_0^2i_9$, где i_9 определено в (60), и т.д. Интегралы i_k из [3] здесь отмечаются тильдой. Если $\tilde i_k$ не зависит от производной Y_i', то $\tilde i_k=i_k$.

[3] В [3, стр. 102] вместо приведенных там формул для a_{10}, a_{11} должно быть $a_{10}=\rho/2\text{æ}_{11}a_5$, $a_{11}=4\rho\text{æ}_{11}a_6$.

$$i_2=\int_0^R \xi Y_0 {Y_1}^2 d\xi, \quad i_3=\int_0^R \xi {Y_1}^2 d\xi,$$

$$i_4=\int_0^R \xi Y_1^4 d\xi, \quad i_5=\int_0^R \xi {Y_1}^2 Y_2 d\xi,$$

$$i_{10}=\int_0^R \xi \bigl(Y_1^{'}\bigr)^2 d\xi, \quad i_{11}=\int_0^R \frac{1}{\xi} {Y_1}^2 d\xi,$$

$$i_{23}=\int_0^R \frac{1}{\xi} Y_1^2 Y_2 d\xi, \quad i_{24}=\int_0^R \frac{1}{\xi} Y_1^4 d\xi,$$

$$i_{28}=\int_0^R \xi Y_0 \bigl(Y_1^{'}\bigr)^2 d\xi, \quad i_{29}=\int_0^R \frac{1}{\xi} Y_0 {Y_1}^2 d\xi,$$

$$i_{31}=\int_0^R \xi \bigl(Y_1^{'}\bigr)^2 Y_2 d\xi \quad i_{42}=\int_0^R \xi Y_1^2 \bigl(Y_1^{'}\bigr)^2 d\xi$$

$$\Bigl(i_{10}=i_3-\frac{1}{k_1^2}i_{11}, \quad \tilde{i}_{28}=k_1^2 i_{28}, \quad \tilde{i}_{31}=k_1^2 i_{31}\Bigr); \quad (61)$$

для элементов A_{44} и A_{55} –

$$\tilde{a}_2=\rho\frac{\pi}{2}\Bigl[\Bigl(æ_2-\frac{k_2^2 h}{\mathrm{ch}^{\,2}(k_2 h)}\Bigr)i_{12}+$$

$$+\frac{1}{2}\Bigl(æ_2+\frac{k_2^2 h}{\mathrm{ch}^{\,2}(k_2 h)}\Bigr)i_{13}+\frac{2}{k_2^2}\Bigl(æ_2+\frac{k_2^2 h}{\mathrm{ch}^{\,2}(k_2 h)}\Bigr)i_{14}\Bigr],$$

$$\tilde{a}_{13}=\rho\frac{\pi}{2}æ_2\bigl(k_2^2 i_{15}+k_2^2 i_{16}+4 i_{17}\bigr),$$

$$\tilde{a}_{25}=\rho\pi\bigl(æ_2^2 i_{30}+k_2^2 i_{32}+4 i_{33}\bigr),$$

$$i_{12}=\int_0^R \xi Y_2^2 d\xi, \quad i_{13}=\int_0^R \xi \bigl(Y_2^{'}\bigr)^2 d\xi,$$

$$i_{14}=\int_0^R \frac{1}{\xi} Y_2^2 d\xi, \quad i_{15}=\int_0^R \xi {Y_1}^2 Y_2^2 d\xi,$$

$$i_{16}=\int_0^R \xi Y_1^2 \bigl(Y_2^{'}\bigr)^2 d\xi, \quad i_{17}=\int_0^R \frac{1}{\xi} {Y_1}^2 Y_2^2 d\xi,$$

$$i_{30}=\int_0^R \xi Y_0 Y_2^2 d\xi, \quad i_{32}=\int_0^R \xi Y_0 \bigl(Y_2^{'}\bigr)^2 d\xi,$$

$$i_{33}=\int_0^R \frac{1}{\xi} Y_0 Y_2^2 d\xi,$$

$$\Bigl(i_{13}=i_{12}-\frac{4}{k_2^2}i_{14}, \quad \tilde{i}_{32}=k_2^2 i_{32}, \quad \tilde{i}_{16}=k_2^2 i_{16}\Bigr). \quad (62)$$

Выражения для коэффициентов $\tilde{a}_i$ в многочленных представлениях (60) – (62) элементов A_{ii} приводятся к указанным в работе [3, формулы (15.10)] если учесть, что между интегралами i_k существуют соотношения, вытекающие из формулы интегрирования по частям и уравнения Бесселя

$$xJ_i^{''}(x)+J_i^{'}(x)+(x-\frac{i^2}{x})J_i(x)=0$$

для функций Бесселя $J_i(x)$ первого рода и целого порядка. Подобные соотношения, необходимые для преобразований, а также формулы перехода от $\tilde{i}_k$ к i_k выписаны в скобках.

Аналогичные формулы получаются для внедиагональных элементов A_{mn} матрицы $\|A_{mn}\|$. В силу симметрии этой матрицы достаточно ограничиться рассмотрением только ее наддиагональных элементов. В зависимости от четности или нечетности индексов наддиагональные элементы $\tilde{A}_{mn}$ матрицы $\|\tilde{A}_{mn}\|$ (матрица $\|A_{mn}\|$ получается путем соответствующей перестановки строк и столбцов в матрице $\|\tilde{A}_{mn}\|$) можно отнести к одному из 4-х типов, для которых соответствующие функции $\tilde{F}_{mn}$ определяются следующими точными соотношениями:

тип 1 – m нечетное, n четное $(m<n)$ –

$$\tilde{F}_{2i+1,2j}=\int_{-h}^{\zeta}\nabla\tilde{\varphi}_{2i+1}\cdot\nabla\tilde{\varphi}_{2j}dx=$$

$$=X_{2i+1,2j}(\xi,\eta)S_{i,j}(\zeta)+\Xi_{2i+1,2j}(\xi,\eta)C_{i,j}(\zeta)+$$
$$+\Theta_{2i+1,2j}(\xi,\eta)C_{i,j}(\zeta),$$
$$i=0,1,2, \quad j=1,2, \quad 2i+1<2j, \qquad (63)$$

где

$$X_{2i+1,2j}(\xi,\eta)=k_i k_j Y_i(\xi)Y_j(\xi)\cos(i\eta)\sin(j\eta),$$

$$\Xi_{2i+1,2j}(\xi,\eta)=k_i k_j Y_i^{'}(\xi)Y_j^{'}(\xi)\cos(i\eta)\sin(j\eta),$$

$$\Theta_{2i+1,2j}(\xi,\eta)=-\frac{ij}{\xi^2}Y_i(\xi)Y_j(\xi)\sin(i\eta)\cos(j\eta); \quad (64)$$

тип 2 – m нечетное, n нечетное $(m<n)$ –

$$\tilde{F}_{2i+1,2j+1}=\int_{-h}^{\zeta}\nabla\tilde{\varphi}_{2i+1}\cdot\nabla\tilde{\varphi}_{2j+1}dx=$$

$$=X_{2i+1,2j+1}(\xi,\eta)S_{i,j}(\zeta)+\Xi_{2i+1,2j+1}(\xi,\eta)C_{i,j}(\zeta)+$$
$$+\Theta_{2i+1,2j+1}(\xi,\eta)C_{i,j}(\zeta),$$
$$i=0,1,2, \quad j=0,1,2, \quad i<j, \qquad (65)$$

где

$$X_{2i+1,2j+1}(\xi,\eta)=k_i k_j Y_i(\xi)Y_j(\xi)\cos(i\eta)\cos(j\eta),$$

$$\Xi_{2i+1,2j+1}(\xi,\eta)=k_i k_j Y_i^{'}(\xi)Y_j^{'}(\xi)\cos(i\eta)\cos(j\eta),$$

$$\Theta_{2i+1,2j}(\xi,\eta)=\frac{ij}{\xi^2}Y_i(\xi)Y_j(\xi)\sin(i\eta)\sin(j\eta); \quad (66)$$

тип 3 – m четное, n нечетное $(m<n)$ –

$$\tilde{F}_{2i,2j+1}=\int_{-h}^{\zeta}\nabla\tilde{\varphi}_{2i}\cdot\nabla\tilde{\varphi}_{2j+1}dx=$$

$$= X_{2i,2j+1}(\xi,\eta)S_{i,j}(\zeta) + \Xi_{2i,2j+1}(\xi,\eta)C_{i,j}(\zeta)+ \\ +\Theta_{2i,2j+1}(\xi,\eta)C_{i,j}(\zeta), \\ i=1,2, \quad j=0,1,2, \quad 2i<2j+1, \qquad (67)$$

где

$$X_{2i,2j+1}(\xi,\eta) = k_i k_j Y_i(\xi)Y_j(\xi)\sin(i\eta)\cos(j\eta),$$

$$\Xi_{2i,2j+1}(\xi,\eta) = k_i k_j Y_i'(\xi)Y_j'(\xi)\sin(i\eta)\cos(j\eta),$$

$$\Theta_{2i,2j+1}(\xi,\eta) = -\frac{ij}{\xi^2}Y_i(\xi)Y_j(\xi)\cos(i\eta)\sin(j\eta); \quad (68)$$

тип 4 – m четное, n четное ($m<n$) –

$$\tilde{F}_{2i,2j} = \int_{-h}^{\zeta} \nabla\tilde{\varphi}_{2i}\cdot\nabla\tilde{\varphi}_{2j}\,dx =$$

$$= X_{2i,2j}(\xi,\eta)S_{i,j}(\zeta) + \Xi_{2i,2j}(\xi,\eta)C_{i,j}(\zeta)+ \\ +\Theta_{2i,2j}(\xi,\eta)C_{i,j}(\zeta), \\ i=1,2, \quad j=1,2, \quad i<j, \qquad (69)$$

где

$$X_{2i,2j}(\xi,\eta) = k_i k_j Y_i(\xi)Y_j(\xi)\sin(i\eta)\sin(j\eta),$$

$$\Xi_{2i,2j}(\xi,\eta) = k_i k_j Y_i'(\xi)Y_j'(\xi)\sin(i\eta)\sin(j\eta),$$

$$\Theta_{2i,2j}(\xi,\eta) = \frac{ij}{\xi^2}Y_i(\xi)Y_j(\xi)\cos(i\eta)\cos(j\eta). \quad (70)$$

Для всех четырех типов функций $\tilde{F}_{mn}$ (63), (65), (67), (69) множители $S_{i,j}$, $C_{i,j}$, связанные с гиперболическими функциями, имеют одинаковую структуру и для любых индексов $i\neq j$ определяются соотношениями

$$S_{i,j}(\zeta) = \int_{-h}^{\zeta} \frac{\mathrm{sh}\,[k_i(x+h)]\mathrm{sh}\,[k_j(x+h)]}{\mathrm{ch}\,(k_i h)\mathrm{ch}\,(k_j h)}dx =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{ch}\,(k_i h)\mathrm{ch}\,(k_j h)}\left\{\frac{\mathrm{sh}\,[(k_i+k_j)(\zeta+h)]}{2(k_i+k_j)} - \right. \\ \left. -\frac{\mathrm{sh}\,[(k_i-k_j)(\zeta+h)]}{2(k_i-k_j)}\right\}, \qquad (71)$$

$$C_{i,j}(\zeta) = \int_{-h}^{\zeta} \frac{\mathrm{ch}\,[k_i(x+h)]\mathrm{ch}\,[k_j(x+h)]}{\mathrm{ch}\,(k_i h)\mathrm{ch}\,(k_j h)}dx =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{ch}\,(k_i h)\mathrm{ch}\,(k_j h)}\left\{\frac{\mathrm{sh}\,[(k_i+k_j)(\zeta+h)]}{2(k_i+k_j)} + \right. \\ \left. +\frac{\mathrm{sh}\,[(k_i-k_j)(\zeta+h)]}{2(k_i-k_j)}\right\}. \qquad (72)$$

Разложения этих множителей в степенные ряды по ζ в окрестности точки $\zeta=0$ с точностью до членов 3-го порядка малости получаются следующими:

$$S_{i,j}(\zeta) \simeq \tilde{S}_{i,j}(\zeta) = \frac{1}{k_i k_j(k_i^2-k_j^2)}(k_i^2æ_j - k_j^2æ_i)+ \\ +\frac{1}{k_i k_j}æ_iæ_j\zeta + \frac{1}{2k_ik_j}(k_j^2æ_i+k_i^2æ_j)\zeta^2+ \\ +\frac{1}{6k_ik_j}[2k_i^2k_j^2 + æ_iæ_j(k_i^2+k_j^2)]\zeta^3, \qquad (73)$$

$$C_{i,j}(\zeta) \simeq \tilde{C}_{i,j}(\zeta) = \frac{æ_i - æ_j}{k_i^2-k_j^2} + \zeta + \frac{1}{2}(æ_i+æ_j)\zeta^2+ \\ +\frac{1}{6}(k_i^2+k_j^2+2æ_iæ_j)\zeta^3. \qquad (74)$$

Приближения (73), (74) и аппроксимация (37) функции ζ подставляются в формулы (63), (65), (67), (69), после чего выполняется интегрирование по η полученных выражений (символьные вычисления). В результате получаются следующие приближенные формулы для интегралов от функций $\tilde{F}_{mn}$ первого типа, определяющих элементы $\tilde{A}_{12}$, $\tilde{A}_{14}$, $\tilde{A}_{34}$:

$$\int_0^{2\pi} \tilde{F}_{2i+1,2j}\,d\eta \simeq$$

$$\simeq \int_0^{2\pi}\big(X_{2i+1,2j}\tilde{S}_{i,j} + \Xi_{2i+1,2j}\tilde{C}_{i,j} + \Theta_{2i+1,2j}\tilde{C}_{i,j}\big)d\eta \simeq$$

$$\simeq Y_iY_j\Big[\frac{k_i^2æ_j - k_j^2æ_i}{k_i^2-k_j^2}M_0^{(1)}(i,j) + æ_iæ_jM_1^{(1)}(i,j)+ \\ +\frac{1}{2}\big(k_j^2æ_i + k_i^2æ_j\big)M_2^{(1)}(i,j)+ \\ +\frac{1}{6}\big[2k_i^2k_j^2 + æ_iæ_j\big(k_i^2+k_j^2\big)M_3^{(1)}(i,j)\big]\Big]+ \\ +k_ik_jY_i'Y_j'\Big[\frac{æ_i-æ_j}{k_i^2-k_j^2}M_0^{(1)}(i,j) + M_1^{(1)}(i,j)+ \\ +\frac{1}{2}(æ_i+æ_j)M_2^{(1)}(i,j) + \frac{1}{6}\big(k_i^2+k_j^2+2æ_iæ_j\big)M_3^{(1)}(i,j)\Big]- \\ -\frac{ij}{\xi^2}Y_iY_j\Big[\frac{æ_i-æ_j}{k_i^2-k_j^2}N_0^{(1)}(i,j) + N_1^{(1)}(i,j)+ \\ +\frac{1}{2}(æ_i+æ_j)N_2^{(1)}(i,j) + \frac{1}{6}\big(k_i^2+k_j^2+2æ_iæ_j\big)N_3^{(1)}(i,j)\Big]. \qquad (75)$$

Здесь через $M_k^{(1)}(i,j)$ $N_k^{(1)}(i,j)$ ($k=0,1,2,3$) обозначены приближенные значения интегралов по η от комбинаций тригонометрических функций и

ζ^k (верхний индекс 1 означает, что эти интегралы соответствуют функциям $\tilde{F}_{mn}$ первого типа), а именно:

$$M_0^{(1)}(i,j)=\int_0^{2\pi}\cos(i\eta)\sin(j\eta)d\eta=$$

$$=\begin{cases} 0, & i=0,\ j=1,\\ 0, & i=0,\ j=2,\\ 0, & i=1,\ j=2,\end{cases}$$

$$M_1^{(1)}(i,j)=\int_0^{2\pi}\cos(i\eta)\sin(j\eta)\zeta d\eta\simeq$$

$$\simeq\frac{\pi}{2}\begin{cases} 2r_1Y_1, & i=0,\ j=1,\\ 2r_2Y_2, & i=0,\ j=2,\\ r_1Y_1, & i=1,\ j=2,\end{cases}$$

$$M_2^{(1)}(i,j)=\int_0^{2\pi}\cos(i\eta)\sin(j\eta)\zeta^2 d\eta\simeq$$

$$\simeq\pi\begin{cases} [2p_0r_1Y_0+(p_1r_2-p_2r_1)Y_2]Y_1, & i=0,\ j=1,\\ p_1r_1Y_1^2 & i=0,\ j=2,\\ p_0r_1Y_0Y_1+p_1r_2Y_1Y_2, & i=1,\ j=2,\end{cases}$$

$$M_3^{(1)}(i,j)=\int_0^{2\pi}\cos(i\eta)\sin(j\eta)\zeta^3 d\eta\simeq$$

$$\simeq\frac{\pi}{4}\begin{cases} 3(p_1^2+r_1^2)r_1Y_1^3, & i=0,\ j=1,\\ 0, & i=0,\ j=2,\\ (3p_1^2+r_1^2)r_1Y_1^3, & i=1,\ j=2,\end{cases}$$

$$N_0^{(1)}(i,j)=\int_0^{2\pi}\sin(i\eta)\cos(j\eta)d\eta=$$

$$=\begin{cases} 0, & i=0,\ j=1,\\ 0, & i=0,\ j=2,\\ 0, & i=1,\ j=2,\end{cases}$$

$$N_1^{(1)}(i,j)=\int_0^{2\pi}\sin(i\eta)\cos(j\eta)\zeta d\eta\simeq$$

$$\simeq\frac{\pi}{2}\begin{cases} 0, & i=0,\ j=1,\\ 0, & i=0,\ j=2,\\ -r_1Y_1, & i=1,\ j=2,\end{cases}$$

$$N_2^{(1)}(i,j)=\int_0^{2\pi}\sin(i\eta)\cos(j\eta)\zeta^2 d\eta\simeq$$

$$\simeq\pi\begin{cases} 0, & i=0,\ j=1,\\ 0, & i=0,\ j=2,\\ (p_2Y_2-p_0Y_0)r_1Y_1, & i=1,\ j=2,\end{cases}$$

$$N_3^{(1)}(i,j)=\int_0^{2\pi}\sin(i\eta)\cos(j\eta)\zeta^3 d\eta\simeq$$

$$\simeq\frac{\pi}{2}\begin{cases} 0, & i=0,\ j=1,\\ 0, & i=0,\ j=2,\\ -r_1^3Y_1^3, & i=1,\ j=2.\end{cases}\qquad(76)$$

Теперь из выражения (45) в силу формул (75), (76) получаются следующие формулы для наддиагональных элементов A_{mn} 1-го типа из 5-модовой модели [4] :

$$A_{13}=\tilde{A}_{12}=\rho\int_0^R\xi\int_0^{2\pi}\tilde{F}_{12}d\eta d\xi\simeq$$

$$\simeq\tilde{a}_{15}r_1+\tilde{a}_{23}p_0r_1+\tilde{a}_{26}(p_1r_2-r_1p_2)+\tilde{a}_{30}(r_1p_1^2+r_1^3),$$

$$A_{15}=\tilde{A}_{14}=\rho\int_0^R\xi\int_0^{2\pi}\tilde{F}_{14}d\eta d\xi\simeq\tilde{a}_{24}r_2+\tilde{a}_{16}p_1r_1,$$

$$A_{25}=\tilde{A}_{34}=\rho\int_0^R\xi\int_0^{2\pi}\tilde{F}_{34}d\eta d\xi\simeq$$

$$\simeq\tilde{a}_3r_1+\tilde{a}_{28}p_0r_1+\tilde{a}_{27}p_1r_2-\tilde{a}_{29}r_1p_2+\tilde{a}_{31}r_1p_1^2+\tilde{a}_{32}r_1^3,\qquad(77)$$

где коэффициенты полиномиальных выражений определяются формулами

$$\tilde{a}_3=\rho\frac{\pi}{2}(\text{æ}_1\text{æ}_2i_5+k_1k_2i_{22}+2i_{23}),$$

$$\tilde{a}_{15}=\rho\pi(\text{æ}_0\text{æ}_1i_2+k_0k_1i_{19}),$$

$$\tilde{a}_{16}=\rho\frac{\pi}{2}[(k_2^2\text{æ}_0+k_0^2\text{æ}_2)i_{20}+k_0k_2(\text{æ}_0+\text{æ}_2)i_{21}],$$

$$\tilde{a}_{23}=\rho\pi[(k_1^2\text{æ}_0+k_0^2\text{æ}_1)i_8+k_0k_1(\text{æ}_0+\text{æ}_1)i_{34}],$$

$$\tilde{a}_{24}=\rho\pi(\text{æ}_0\text{æ}_2i_{30}+k_0k_2i_{36}),$$

$$\tilde{a}_{26}=\rho\frac{\pi}{2}[(k_1^2\text{æ}_0+k_0^2\text{æ}_1)i_{20}+k_0k_1(\text{æ}_0+\text{æ}_1)i_{35}],$$

$$\tilde{a}_{27}=\rho\frac{\pi}{2}\Big[(k_2^2\text{æ}_1+k_1^2\text{æ}_2)i_{15}+k_1k_2(\text{æ}_1+\text{æ}_2)i_{39}\Big],$$

$$\tilde{a}_{28}=\rho\frac{\pi}{2}\Big[(k_2^2\text{æ}_1+k_1^2\text{æ}_2)i_{20}+k_1k_2(\text{æ}_1+\text{æ}_2)i_{37}+$$

$$+2(\text{æ}_1+\text{æ}_2)i_{38}\Big],$$

$$\tilde{a}_{29}=\rho\pi(\text{æ}_1+\text{æ}_2)i_{17},$$

$$\tilde{a}_{30}=\rho\frac{\pi}{8}\Big[\big[2k_0^2k_1^2+\text{æ}_0\text{æ}_1(k_0^2+k_1^2)\big]i_{40}+$$

$$+k_0k_1(k_0^2+k_1^2+2\text{æ}_0\text{æ}_1)i_{41}\Big],$$

$$\tilde{a}_{31}=\rho\frac{\pi}{8}\Big[\big[2k_1^2k_2^2+\text{æ}_1\text{æ}_2(k_1^2+k_2^2)\big]i_{43}+$$

$$+k_1k_2(k_1^2+k_2^2+2\text{æ}_1\text{æ}_2)i_{44}\Big],$$

$$\tilde{a}_{32}=\rho\frac{\pi}{24}\big\{\big[2k_1^2k_2^2+\text{æ}_1\text{æ}_2(k_1^2+k_2^2)\big]i_{43}+$$

$$+(k_1^2+k_2^2+2\text{æ}_1\text{æ}_2)(k_1k_2i_{44}+4i_{45})\big\},$$

[4] В [3, стр. 102] в формуле для элемента A_{12} отсутствует группа членов $\tilde{a}_{30}(p_1^2r_1+r_1^3)$. В формуле для элемента A_{34} не приведены выражения коэффициентов a_{31}, a_{32}. Кроме того, должно быть $\tilde{i}_{34}=\int_0^R\xi Y_0Y_1Y_0'Y_1'd\xi$.

а ранее не встречавшиеся интегралы от функций Бесселя имеют вид

$$i_{19}=\int_0^R \xi Y_1 Y_0^{'}Y_1^{'}d\xi, \quad i_{20}=\int_0^R \xi Y_0 Y_1^2 Y_2 d\xi,$$

$$i_{22}=\int_0^R \xi Y_1 Y_1^{'}Y_2^{'}d\xi, \quad i_{34}=\int_0^R \xi Y_0 Y_1 Y_0^{'}Y_1^{'}d\xi,$$

$$i_{35}=\int_0^R \xi Y_1 Y_2 Y_0^{'}Y_1^{'}d\xi, \quad i_{37}=\int_0^R \xi Y_0 Y_1 Y_1^{'}Y_2^{'}d\xi,$$

$$i_{38}=\int_0^R \frac{1}{\xi} Y_0 Y_1^2 Y_2 d\xi, \quad i_{39}=\int_0^R \xi Y_1 Y_2 Y_1^{'}Y_2^{'}d\xi,$$

$$i_{40}=\int_0^R \xi Y_0 Y_1^4 d\xi, \quad i_{41}=\int_0^R \xi Y_1^3 Y_0^{'}Y_1^{'}d\xi,$$

$$i_{43}=\int_0^R \xi Y_1^4 Y_2 d\xi, \quad i_{44}=\int_0^R \xi Y_1^3 Y_1^{'}Y_2^{'}d\xi,$$

$$i_{45}=\int_0^R \frac{1}{\xi} Y_1^4 Y_2 d\xi,$$

$$(\tilde{i}_{19}=k_0k_1 i_{19}, \quad \tilde{i}_{21}=k_0k_2 i_{21}, \quad \tilde{i}_{34}=k_0k_1 i_{34},$$

$$\tilde{i}_{35}=k_0k_1 i_{35}, \quad \tilde{i}_{36}=k_0k_2 i_{36}, \quad \tilde{i}_{19}=\frac{k_0}{2k_1} i_2). \quad (78)$$

Для группы элементов $\tilde{A}_{mn}$ 2-го типа подынтегральные функции определяются точными формулами (65), (66) (в эту группу попадают элементы $\tilde{A}_{13}$, $\tilde{A}_{15}$, $\tilde{A}_{35}$). После подстановки в эти формулы приближений (73), (74) получаются соотношения

$$\int_0^{2\pi} \tilde{F}_{2i+1,2j+1} d\eta \simeq \int_0^{2\pi} \big(X_{2i+1,2j+1}\tilde{S}_{i,j}+$$
$$+\Xi_{2i+1,2j+1}\tilde{C}_{i,j}+\Theta_{2i+1,2j+1}\tilde{C}_{i,j}\big)d\eta \simeq$$
$$\simeq Y_iY_j\Big[\frac{k_i^2 æ_j - k_j^2 æ_i}{k_i^2-k_j^2} M_0^{(2)}(i,j)+æ_iæ_j M_1^{(2)}(i,j)+$$
$$+\frac{1}{2}\big(k_j^2 æ_i + k_i^2 æ_j\big) M_2^{(2)}(i,j)+$$
$$+\frac{1}{6}\big[2k_i^2k_j^2+æ_iæ_j\big(k_i^2+k_j^2\big)M_3^{(2)}(i,j)\big]\Big]+$$
$$+k_ik_jY_i^{'}Y_j^{'}\Big[\frac{æ_i-æ_j}{k_i^2-k_j^2} M_0^{(2)}(i,j)+M_1^{(2)}(i,j)+$$
$$+\frac{1}{2}(æ_i+æ_j)M_2^{(2)}(i,j)+\frac{1}{6}\big(k_i^2+k_j^2+2æ_iæ_j\big)M_3^{(2)}(i,j)\Big]+$$
$$+\frac{ij}{\xi^2}Y_iY_j\Big[\frac{æ_i-æ_j}{k_i^2-k_j^2} N_0^{(2)}(i,j)+N_1^{(2)}(i,j)+$$
$$+\frac{1}{2}(æ_i+æ_j)N_2^{(2)}(i,j)+\frac{1}{6}\big(k_i^2+k_j^2+2æ_iæ_j\big)N_3^{(2)}(i,j)\Big], \quad (79)$$

где приближенные значения $M_k^{(2)}(i,j)$ $N_k^{(2)}(i,j)$ интегралов по η (верхний индекс 2 означает соответствие этих величин второму типу элементов $\tilde{A}_{mn}$) задаются формулами

$$M_0^{(2)}(i,j)=\int_0^{2\pi}\cos(i\eta)\cos(j\eta)d\eta=$$
$$=\begin{cases} 0, & i=0,\ j=1,\\ 0, & i=0,\ j=2,\\ 0, & i=1,\ j=2,\end{cases}$$

$$M_1^{(2)}(i,j)=\int_0^{2\pi}\cos(i\eta)\cos(j\eta)\zeta d\eta \simeq$$
$$\simeq \frac{\pi}{2}\begin{cases} 2p_1Y_1, & i=0,\ j=1,\\ 2p_2Y_2, & i=0,\ j=2,\\ p_1Y_1, & i=1,\ j=2,\end{cases}$$

$$M_2^{(2)}(i,j)=\int_0^{2\pi}\cos(i\eta)\cos(j\eta)\zeta^2 d\eta \simeq$$
$$\simeq \pi\begin{cases} [2p_0p_1Y_0+(p_1p_2+r_1r_2)Y_2]Y_1, & i=0, j=1,\\ \frac{1}{2}(p_1^2-r_1^2)Y_1^2, & i=0, j=2,\\ (p_0p_1Y_0Y_1+p_1p_2Y_1Y_2), & i=1, j=2,\end{cases}$$

$$M_3^{(2)}(i,j)=\int_0^{2\pi}\cos(i\eta)\cos(j\eta)\zeta^3 d\eta \simeq$$
$$\simeq \frac{\pi}{4}\begin{cases} 3(p_1^2+r_1^2)p_1Y_1^3, & i=0,\ j=1,\\ 0, & i=0,\ j=2,\\ 2p_1^3Y_1^3, & i=1,\ j=2,\end{cases}$$

$$N_0^{(2)}(i,j)=\int_0^{2\pi}\sin(i\eta)\sin(j\eta)d\eta=$$
$$=\begin{cases} 0, & i=0,\ j=1,\\ 0, & i=0,\ j=2,\\ 0, & i=1,\ j=2,\end{cases}$$

$$N_1^{(2)}(i,j)=\int_0^{2\pi}\sin(i\eta)\sin(j\eta)\zeta d\eta \simeq$$
$$\simeq \frac{\pi}{2}\begin{cases} 0, & i=0,\ j=1,\\ 0, & i=0,\ j=2,\\ p_1Y_1, & i=1,\ j=2,\end{cases}$$

$$N_2^{(2)}(i,j)=\int_0^{2\pi}\sin(i\eta)\sin(j\eta)\zeta^2 d\eta \simeq$$
$$\simeq \pi\begin{cases} 0, & i=0,\ j=1,\\ 0, & i=0,\ j=2,\\ (p_0p_1Y_0+r_1r_2Y_2)Y_1, & i=1,\ j=2,\end{cases}$$

$$N_3^{(2)}(i,j)=\int_0^{2\pi}\sin(i\eta)\sin(j\eta)\zeta^3 d\eta \simeq$$
$$\simeq \frac{\pi}{4}\begin{cases} 0, & i=0,\ j=1,\\ 0, & i=0,\ j=2,\\ (p_1^3+3p_1r_1^2)Y_1^3, & i=1,\ j=2.\end{cases} \quad (80)$$

Теперь из выражения (45) в силу формул (79), (80) получаются (символьные вычисления) следующие формулы для наддиагональных элементов A_{mn} 2-го типа из 5-модовой модели [5] :

$$A_{12}=\tilde{A}_{13}=\rho\int_0^R\xi\int_0^{2\pi}\tilde{F}_{13}d\eta d\xi\simeq$$

$$\simeq\tilde{a}_{15}p_1+\tilde{a}_{23}p_0p_1+\tilde{a}_{26}(p_1p_2+r_1r_2)+\tilde{a}_{30}(p_1r_1^2+p_1^3),$$

$$A_{14}=\tilde{A}_{15}=\rho\int_0^R\xi\int_0^{2\pi}\tilde{F}_{15}d\eta d\xi\simeq$$

$$\simeq\tilde{a}_{24}p_2+\tilde{a}_{16}(p_1^2-r_1^2),$$

$$A_{24}=\tilde{A}_{35}=\rho\int_0^R\xi\int_0^{2\pi}\tilde{F}_{35}d\eta d\xi\simeq$$

$$\simeq\tilde{a}_3p_1+\tilde{a}_{28}p_0p_1+\tilde{a}_{27}p_1p_2+\tilde{a}_{29}r_1r_2+\tilde{a}_{33}p_1r_1^2+\tilde{a}_{34}p_1^3. \tag{81}$$

Здесь полиномиальные коэффициенты такие же, как и в формулах (77) для элементов A_{13}, A_{15}, A_{25}, за исключением

$$\tilde{a}_{33}=\rho\frac{\pi}{4}(k_1^2+k_2^2+2æ_1æ_2)i_{45},$$

$$\tilde{a}_{34}=\rho\frac{\pi}{12}\{\big[2k_1^2k_2^2+æ_1æ_2(k_1^2+k_2^2)\big]i_{43}+$$
$$+(k_1^2+k_2^2+2æ_1æ_2)(k_1k_2i_{44}+i_{45})\}.$$

Для элементов $\tilde{A}_{mn}$ 3-го типа подынтегральные функции определяются точными формулами (67), (68) (в эту группу попадают элементы $\tilde{A}_{23}$, $\tilde{A}_{25}$, $\tilde{A}_{45}$). В этом (и только в этом) случае возможны варианты $i<j$ и $i=j$. Если $i<j$, то приближения $\tilde{S}_{ij}(\zeta)$ и $\tilde{C}_{ij}(\zeta)$ определяются по формулам (73), (74). Если же $i=j$, то

$$\tilde{S}_{ii}(\zeta)=\tilde{S}_i(\zeta),\quad \tilde{C}_{ii}(\zeta)=\tilde{C}_i(\zeta),$$

где $\tilde{S}_i(\zeta)$, $\tilde{C}_i(\zeta)$ заданы соотношениями (55). После подстановки в выражения (67), (68) приближений для $\tilde{S}_{ij}(\zeta)$, $\tilde{C}_{ij}(\zeta)$ и интегрирования по η (символьные вычисления) получаются следующие соотношения:

случай $i<j$ –

$$\int_0^{2\pi}\tilde{F}_{2i,2j+1}d\eta\simeq\int_0^{2\pi}\big(X_{2i,2j+1}\tilde{S}_{i,j}+$$
$$+\Xi_{2i,2j+1}\tilde{C}_{i,j}+\Theta_{2i,2j+1}\tilde{C}_{i,j}\big)d\eta\simeq$$
$$\simeq Y_iY_j\Big[\frac{k_i^2æ_j-k_j^2æ_i}{k_i^2-k_j^2}M_0^{(3)}(i,j)+æ_iæ_jM_1^{(3)}(i,j)+$$
$$+\frac{1}{2}\big(k_j^2æ_i+k_i^2æ_j\big)M_2^{(3)}(i,j)+$$
$$+\frac{1}{6}\big[2k_i^2k_j^2+æ_iæ_j\big(k_i^2+k_j^2\big)M_3^{(3)}(i,j)\big]\Big]+$$
$$+k_ik_jY_i^{'}Y_j^{'}\Big[\frac{æ_i-æ_j}{k_i^2-k_j^2}M_0^{(3)}(i,j)+M_1^{(3)}(i,j)+$$
$$+\frac{1}{2}(æ_i+æ_j)M_2^{(3)}(i,j)+\frac{1}{6}\big(k_i^2+k_j^2+2æ_iæ_j\big)M_3^{(3)}(i,j)\Big]-$$
$$-\frac{ij}{\xi^2}Y_iY_j\Big[\frac{æ_i-æ_j}{k_i^2-k_j^2}N_0^{(3)}(i,j)+N_1^{(3)}(i,j)+$$
$$+\frac{1}{2}(æ_i+æ_j)N_2^{(3)}(i,j)+\frac{1}{6}\big(k_i^2+k_j^2+2æ_iæ_j\big)N_3^{(3)}(i,j)\Big], \tag{82}$$

случай $i=j$ –

$$\int_0^{2\pi}\tilde{F}_{2i,2i+1}d\eta\simeq\int_0^{2\pi}\big(X_{2i,2i+1}\tilde{S}_{i,i}+$$
$$+\Xi_{2i,2i+1}\tilde{C}_{i,j}+\Theta_{2i,2i+1}\tilde{C}_{i,j}\big)d\eta\simeq$$
$$\simeq Y_i^2\Big[\frac{1}{2}\Big(æ_i-\frac{k_i^2h}{\mathrm{ch}^2(k_ih)}\Big)M_0^{(3)}(i,i)+æ_i^2M_1^{(3)}(i,i)+$$
$$+k_i^2æ_iM_2^{(3)}(i,i)+\frac{1}{3}k_i^2(k_i^2+æ_i^2)M_3^{(3)}(i,i)\big]\Big]+$$
$$+(Y_i^{'})^2\Big[\frac{1}{2}\Big(æ_i+\frac{k_i^2h}{\mathrm{ch}^2(k_ih)}\Big)M_0^{(3)}(i,i)+k_i^2M_1^{(3)}(i,i)+$$
$$+k_i^2æ_iM_2^{(3)}(i,i)+\frac{1}{3}k_i^2(k_i^2+æ_i^2)M_3^{(3)}(i,i)\big]\Big]-$$
$$-\frac{i^2}{\xi^2}Y_i^2\Big[\frac{1}{2k_i^2}\Big(æ_i+\frac{k_i^2h}{\mathrm{ch}^2(k_ih)}\Big)N_0^{(3)}(i,i)+N_1^{(3)}(i,i)+$$
$$+æ_iN_2^{(3)}(i,i)+\frac{1}{3}(k_i^2+æ_i^2)N_3^{(3)}(i,i)\big]\Big],$$
$$\Big(N_k^{(3)}(i,i)=M_k^{(3)}(i,i),\quad k=0,1,2,3\Big), \tag{83}$$

где при $i=j$

$$M_0^{(3)}(i,i)=N_0^{(3)}(i,i)=\int_0^{2\pi}\sin(i\eta)\cos(i\eta)d\eta=$$
$$=\begin{cases}0, & i=1,\ j=1,\\ 0, & i=2,\ j=2,\end{cases}$$

$$M_1^{(3)}(i,i)=N_1^{(3)}(i,i)=\int_0^{2\pi}\sin(i\eta)\cos(i\eta)\zeta d\eta\simeq$$
$$\simeq\frac{\pi}{2}\begin{cases}r_2Y_2, & i=1,\ j=1,\\ 0, & i=2,\ j=2,\end{cases}$$

$$M_2^{(3)}(i,i)=N_2^{(2)}(i,i)=\int_0^{2\pi}\sin(i\eta)\cos(i\eta)\zeta^2d\eta\simeq$$
$$\simeq\frac{\pi}{2}\begin{cases}p_1r_1Y_1^2, & i=1,\quad j=1,\\ 0, & i=2,\quad j=2,\end{cases}$$

[5] В [3, стр.102] в формуле для элемента A_{13} отсутствует группа членов $\tilde{a}_{30}(p_1^3+p_1r_1^2)$. В формуле для элемента A_{35} является лишним член с p_1r_2 и не приведены выражения коэффициентов a_{33}, a_{34}.

$$M_3^{(3)}(i,i)=N_3^{(3)}(i,i)=\int_0^{2\pi}\sin(i\eta)\cos(i\eta)\zeta^3 d\eta\simeq$$
$$\simeq\begin{cases}0, & i=1,\ j=1,\\ 0, & i=2,\ j=2,\end{cases}\qquad(84)$$

а при $i<j$

$$M_0^{(3)}(1,2)=\int_0^{2\pi}\sin(\eta)\cos(2\eta)d\eta=0,$$
$$N_0^{(3)}(1,2)=\int_0^{2\pi}\cos(\eta)\sin(2\eta)d\eta=0,$$
$$M_1^{(3)}(1,2)=\int_0^{2\pi}\sin(\eta)\cos(2\eta)\zeta d\eta=-\frac{\pi}{2}r_1Y_1,$$
$$N_1^{(3)}(1,2)=\int_0^{2\pi}\cos(\eta)\sin(2\eta)\zeta d\eta=\frac{\pi}{2}r_1Y_1,$$
$$M_2^{(3)}(1,2)=\int_0^{2\pi}\sin(\eta)\cos(2\eta)\zeta^2 d\eta\simeq$$
$$\simeq\pi(-p_0Y_0+p_2Y_2)r_1Y_1,$$
$$N_2^{(3)}(1,2)=\int_0^{2\pi}\cos(\eta)\sin(2\eta)\zeta^2 d\eta\simeq$$
$$\simeq\pi(p_0r_1Y_0+p_1r_2Y_2)Y_1,$$
$$M_3^{(3)}(1,2)=\int_0^{2\pi}\sin(\eta)\cos(2\eta)\zeta^3 d\eta\simeq-\frac{\pi}{2}r_1^3Y_1^3,$$
$$N_3^{(3)}(1,2)=\int_0^{2\pi}\cos(\eta)\sin(2\eta)\zeta^2 d\eta\simeq$$
$$\simeq\frac{\pi}{4}(3p_1^2+r_1^2)r_1Y_1^3.\qquad(85)$$

Теперь из выражения (45) в силу формул (82)–(85) получаются следующие формулы для наддиагональных элементов A_{mn} 3-го типа из 5-модовой модели:

$$A_{23}=\tilde{A}_{23}=\rho\int_0^R\xi\int_0^{2\pi}\tilde{F}_{23}d\eta d\xi\simeq$$
$$\simeq\tilde{a}_{19}r_2+\tilde{a}_8p_1r_1,$$
$$A_{45}=\tilde{A}_{45}=\rho\int_0^R\xi\int_0^{2\pi}\tilde{F}_{45}d\eta d\xi\simeq 0,$$
$$A_{34}=\tilde{A}_{25}=\rho\int_0^R\xi\int_0^{2\pi}\tilde{F}_{25}d\eta d\xi\simeq$$
$$\simeq-\tilde{a}_3r_1-\tilde{a}_{28}p_0r_1-\tilde{a}_{29}p_1r_2+\tilde{a}_{27}r_1p_2-\tilde{a}_{33}r_1p_1^2-\tilde{a}_{34}r_1^3.\qquad(86)$$

Здесь

$$\tilde{a}_8=\rho\frac{\pi}{2}\text{æ}_1(k_1^2i_4+k_1^2i_{42}-i_{24}),\quad(k_1^2i_4=i_{24}+3k_1^2i_{42}),$$

выражение коэффициента $\tilde{a}_{19}$ приведено в соотношениях (61), а коэффициенты полиномиального приближения элемента A_{34} совпадают с соответствующими коэффициентами приближения элемента A_{24} в (81).

К четвертому типу наддиагональных элементов A_{mn} в 5-модовой модели относится лишь элемент $\tilde{A}_{24}$ ($i=1, j=2$). Для элементов четвертого типа из выражений (69), (70) после подстановки (73), (74) и интегрирования по η (символьные вычисления) получается

$$\int_0^{2\pi}\tilde{F}_{2i,2j}d\eta\simeq$$
$$\simeq\int_0^{2\pi}\left(X_{2i,2j}\tilde{S}_{i,j}+\Xi_{2i,2j}\tilde{C}_{i,j}+\Theta_{2i,2j}\tilde{C}_{i,j}\right)d\eta\simeq$$
$$\simeq Y_iY_j\Big[\frac{k_i^2\text{æ}_j-k_j^2\text{æ}_i}{k_i^2-k_j^2}M_0^{(4)}(i,j)+\text{æ}_i\text{æ}_jM_1^{(4)}(i,j)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(k_j^2\text{æ}_i+k_i^2\text{æ}_j\right)M_2^{(4)}(i,j)+$$
$$+\frac{1}{6}\left[2k_i^2k_j^2+\text{æ}_i\text{æ}_j\left(k_i^2+k_j^2\right)M_3^{(4)}(i,j)\right]\Big]+$$
$$+k_ik_jY_i'Y_j'\Big[\frac{\text{æ}_i-\text{æ}_j}{k_i^2-k_j^2}M_0^{(4)}(i,j)+M_1^{(4)}(i,j)+$$
$$+\frac{1}{2}(\text{æ}_i+\text{æ}_j)M_2^{(4)}(i,j)+\frac{1}{6}\left(k_i^2+k_j^2+2\text{æ}_i\text{æ}_j\right)M_3^{(4)}(i,j)\Big]+$$
$$+\frac{ij}{\xi^2}Y_iY_j\Big[\frac{\text{æ}_i-\text{æ}_j}{k_i^2-k_j^2}N_0^{(4)}(i,j)+N_1^{(4)}(i,j)+$$
$$+\frac{1}{2}(\text{æ}_i+\text{æ}_j)N_2^{(4)}(i,j)+\frac{1}{6}\left(k_i^2+k_j^2+2\text{æ}_i\text{æ}_j\right)N_3^{(4)}(i,j)\Big].\qquad(87)$$

При $i=1$, $j=2$ множители $M_k^{(4)}(i,j)$, $N_k^{(4)}(i,j)$ для элементов четвертого типа оказываются связанными с множителями $M_k^{(2)}(i,j)$, $N_k^{(2)}(i,j)$ для элементов второго типа соотношениями (см. формулы (80))

$$M_0^{(4)}(1,2)=\int_0^{2\pi}\sin(\eta)\sin(2\eta)d\eta=N_0^{(2)}(1,2)=0,$$
$$M_1^{(4)}(1,2)=\int_0^{2\pi}\sin(\eta)\sin(2\eta)\zeta d\eta=N_1^{(2)}(1,2)\simeq$$
$$\simeq\frac{\pi}{2}p_1Y_1,$$
$$M_2^{(4)}(1,2)=\int_0^{2\pi}\sin(\eta)\sin(2\eta)\zeta^2 d\eta=N_2^{(2)}(1,2)\simeq$$
$$\simeq\pi(p_0p_1Y_0+r_1r_2Y_2)Y_1,$$
$$M_3^{(4)}(1,2)=\int_0^{2\pi}\sin(\eta)\sin(2\eta)\zeta^3 d\eta=N_3^{(2)}(1,2)\simeq$$

$$\simeq \frac{\pi}{4}(p_1^2 + 3r_1^2)p_1Y_1^3,$$

$$N_0^{(4)}(1,2) = \int_0^{2\pi} \cos(\eta)\cos(2\eta)d\eta = M_0^{(2)}(1,2) = 0,$$

$$N_1^{(4)}(1,2) = \int_0^{2\pi} \cos(\eta)\cos(2\eta)\zeta d\eta = M_1^{(2)}(1,2) \simeq$$

$$\simeq \frac{\pi}{2}p_1Y_1,$$

$$N_2^{(4)}(1,2) = \int_0^{2\pi} \cos(\eta)\cos(2\eta)\zeta^2 d\eta = M_2^{(2)}(1,2) \simeq$$

$$\simeq \pi(p_0Y_0 + p_2Y_2)p_1Y_1,$$

$$N_3^{(4)}(1,2) = \int_0^{2\pi} \cos(\eta)\cos(2\eta)\zeta^3 d\eta = N_3^{(2)}(1,2) \simeq$$

$$\simeq \frac{\pi}{2}p_1^3Y_1^3. \qquad (88)$$

С учетом соотношений (87), (88) для элемента A_{35} получаем следующую полиномиальную аппроксимацию:

$$A_{35} = \tilde{A}_{24} = \rho\int_0^R \xi \int_0^{2\pi} \tilde{F}_{24}d\eta d\xi \simeq$$

$$\simeq \tilde{a}_3p_1 + \tilde{a}_{28}p_0p_1 + \tilde{a}_{29}p_1p_2 + \tilde{a}_{27}r_1r_2 + \tilde{a}_{31}p_1r_1^2 + \tilde{a}_{32}p_1^3, \qquad (89)$$

коэффициенты которой совпадают с коэффициентами аппроксимации (77) элемента A_{25}.

Таким образом, в группе уравнений (44) коэффициенты $A_{kj}(\zeta)$, точные выражения которых задаются формулами (21) и используются в гамильтоновой модели, в 5-модовой модели аппроксимируются с точностью до членов 3-го порядка малости относительно величин r_1, p_1 (первый порядок малости) и p_0, r_2, p_2 (второй порядок малости) полиномами (59) (элементы A_{11} – A_{55}), (77) (элементы A_{13}, A_{15}, A_{25}), (81) (элементы A_{12}, A_{14}, A_{24}), (86) (элементы A_{23}, A_{34}, A_{45}), (89) (элемент A_{35}). Поддиагональные элементы определяются по симметрии.

2.3. Квазискорости жидкости

Квазискорости $R_k(t)$ жидкости, являющиеся в силу уравнений (19) линейными формами обобщенных скоростей $\dot{\beta}_i(t)$, определяют, с одной стороны, потенциал скоростей $\varphi(x,\xi,\eta,t)$ (14), а с другой (через потенциал φ) – давление $P(r,t,\varphi_t,\nabla\varphi)$ (12). В гамильтоновой модели квазискорости $R_k(t)$ находятся одновременно с обобщенными координатами $\beta_i(t)$ при решении уравнений типа Гамильтона (18), (19), а в 5-модовой модели $R_k(t)$ сначала выражаются (приближенно) в явном виде через $\dot{\beta}_i(t)$, после чего исключаются из уравнений. Рассмотрим подробней вариант 5-модовой модели.

Решается система уравнений (44) относительно величин R_k. В силу соотношений (30) эта система представляется в виде

$$\sum_{j=1}^{5} A_{kj}R_j = \sum_{j=1}^{5} a_{kj}\dot{\beta}_j, \quad k = 1,\dots,5, \qquad (90)$$

где коэффициенты a_{kj} линейных по $\dot{\beta}_j$ форм в правой части задаются формулами (43). В результате перемножения матрицы и вектор-столбца справа получаются следующие выражения (связь величин β_k и p_0, r_1, p_1, r_2, p_2 см. в табл.1):

$$\frac{d}{dt}A_1 = \frac{d}{dt}\tilde{A}_1 \simeq \tilde{a}_{17}\dot{p}_0 + 2\tilde{a}_4r_1\dot{r}_1 + 2\tilde{a}_4p_1\dot{p}_1,$$

$$\frac{d}{dt}A_2 = \frac{d}{dt}\tilde{A}_3 \simeq \tilde{a}_{14}p_1\dot{p}_0 + \big(2\tilde{a}_6p_1r_1 + \tilde{a}_{18}r_2\big)\dot{r}_1 +$$
$$+\big[\tilde{a}_5 + \tilde{a}_{14}p_0 + \tilde{a}_{18}p_2 + \tilde{a}_6(3p_1^2 + r_1^2)\big]\dot{p}_1 +$$
$$+\tilde{a}_{18}r_1\dot{r}_2 + \tilde{a}_{18}p_1\dot{p}_2,$$

$$\frac{d}{dt}A_3 = \frac{d}{dt}\tilde{A}_2 \simeq \tilde{a}_{14}r_1\dot{p}_0 +$$
$$+\big[\tilde{a}_5 + \tilde{a}_{14}p_0 - \tilde{a}_{18}p_2 + \tilde{a}_6(p_1^2 + 3r_1^2)\big]\dot{r}_1 +$$
$$+\big(2\tilde{a}_6p_1r_1 + \tilde{a}_{18}r_2\big)\dot{p}_1 + \tilde{a}_{18}p_1\dot{r}_2 - \tilde{a}_{18}r_1\dot{p}_2,$$

$$\frac{d}{dt}A_4 = \frac{d}{dt}\tilde{A}_5 \simeq -2\tilde{a}_7r_1\dot{r}_1 + 2\tilde{a}_7p_1\dot{p}_1 + \tilde{a}_{20}\dot{p}_2,$$

$$\frac{d}{dt}A_5 = \frac{d}{dt}\tilde{A}_4 \simeq 2\tilde{a}_7p_1\dot{r}_1 + 2\tilde{a}_7r_1\dot{p}_1 + \tilde{a}_{20}\dot{r}_2. \qquad (91)$$

Заметим, что коэффициенты выписанных линейных форм имеют приближенные значения с точностью до величин 2-го порядка малости относительно p_0, r_1, p_1, r_2, p_2. Этот же результат получается в результате дифференцирования по t выражений (40), как это делалось в [3, стр. 104].

Искомые величины R_j уравнений (90) также представляются в виде линейных форм относительно $\dot{\beta}_j$, а именно:

$$R_j(\beta_n,\dot{\beta}_i) = \sum_{i=1}^{5} R_j^{(i)}(\beta_n)\dot{\beta}_i, \quad j = 1,\dots,5, \qquad (92)$$

где, в свою очередь, коэффициенты $R_j^{(i)}$ этих линейных форм ищутся в виде полиномов 2-й степени относительно β_n вида

$$R_j^{(i)}(\beta_n) = B_j^{(i)} + C_j^{(i)}p_0 + D_j^{(i)}p_1 + E_j^{(i)}r_1 + F_j^{(i)}p_2 +$$
$$+G_j^{(i)}r_2 + r_1\big(H_j^{(i)}p_1 + I_j^{(i)}r_1\big) + J_j^{(i)}p_1^2. \qquad (93)$$

Такую структуру имеет наиболее общий полином 2-й степени от переменных p_0, p_1, r_1, p_2, r_2, в котором сохранены члены до второго порядка малости (в указанном ранее смысле) относительно этих величин.

Система уравнений (90) после подстановки в нее выражений (92) и приравнивания коэффициентов при производных $\dot\beta_j$ превращается в систему 25-ти линейных алгебраических неоднородных уравнений относительно 25-ти величин $R_j^{(i)}$ с правыми частями a_{ki}, точнее

$$\sum_{j=1}^{5} A_{kj} R_j^{(i)} = a_{ki}, \quad k, i = 1, \ldots, 5. \tag{94}$$

Здесь коэффициенты A_{kj} достаточно выписать в виде полиномов относительно p_0, p_1, r_1, p_2, r_2 с точностью до членов 2-го порядка малости, поскольку таковыми являются правые части a_{ki}.

Система уравнений (94) решается методом неопределенных коэффициентов. Для этого полиномы (93) с неопределенными коэффициентами подставляются в систему (94), слева производится перемножение полиномов (символьные вычисления), отбрасываются слагаемые выше 2-го порядка малости и приводятся подобные члены с множителями p_0, p_1, r_1, p_2, r_2, p_1^2, $p_1 r_1$, r_1^2. В результате получается следующая система 25-ти уравнений относительно 225-ти неопределенных коэффициентов $B_j^{(i)}$, $C_j^{(i)}$, $D_j^{(i)}$, $E_j^{(i)}$, $F_j^{(i)}$, $G_j^{(i)}$, $H_j^{(i)}$, $I_j^{(i)}$, $J_j^{(i)}$ $(i, j = 1, \ldots, 5)$:
первое уравнение –

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{5} A_{1j} R_j^{(i)} \simeq \tilde a_1 B_1^{(i)} + p_0\big(\tilde a_{21} B_1^{(i)} + \tilde a_1 C_1^{(i)}\big) + \\
+ p_1\big(\tilde a_1 D_1^{(i)} + \tilde a_{15} B_2^{(i)}\big) + r_1\big(\tilde a_1 E_1^{(i)} + \tilde a_{15} B_3^{(i)}\big) + \\
+ p_2\big(\tilde a_1 F_1^{(i)} + \tilde a_{24} B_4^{(i)}\big) + r_2\big(\tilde a_1 G_1^{(i)} + \tilde a_{24} B_5^{(i)}\big) + \\
+ p_1^2\big(\tilde a_9 B_1^{(i)} + \tilde a_1 J_1^{(i)} + \tilde a_{15} D_2^{(i)} + \tilde a_{16} B_4^{(i)}\big) + \\
+ p_1 r_1\big[\tilde a_1 H_1^{(i)} + \tilde a_{15}\big(E_2^{(i)} + D_3^{(i)}\big) + \tilde a_{16} B_5^{(i)}\big] + \\
+ r_1^2\big(\tilde a_9 B_1^{(i)} + \tilde a_1 I_1^{(i)} + \tilde a_{15} E_3^{(i)} - \tilde a_{16} B_4^{(i)}\big) = a_{1i}, \\
i = 1, \ldots, 5;
\end{gathered} \tag{95}$$

второе уравнение –

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{5} A_{2j} R_j^{(i)} \simeq \tilde a_{10} B_2^{(i)} + p_0\big(\tilde a_{22} B_2^{(i)} + \tilde a_{10} C_2^{(i)}\big) + \\
+ p_1\big(\tilde a_{15} B_1^{(i)} + \tilde a_{10} D_2^{(i)} + \tilde a_3 B_4^{(i)}\big) + \\
+ r_1\big(\tilde a_{10} E_2^{(i)} + \tilde a_3 B_5^{(i)}\big) + \\
+ p_2\big(\tilde a_{19} B_2^{(i)} + \tilde a_{10} F_2^{(i)}\big) + r_2\big(\tilde a_{10} G_2^{(i)} + \tilde a_{19} B_3^{(i)}\big) + \\
+ p_1^2\big(\tilde a_{15} D_1^{(i)} + \tilde a_{11} B_2^{(i)} + \tilde a_{10} J_2^{(i)} + \tilde a_3 D_4^{(i)}\big) + \\
+ p_1 r_1\big[\tilde a_{15} E_1^{(i)} + \tilde a_3\big(E_4^{(i)} + D_5^{(i)}\big) + \tilde a_{10} H_2^{(i)} + \tilde a_8 B_3^{(i)}\big] + \\
+ r_1^2\big(\tilde a_{12} B_2^{(i)} + \tilde a_{10} I_2^{(i)} + \tilde a_3 E_5^{(i)}\big) = a_{2i}, \\
i = 1, \ldots, 5;
\end{gathered} \tag{96}$$

третье уравнение –

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{5} A_{3j} R_j^{(i)} \simeq \tilde a_{10} B_3^{(i)} + p_0\big(\tilde a_{22} B_3^{(i)} + \tilde a_{10} C_3^{(i)}\big) + \\
+ p_1\big(\tilde a_{10} D_3^{(i)} + \tilde a_3 B_5^{(i)}\big) + \\
+ r_1\big(\tilde a_{15} B_1^{(i)} + \tilde a_{10} E_3^{(i)} - \tilde a_3 B_4^{(i)}\big) + \\
+ p_2\big(\tilde a_{10} F_3^{(i)} - \tilde a_{19} B_3^{(i)}\big) + r_2\big(\tilde a_{19} B_2^{(i)} + \tilde a_{10} G_3^{(i)}\big) + \\
+ p_1^2\big(\tilde a_{12} B_3^{(i)} + \tilde a_{10} J_3^{(i)} + \tilde a_3 D_5^{(i)}\big) + \\
+ p_1 r_1\big[\tilde a_{15} D_1^{(i)} - \tilde a_3\big(D_4^{(i)} - E_5^{(i)}\big) + \tilde a_8 B_2^{(i)} + \tilde a_{10} H_3^{(i)}\big] + \\
+ r_1^2\big(\tilde a_{15} E_1^{(i)} + \tilde a_{11} B_3^{(i)} + \tilde a_{10} I_3^{(i)} - \tilde a_3 E_4^{(i)}\big) = a_{3i}, \\
i = 1, \ldots, 5;
\end{gathered} \tag{97}$$

четвертое уравнение –

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{5} A_{4j} R_j^{(i)} \simeq \tilde a_2 B_4^{(i)} + p_0\big(\tilde a_{25} B_4^{(i)} + \tilde a_2 C_4^{(i)}\big) + \\
+ p_1\big(\tilde a_3 B_2^{(i)} + \tilde a_2 D_4^{(i)}\big) + r_1\big(\tilde a_2 E_4^{(i)} - \tilde a_3 B_3^{(i)}\big) + \\
+ p_2\big(\tilde a_{24} B_1^{(i)} + \tilde a_2 F_4^{(i)}\big) + r_2 \tilde a_2 G_4^{(i)} + \\
+ p_1^2\big(\tilde a_{16} B_1^{(i)} + \tilde a_3 D_2^{(i)} + \tilde a_{13} B_4^{(i)} + \tilde a_2 J_4^{(i)}\big) + \\
+ p_1 r_1\big[\tilde a_3\big(E_2^{(i)} - D_3^{(i)}\big) + \tilde a_2 H_4^{(i)}\big] + \\
+ r_1^2\big(\tilde a_{13} B_4^{(i)} + \tilde a_2 I_4^{(i)} - \tilde a_{16} B_1^{(i)} - \tilde a_3 E_3^{(i)}\big) = a_{4i}, \\
i = 1, \ldots, 5;
\end{gathered} \tag{98}$$

пятое уравнение –

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{5} A_{5j} R_j^{(i)} \simeq \tilde a_2 B_5^{(i)} + p_0\big(\tilde a_{25} B_5^{(i)} + \tilde a_2 C_5^{(i)}\big) + \\
+ p_1\big(\tilde a_3 B_3^{(i)} + \tilde a_2 D_5^{(i)}\big) + r_1\big(\tilde a_2 E_5^{(i)} + \tilde a_3 B_2^{(i)}\big) + \\
+ p_2 \tilde a_2 F_5^{(i)} + r_2\big(\tilde a_{24} B_1^{(i)} + \tilde a_2 G_5^{(i)}\big) + \\
+ p_1^2\big(\tilde a_3 D_3^{(i)} + \tilde a_{13} B_5^{(i)} + \tilde a_2 J_5^{(i)}\big) +
\end{gathered}$$

Табл. 2. Соответствие коэффициентов $B_j^{(i)},\ldots,J_j^{(i)}$ уравнений (95) – (99) данной работы и коэффициентов C_i, B_i, D_i работы [3, стр. 105, формулы (15.14)]

$B_1^{(1)}$	$D_2^{(1)}$	$C_2^{(2)}$	$D_1^{(2)}$	$D_4^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$H_3^{(2)}$	$I_2^{(2)}$	$J_2^{(2)}$	$D_3^{(5)}$
D_0	B_3	B_0	C_0	$-D_1$	D_2	C_1	D_3	C_2	C_3

$$+p_1 r_1\left[\tilde a_3\left(E_3^{(i)}+D_2^{(i)}\right)+\tilde a_{16}B_1^{(i)}+\tilde a_2 H_5^{(i)}\right]+$$
$$+r_1^2\left(\tilde a_3 E_2^{(i)}+\tilde a_{13}B_5^{(i)}+\tilde a_2 I_5^{(i)}\right)=a_{5i},$$
$$i=1,\ldots,5. \qquad (99)$$

Каждое из уравнений (95) – (99) представляет собой равенство полиномов 2-ой степени относительно p_0, p_1, r_1, p_2, r_2, в котором правая часть a_{ki} определяется одной из формул (43). Фиксируя в этих уравнениях i, группируя и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях p_0, p_1, r_1, p_2, r_2, получаем 45 линейных уравнений относительно 45-ти неопределенных коэффициентов $B_j^{(i)},\ldots,J_j^{(i)}$, $(j=1,\ldots,5)$. Матрицы коэффициентов и правые части последних уравнений состоят в основном из нулей, поэтому их решения легко находятся непосредственно. Процедура решения носит рекуррентный характер: сначала из равенства нулю суммарных коэффициентов при свободных членах находятся величины $B_j^{(i)}$ (i фиксировано, $j=1,\ldots,5$), затем из равенства нулю суммарных коэффициентов при p_0 величины $C_j^{(i)}$ выражаются через ранее найденные $B_j^{(i)}$, и т.д. по алфавиту до буквы $J_j^{(i)}$. В результате отличные от нуля искомые величины получаются следующими (в табл.2 указаны обозначения этих величин, принятые в работе [3] и необходимые для сравнения полученных выражений [6]):
множители при $\dot p_0$ $(i=1)$ –

$$B_1^{(1)}=\frac{\tilde a_{17}}{\tilde a_1}=\frac{1}{æ_0},\quad C_1^{(1)}=-\frac{\tilde a_{21}}{\tilde a_1}B_1^{(1)},$$

$$D_2^{(1)}=E_3^{(1)}=\frac{1}{\tilde a_{10}}\left(\tilde a_{14}-\tilde a_{15}B_1^{(1)}\right),$$

$$F_4^{(1)}=G_5^{(1)}=-\frac{\tilde a_{24}}{\tilde a_2}B_1^{(1)},$$

$$H_5^{(1)}=-\frac{1}{\tilde a_2}\left(2\tilde a_3 D_2^{(1)}+\tilde a_{16}B_1^{(1)}\right),$$

$$I_1^{(1)}=J_1^{(1)}=-\frac{1}{\tilde a_1}\left(\tilde a_{15}D_2^{(1)}+\tilde a_9 B_1^{(1)}\right),$$

$$I_4^{(1)}=-J_4^{(1)}=\frac{1}{\tilde a_2}\left(\tilde a_3 D_2^{(1)}+\tilde a_{16}B_1^{(1)}\right); \qquad (100)$$

множители при $\dot p_1$ $(i=2)$ –

$$B_2^{(2)}=\frac{\tilde a_5}{\tilde a_{10}}=\frac{1}{æ_1},\quad C_2^{(2)}=\frac{1}{\tilde a_{10}}\left(\tilde a_{14}-\tilde a_{22}B_2^{(2)}\right),$$

$$D_1^{(2)}=\frac{1}{\tilde a_1}\left(2\tilde a_4-\tilde a_{15}B_2^{(2)}\right),$$

$$D_4^{(2)}=E_5^{(2)}=\frac{1}{\tilde a_2}\left(2\tilde a_7-\tilde a_3 B_2^{(2)}\right),$$

$$F_2^{(2)}=G_3^{(2)}=\frac{1}{\tilde a_{10}}\left(\tilde a_{18}-\tilde a_{19}B_2^{(2)}\right),$$

$$H_3^{(2)}=\frac{1}{\tilde a_{10}}\left(2\tilde a_6-\tilde a_{15}D_1^{(2)}-\tilde a_8 B_2^{(2)}\right),$$

$$I_2^{(2)}=\frac{1}{\tilde a_{10}}\left(\tilde a_6-\tilde a_3 D_4^{(2)}-\tilde a_{12}B_2^{(2)}\right),$$

$$J_2^{(2)}=\frac{1}{\tilde a_{10}}\left(3\tilde a_6-\tilde a_{15}D_1^{(2)}-\tilde a_3 D_4^{(2)}-\tilde a_{11}B_2^{(2)}\right); \qquad (101)$$

множители при $\dot r_1$ $(i=3)$ –

$$B_3^{(3)}=\frac{\tilde a_5}{\tilde a_{10}}=\frac{1}{æ_1},\quad C_3^{(3)}=\frac{1}{\tilde a_{10}}\left(\tilde a_{14}-\tilde a_{22}B_3^{(3)}\right),$$

$$D_5^{(3)}=-E_4^{(3)}=\frac{1}{\tilde a_2}\left(2\tilde a_7-\tilde a_3 B_3^{(3)}\right),$$

$$E_1^{(3)}=\frac{1}{\tilde a_1}\left(2\tilde a_4-\tilde a_{15}B_3^{(3)}\right),$$

$$F_3^{(3)}=-G_3^{(2)}=-\frac{1}{\tilde a_{10}}\left(\tilde a_{18}-\tilde a_{19}B_3^{(3)}\right),$$

$$H_2^{(3)}=\frac{1}{\tilde a_{10}}\left(2\tilde a_6-\tilde a_{15}E_1^{(3)}-\tilde a_8 B_3^{(3)}\right),$$

$$I_3^{(3)}=\frac{1}{\tilde a_{10}}\left(3\tilde a_6-\tilde a_{15}E_1^{(3)}+\tilde a_3 E_4^{(3)}-\tilde a_{11}B_3^{(3)}\right),$$

$$J_3^{(3)}=\frac{1}{\tilde a_{10}}\left(\tilde a_6-\tilde a_3 D_5^{(3)}-\tilde a_{12}B_3^{(3)}\right); \qquad (102)$$

[6] В формуле для D_2 из книги [3, с. 105] вместо a_{15} должно быть a_5.

множители при $\dot{p}_2$ $(i=4)$ –

$$B_4^{(4)}=\frac{\tilde{a}_{20}}{\tilde{a}_2}=\frac{1}{æ_2},\quad C_4^{(4)}=-\frac{\tilde{a}_{25}}{\tilde{a}_2}B_4^{(4)},$$

$$D_2^{(4)}=-E_3^{(4)}=\frac{1}{\tilde{a}_{10}}\big(\tilde{a}_{18}-\tilde{a}_3B_4^{(4)}\big),$$

$$F_1^{(4)}=-\frac{\tilde{a}_{24}}{\tilde{a}_1}B_4^{(4)},\quad H_5^{(4)}=-\frac{\tilde{a}_3}{\tilde{a}_2}\big(E_3^{(4)}+D_2^{(4)}\big),$$

$$I_1^{(4)}=-J_1^{(4)}=-\frac{1}{\tilde{a}_1}\big(\tilde{a}_{15}E_3^{(4)}-\tilde{a}_{16}B_4^{(4)}\big),$$

$$I_4^{(4)}=J_4^{(4)}=\frac{1}{\tilde{a}_2}\big(\tilde{a}_3E_3^{(4)}-\tilde{a}_{13}B_4^{(4)}\big), \qquad (103)$$

множители при $\dot{r}_2$ $(i=5)$ –

$$B_5^{(5)}=\frac{\tilde{a}_{20}}{\tilde{a}_2}=\frac{1}{æ_2},\quad C_5^{(5)}=-\frac{\tilde{a}_{25}}{\tilde{a}_2}B_5^{(5)},$$

$$D_3^{(5)}=E_2^{(5)}=\frac{1}{\tilde{a}_{10}}\big(\tilde{a}_{18}-\tilde{a}_3B_5^{(5)}\big),$$

$$G_1^{(5)}=-\frac{\tilde{a}_{24}}{\tilde{a}_1}B_5^{(5)},$$

$$H_1^{(5)}=-\frac{1}{\tilde{a}_1}\big[\tilde{a}_{15}\big(E_2^{(5)}+D_3^{(5)}\big)+\tilde{a}_{16}B_5^{(5)}\big],$$

$$I_5^{(5)}=J_5^{(5)}=-\frac{1}{\tilde{a}_2}\big(\tilde{a}_3E_2^{(5)}+\tilde{a}_{13}B_5^{(5)}\big). \qquad (104)$$

В итоге выражения (93) конкретизируются следующим образом (в каждом из 25 полиномов $R_i^{(j)}$ присутствуют только коэффициенты (100) – (104), а остальные равны нулю):

$$R_1^{(1)}=B_1^{(1)}+C_1^{(1)}p_0+I_1^{(1)}\big(r_1^2+p_1^2\big),\quad R_2^{(1)}=D_2^{(1)}p_1,$$

$$R_3^{(1)}=D_2^{(1)}r_1,\quad R_4^{(1)}=F_4^{(1)}p_2+I_4^{(1)}\big(r_1^2-p_1^2\big),$$

$$R_5^{(1)}=F_4^{(1)}r_2+H_5^{(1)}p_1r_1; \qquad (105)$$

$$R_1^{(2)}=D_1^{(2)}p_1,$$

$$R_2^{(2)}=B_2^{(2)}+C_2^{(2)}p_0+F_2^{(2)}p_2+I_2^{(2)}r_1^2+J_2^{(2)}p_1^2,$$

$$R_3^{(2)}=G_3^{(2)}r_2+H_3^{(2)}p_1r_1,\quad R_4^{(2)}=D_4^{(2)}p_1,$$

$$R_5^{(2)}=E_5^{(2)}r_1; \qquad (106)$$

$$R_1^{(3)}=E_1^{(3)}r_1,\quad R_2^{(3)}=G_2^{(3)}r_2+H_2^{(3)}p_1r_1,$$

$$R_3^{(3)}=B_3^{(3)}+C_3^{(3)}p_0+F_3^{(3)}p_2+I_3^{(3)}r_1^2+J_3^{(3)}p_1^2,$$

$$R_4^{(3)}=E_4^{(3)}r_1,\quad R_5^{(3)}=D_5^{(3)}p_1; \qquad (107)$$

$$R_1^{(4)}=F_1^{(4)}p_2+I_1^{(4)}\big(r_1^2-p_1^2\big),\quad R_2^{(4)}=D_2^{(4)}p_1,$$

$$R_3^{(4)}=E_3^{(4)}r_1,\ \ R_4^{(4)}=B_4^{(4)}+C_4^{(4)}p_0+I_4^{(4)}\big(r_1^2+p_1^2\big),$$

$$R_5^{(4)}=0; \qquad (108)$$

$$R_1^{(5)}=G_1^{(5)}r_2+H_1^{(5)}p_1r_1,\quad R_2^{(5)}=E_2^{(5)}r_1,$$

$$R_3^{(5)}=D_3^{(5)}p_1,\quad R_4^{(5)}=0,$$

$$R_5^{(5)}=B_5^{(5)}+C_5^{(5)}p_0+I_5^{(5)}\big(r_1^2+p_1^2\big). \qquad (109)$$

Искомые явные выражения квазискоростей R_k по 5-модовой модели получаются из формул (92) после подстановки в них приближений (105) – (109) и удержания членов до 3-го порядка малости включительно. Здесь вводится еще одно основополагающее для 5-модовой модели методическое правило, а именно принимается:

$$\dot{r}_1\sim\dot{p}_1\sim\varepsilon,\quad \dot{p}_0\sim\dot{r}_2\sim\dot{p}_2\sim\varepsilon^2$$

(порядки малости обобщенных скоростей те же, что и у соответствующих обобщенных координат жидкости). В результате получаются соотношения (см. табл.1)

$$R_1(\beta_n,\dot{\beta}_i)=P_0(t)=\frac{1}{æ_0}\dot{p}_0+C_0(p_1\dot{p}_1+r_1\dot{r}_1),$$

$$R_2(\beta_n,\dot{\beta}_i)=P_1(t)=B_3p_1\dot{p}_0+$$
$$+\Big(\frac{1}{æ_1}+B_0p_0+D_2p_2+D_3r_1^2+C_2p_1^2\Big)\dot{p}_1+$$
$$+\big(D_2r_2+C_1p_1r_1\big)\dot{r}_1+C_3p_1\dot{p}_2+C_3r_1\dot{r}_2,$$

$$R_3(\beta_n,\dot{\beta}_i)=R_1(t)=B_3r_1\dot{p}_0+$$
$$+\big(D_2r_2+C_1p_1r_1\big)\dot{p}_1+$$
$$+\Big(\frac{1}{æ_1}+B_0p_0-D_2p_2+C_2r_1^2+D_3p_1^2\Big)\dot{r}_1-$$
$$-C_3r_1\dot{p}_2+C_3p_1\dot{r}_2,$$

$$R_4(\beta_n,\dot{\beta}_i)=P_2(t)=-D_1p_1\dot{p}_1+D_1r_1\dot{r}_1+\frac{1}{æ_2}\dot{p}_2,$$

$$R_5(\beta_n,\dot{\beta}_i)=R_2(t)=-D_1r_1\dot{p}_1-D_1p_1\dot{r}_1+\frac{1}{æ_2}\dot{r}_2. \qquad (110)$$

Выражения (110) после элементарных преобразований полностью совпадают с приведенными в работе [3, стр. 105, формулы (15.13)].

Представим уравнения (19) в матричном виде

$$A\cdot\dot{\beta}=B\cdot\bar{R}, \qquad (111)$$

где в случае гамильтоновой модели векторы β, R определены в выражении (15), матрица $A=||a_{ki}||$ имеет размеры $(M+1)\times(N+1)$ и элементы (33), $B=||A_{kj}||$ – симметрическая $(M+1)\times(M+1)$ - матрица с элементами (45). В случае 5-модовой модели полагается $\beta_0=R_0=0$, нумерация индексов начинается с 1, а элементы матриц A и B определяются соответственно формулами (43) и (59), (77), (81), (86), (89).

Тогда, говоря о различиях в моделях, можно утверждать, что в 5-модовой модели численному решению системы уравнений (18), (19) предшествует аналитическое (приближенное) преобразование группы уравнений (19) по схеме

$$B \cdot \bar{R} = A \cdot \dot{\beta} \quad \Rightarrow \quad \bar{R} = B^{-1} \cdot A \cdot \dot{\beta},$$

а в гамильтоновой модели эта же группа уравнений преобразуется по обратной схеме, т.е.

$$B \cdot \bar{R} = A \cdot \dot{\beta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\beta} = A^{-1} \cdot B \cdot \bar{R},$$

причем это преобразование выполняется численно (в процессе численного интегрирования полной системы уравнений (18), (19)).

2.4. Группа уравнений $\dfrac{\partial L}{\partial \beta_i} = 0$

Содержащая силы тяжести и силы инерции группа уравнений (18) в гамильтоновой модели представляется в виде [15, формула (69)]

$$A^T(\beta)\frac{d\bar{R}}{dt} = K(\beta) \cdot [g_0 - w_0(t)] + [C(t) - \frac{p^*}{\rho}]F -$$

$$-\frac{1}{2}\nabla_\beta[\bar{R}^T \cdot B(\beta) \cdot \bar{R}]. \qquad (112)$$

Здесь матрицы $A(\beta)$, $B(\beta)$ определены в группе уравнений (111); ∇_β – оператор градиента по переменным β_0, $\beta_1, \ldots, \beta_N$; $K(\beta)$ – транспонированная $3 \times (N+1)$-матрица Якоби отображения $l(\beta)$, т.е.

$$K_{((N+1)\times 3)}(\beta) = \Big[\frac{\partial(l_x, l_y, l_z)}{\partial(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N)}\Big]^T; \qquad (113)$$

$$F = [F_0, F_1, \ldots, F_N]^T$$

– вектор-столбец с компонентами F_i, определяемыми по формулам (22); $\nabla_\beta(\bar{R}^T \cdot B(\beta) \cdot \bar{R})$ – градиент квадратичной формы от переменных $R_0, R_1, \ldots, R_M$ с матрицей $B(\beta)$. Произведение матрицы $K(\beta)$ на столбец $[g_0 - w_0(t)]$ удовлетворяет равенству (в самолетных осях)

$$K(\beta) \cdot [g_0 - w_0(t)] = [g_0 - w_0(t)]_x K_0 \cdot \beta +$$

$$+[g_0 - w_0(t)]_y K_1 + [g_0 - w_0(t)]_z K_2, \qquad (114)$$

где K_0 – квадратная матрица размера $(N+1) \times (N+1)$, а K_1, K_2 – вектор-столбцы размера $(N+1)$, элементы которых определяются по формулам

$$K_1 = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} f_0(\xi,\eta) \\ f_1(\xi,\eta) \\ \vdots \\ f_N(\xi,\eta) \end{bmatrix} \xi^2 \cos(\eta) d\eta d\xi,$$

$$K_2 = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} f_0(\xi,\eta) \\ f_1(\xi,\eta) \\ \vdots \\ f_N(\xi,\eta) \end{bmatrix} \xi^2 \sin(\eta) d\eta d\xi,$$

$$K_0 = ||k_{ij}|| = \Big[\rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(\xi,\eta) f_j(\xi,\eta) \xi d\eta d\xi\Big],$$

$$i, j = 0, 1, \ldots, N. \qquad (115)$$

Именно в форме (112) уравнения этой группы используются в компьютерной программе для гамильтоновой модели.

В 5-модовой модели группа уравнений (112) подвергается преобразованию с помощью замены переменных

$$\bar{R} = B^{-1} \cdot A \cdot \dot{\beta},$$

в результате чего получается система дифференциальных уравнений второго порядка относительно искомых функций $\beta_1(t), \ldots, \beta_5(t)$. Опишем это преобразование.

Дифференцирование по t полученных 5-модовых приближений (110) квазискоростей R_m и подстановка их (символьные вычисления) в суммы $\sum a_{mi} dR_m/dt$ уравнений (18) приводят, с учетом приближенных формул (43), к дифференциальным выражениям относительно первых и вторых производных по t от функций $p_0(t)$, $p_1(t)$, $r_1(t)$, $p_2(t)$, $r_2(t)$. Эти дифференциальные выражения линейны по вторым производным и нелинейны по первым производным, причем коэффициенты при производных представляют собой полиномы от p_0, p_1, r_1, p_2, r_2.

Обозначим через μ_n, d_i коэффициенты этих полиномов, совпадающие с приведенными в работе [3] и входящие в окончательные дифференциальные уравнения модели, а через c_i – промежуточные коэффициенты, которые войдут в окончательные дифференциальные уравнения в сумме с коэффициентами квадратичных форм от переменных R_k. Тогда в предположении, что

$$\ddot{r}_1 \sim \ddot{p}_1 \sim \varepsilon, \quad \ddot{p}_0 \sim \ddot{r}_2 \sim \ddot{p}_2 \sim \varepsilon^2$$

с точностью до величин 3-го порядка малости рассматриваемые дифференциальные выражения запишутся как[7]

$$\sum_{m=1}^{5} \frac{\partial A_m}{\partial \beta_1} \frac{dR_m}{dt} \simeq \mu_0 \ddot{p}_0 + d_6(p_1\ddot{p}_1 + r_1\ddot{r}_1) + c_1(\dot{p}_1^2 + \dot{r}_1^2),$$

[7] В формуле для μ_0 работы [3, с. 105] должен быть коэффициент 2.

$$\sum_{m=1}^{5}\frac{\partial A_m}{\partial\beta_2}\frac{dR_m}{dt}\simeq d_6p_1\ddot p_0+$$
$$+\big(\mu_1+d_5p_0+d_3p_2+d_1p_1^2+d_2r_1^2\big)\ddot p_1+$$
$$+\big[d_3r_2+(d_1-d_2)p_1r_1\big)\ddot r_1-d_4(p_1\ddot p_2+r_1\ddot r_2)+c_2p_1\dot p_1^2+$$
$$+c_3p_1\dot r_1^2++c_4r_1\dot p_1\dot r_1+c_5\dot p_0\dot p_1+c_6(\dot p_1\dot p_2+\dot r_1\dot r_2),$$
$$\sum_{m=1}^{5}\frac{\partial A_m}{\partial\beta_3}\frac{dR_m}{dt}\simeq d_6r_1\ddot p_0+\big[d_3r_2+(d_1-d_2)p_1r_1\big]\ddot p_1+$$
$$+\big(\mu_1+d_5p_0-d_3p_2+d_2p_1^2+d_1r_1^2\big)\ddot r_1+$$
$$+d_4(r_1\ddot p_2-p_1\ddot r_2)+c_3r_1\dot p_1^2+c_2r_1\dot r_1^2+$$
$$+c_4p_1\dot p_1\dot r_1+c_5\dot p_0\dot r_1+c_6(\dot p_1\dot r_2-\dot p_2\dot r_1),$$
$$\sum_{m=1}^{5}\frac{\partial A_m}{\partial\beta_4}\frac{dR_m}{dt}\simeq -d_4p_1\ddot p_1+d_4r_1\ddot r_1+\mu_2\ddot p_2-c_7(\dot p_1^2-\dot r_1^2),$$
$$\sum_{m=1}^{5}\frac{\partial A_m}{\partial\beta_5}\frac{dR_m}{dt}\simeq -d_4r_1\ddot p_1-d_4p_1\ddot r_1+\mu_2\ddot r_2-2c_7\dot p_1\dot r_1, \tag{116}$$

где

$$\mu_0=\frac{\tilde a_{17}}{æ_0}=2\frac{\rho\pi i_6}{æ_0},\quad \mu_1=\frac{\tilde a_5}{æ_1}=\frac{\rho\pi i_3}{æ_1},$$
$$\mu_2=\frac{\tilde a_{20}}{æ_2}=\frac{\rho\pi i_{12}}{æ_2},$$
$$d_1=2\tilde a_4C_0+\tilde a_5C_2-2\tilde a_7D_1+3\frac{\tilde a_6}{æ_1},$$
$$d_2=\tilde a_5D_3-2\tilde a_7D_1+\frac{\tilde a_6}{æ_1},\quad d_3=\tilde a_5D_2+\frac{\tilde a_{18}}{æ_1},$$
$$d_4=-\Big(\tilde a_5C_3+2\frac{\tilde a_7}{æ_2}\Big)=\tilde a_{20}D_1-\frac{\tilde a_{18}}{æ_1},$$
$$d_5=\tilde a_5B_0+\frac{\tilde a_{14}}{æ_1},$$
$$d_6=\tilde a_{17}C_0+\frac{\tilde a_{14}}{æ_1}=\tilde a_5B_3+2\frac{\tilde a_4}{æ_0},$$
$$c_1=\tilde a_{17}C_0,\quad c_2=2(\tilde a_4C_0+\tilde a_5C_2-\tilde a_7D_1),$$
$$c_3=2\tilde a_4C_0+\tilde a_5C_1+2\tilde a_7D_1,$$
$$c_4=\tilde a_5C_1+2\tilde a_5D_3-4\tilde a_7D_1,$$
$$c_5=\tilde a_5(B_0+B_3),\quad c_6=\tilde a_5(C_3+D_2),\quad c_7=\tilde a_{20}D_1.$$

Как и следовало ожидать, коэффициенты при вторых производных $\ddot p_0, \ddot p_1, \ldots, \ddot r_2$ в дифференциальных выражениях (116) совпадают с соответствующими коэффициентами окончательных дифференциальных уравнений, поскольку других источников вторых производных в исходных уравнениях (18) не имеется.

Рассмотрим теперь квадратичные формы из уравнений (112)

$$\frac{1}{2}\nabla_\beta[\bar R^T\cdot B(\beta)\cdot\bar R].$$

Элементы матрицы $B(\beta)$ определены формулами (59), (77), (81), (86), (89). Обозначим $B_i=\partial B/\partial\beta_i$. Поскольку матрица B симметрическая, таковыми будут и матрицы-производные B_i. Выполнив дифференцирование, приходим к следующему набору матриц (элементы всех матриц B_i обозначаются одинаково через b_{mn}, но это не должно привести к ошибкам):

матрица $B_1=\partial B/\partial\beta_1=\partial B/\partial p_0$ –

$$b_{11}=\tilde a_{21},\quad b_{12}=\tilde a_{23}p_1,\quad b_{13}=\tilde a_{23}r_1,\quad b_{14}=0,$$
$$b_{15}=0,\quad b_{22}=\tilde a_{22},\quad b_{23}=0,\quad b_{24}=\tilde a_{28}p_1,$$
$$b_{25}=\tilde a_{28}r_1,\quad b_{33}=\tilde a_{22},\qquad b_{34}=-\tilde a_{28}r_1,$$
$$b_{35}=\tilde a_{28}p_1,\quad b_{44}=\tilde a_{25},\quad b_{45}=0,\quad b_{55}=\tilde a_{25}; \tag{117}$$

матрица $B_2=\partial B/\partial\beta_2=\partial B/\partial p_1$ –

$$b_{11}=2\tilde a_9p_1,\quad b_{12}=\tilde a_{15}+\tilde a_{23}p_0+\tilde a_{26}p_2+\tilde a_{30}(3p_1^2+r_1^2),$$
$$b_{13}=\tilde a_{26}r_2+2\tilde a_{30}p_1r_1,\quad b_{14}=2\tilde a_{16}p_1,\quad b_{15}=\tilde a_{16}r_1,$$
$$b_{22}=2\tilde a_{11}p_1,\quad b_{23}=\tilde a_8r_1,$$
$$b_{24}=\tilde a_3+\tilde a_{28}p_0+\tilde a_{27}p_2+3\tilde a_{34}p_1^2+\tilde a_{33}r_1^2,$$
$$b_{25}=\tilde a_{27}r_2+2\tilde a_{31}p_1r_1,\quad b_{33}=2\tilde a_{12}p_1,$$
$$b_{34}=-(\tilde a_{29}r_2+2\tilde a_{33}p_1r_1),$$
$$b_{35}=\tilde a_3+\tilde a_{28}p_0+\tilde a_{29}p_2+3\tilde a_{32}p_1^2+\tilde a_{31}r_1^2,$$
$$b_{44}=2\tilde a_{13}p_1,\quad b_{45}=0,\quad b_{55}=2\tilde a_{13}p_1; \tag{118}$$

матрица $B_3=\partial B/\partial\beta_3=\partial B/\partial r_1$ –

$$b_{11}=2\tilde a_9r_1,\quad b_{12}=\tilde a_{26}r_2+2\tilde a_{30}p_1r_1,$$
$$b_{13}=\tilde a_{15}+\tilde a_{23}p_0-\tilde a_{26}p_2+\tilde a_{30}(p_1^2+3r_1^2),$$
$$b_{14}=-2\tilde a_{16}r_1,\quad b_{15}=\tilde a_{16}r_1,\quad b_{22}=2\tilde a_{12}r_1,$$
$$b_{23}=\tilde a_8p_1,\quad b_{24}=\tilde a_{29}r_2+2\tilde a_{33}p_1r_1,$$
$$b_{25}=\tilde a_3+\tilde a_{28}p_0-\tilde a_{29}p_2+\tilde a_{31}p_1^2+3\tilde a_{32}r_1^2,\ b_{33}=2\tilde a_{11}r_1,$$
$$b_{34}=-\tilde a_3-\tilde a_{28}p_0+\tilde a_{27}p_2-\tilde a_{33}p_1^2-3\tilde a_{34}r_1^2,$$
$$b_{35}=\tilde a_{27}r_2+2\tilde a_{31}p_1r_1\quad b_{44}=2\tilde a_{13}r_1,$$
$$b_{45}=0,\quad b_{55}=2\tilde a_{13}r_1; \tag{119}$$

матрица $B_4=\partial B/\partial\beta_4=\partial B/\partial p_2$ –

$$b_{11}=0,\quad b_{12}=\tilde a_{26}p_1,\quad b_{13}=-\tilde a_{26}r_1,\quad b_{14}=\tilde a_{24},$$
$$b_{15}=0,\quad b_{22}=\tilde a_{19},\quad b_{23}=0,\quad b_{24}=\tilde a_{27}p_1,$$

$$b_{25} = -\tilde{a}_{29} r_1, \quad b_{33} = -\tilde{a}_{19}, \quad b_{34} = \tilde{a}_{27} r_1,$$

$$b_{35} = \tilde{a}_{29} p_1, \quad b_{44} = 0, \quad b_{45} = 0, \quad b_{55} = 0; \qquad (120)$$

матрица $B_5 = \partial B / \partial \beta_5 = \partial B / \partial r_2$ –

$$b_{11} = 0, \quad b_{12} = \tilde{a}_{26} r_1, \quad b_{13} = \tilde{a}_{26} p_1, \quad b_{14} = 0,$$

$$b_{15} = \tilde{a}_{24}, \quad b_{22} = 0, \quad b_{23} = \tilde{a}_{19}, \quad b_{24} = \tilde{a}_{29} r_1,$$

$$b_{25} = \tilde{a}_{27} p_1, \quad b_{33} = 0, \quad b_{34} = -\tilde{a}_{29} p_1,$$

$$b_{35} = \tilde{a}_{27} r_1, \quad b_{44} = 0, \quad b_{45} = 0, \quad b_{55} = 0. \qquad (121)$$

Умножая теперь матрицы B_i (117)–(121) справа на вектор $\bar{R}$ с компонентами (110) (символьные вычисления), а затем вычисляя скалярные произведения векторов $\bar{R}^T$ и $B_i \cdot \bar{R}$ (символьные вычисления), приходим к следующим квадратичным формам относительно обобщенных скоростей $\dot{\beta}_i$ (удержаны члены не выше 3-го порядка малости):

$$\frac{1}{2} \bar{R}^T \cdot B_1 \cdot \bar{R} \simeq e_1 (\dot{p}_1^2 + \dot{r}_1^2),$$

$$\frac{1}{2} \bar{R}^T \cdot B_2 \cdot \bar{R} \simeq e_2 p_1 \dot{p}_1^2 + e_3 p_1 \dot{r}_1^2 + e_4 r_1 \dot{p}_1 \dot{r}_1 + e_5 \dot{p}_0 \dot{p}_1 + e_6 (\dot{p}_1 \dot{p}_2 + \dot{r}_1 \dot{r}_2),$$

$$\frac{1}{2} \bar{R}^T \cdot B_3 \cdot \bar{R} \simeq e_3 r_1 \dot{p}_1^2 + e_2 r_1 \dot{r}_1^2 + e_4 p_1 \dot{p}_1 \dot{r}_1 + e_5 \dot{p}_0 \dot{p}_1 + e_6 (\dot{p}_1 \dot{r}_2 - \dot{r}_1 \dot{p}_2),$$

$$\frac{1}{2} \bar{R}^T \cdot B_4 \cdot \bar{R} \simeq e_7 (\dot{p}_1^2 - \dot{r}_1^2), \quad \frac{1}{2} \bar{R}^T \cdot B_5 \cdot \bar{R} \simeq 2 e_7 \dot{p}_1 \dot{r}_1. \qquad (122)$$

Здесь через e_i обозначены зависящие от параметров $\tilde{a}_m$ коэффициенты этих квадратичных форм, причем

$$e_1 = \frac{\tilde{a}_{22}}{2\text{æ}_1^2}, \quad e_2 = \frac{\tilde{a}_{15}}{\text{æ}_1} C_0 + \frac{\tilde{a}_{11}}{\text{æ}_1^2} - \frac{\tilde{a}_3}{\text{æ}_1} D_1,$$

$$e_3 = \frac{\tilde{a}_{12}}{\text{æ}_1^2} - \frac{\tilde{a}_3}{\text{æ}_1} D_1, \quad e_4 = \frac{\tilde{a}_8}{\text{æ}_1^2} + \frac{\tilde{a}_{15}}{\text{æ}_1} C_0,$$

$$e_5 = \frac{\tilde{a}_{15}}{\text{æ}_0 \text{æ}_1}, \quad e_6 = \frac{\tilde{a}_3}{\text{æ}_1 \text{æ}_2}, \quad e_7 = \frac{\tilde{a}_{19}}{\text{æ}_1^2}.$$

Между коэффициентами c_i, d_m дифференциальных выражений (116) и коэффициентами e_n квадратичных форм (122) выполняются соотношения

$$c_2 + e_2 = d_1, \quad c_3 + e_3 = d_1 - 2d_2, \quad c_4 + e_4 = 2d_2,$$

$$c_5 + e_5 = d_5, \quad c_6 + e_6 = d_3. \qquad (123)$$

Справедливость этих равенств доказывается непосредственно с применением формул (100) – (104). Кроме того, оказывается, что

$$c_7 - e_7 = d_7 = d_4 + \frac{1}{2} d_3,$$

$$c_1 + e_1 = d_8 = d_6 - \frac{1}{2} d_5, \qquad (124)$$

где d_7, d_8 – последние из коэффициентов d_n дифференциальных уравнений движения жидкости (15.15) – (15.19) из работы [3, стр. 110].

Выражения (116) и (122) дают приближения соответствующих членов общих уравнений (112) на случай 5-модовой модели. Конкретизируем, наконец, слагаемые $K(\beta) \cdot [g_0 - w_0(t)]$ и $[C(t) - p^*/\rho] F$ этих уравнений для 5-модовой модели.

Компоненты вектора F находятся по формулам (22), где, как видно из выражения (25) и табл.1, нужно положить

$$f_0(\xi, \eta) = 1, \quad f_1(\xi, \eta) = \psi_{02}(0, \xi),$$

$$f_2(\xi, \eta) = \psi_{11}(0, \xi) \cos(\eta), \quad f_3(\xi, \eta) = \psi_{11}(0, \xi) \sin(\eta),$$

$$f_4(\xi, \eta) = \psi_{21}(0, \xi) \cos(2\eta), f_5(\xi, \eta) = \psi_{21}(0, \xi) \sin(2\eta). \qquad (125)$$

Здесь, в соответствии с уравнением (27),

$$\psi_{02}(0, \xi) = \frac{J_0(k_0^{(2)} \xi)}{J_0(k_0^{(2)} R)}, \quad \psi_{11}(0, \xi) = \frac{J_1(k_1^{(1)} \xi)}{J_1(k_1^{(1)} R)},$$

$$\psi_{21}(0, \xi) = \frac{J_2(k_2^{(1)} \xi)}{J_2(k_2^{(1)} R)}.$$

Подставляя функции (125) в формулы (22), находим, что

$$F = (\rho \pi R^2, 0, 0, 0, 0, 0)^T. \qquad (126)$$

Таким образом, только компонента F_0 отлична от нуля, но в 5-модовой модели уравнение, соответствующее координате β_0, не рассматривается.

Далее, векторы K_1, K_2 задаются первыми двумя формулами (115). Из них для координатных функций вида (125) получаем

$$K_1 = (0, 0, \lambda, 0, 0, 0)^T,$$

$$K_2 = (0, 0, 0, \lambda, 0, 0)^T, \qquad (127)$$

где

$$\lambda = \frac{\rho \pi R^2 J_2(k_1^{(1)} R)}{k_1^{(1)} J_1(k_1^{(1)} R)}.$$

Матрица K_0, как показано в работе [15, п.9], в самом общем случае является диагональной и имеет вид

$$K_0 = \mathrm{diag}\Big(k_{00}, k_{11}, k_{22}, k_{33}, k_{44}, k_{55}\Big),$$

где элементы главной диагонали попарно равны и задаются формулами

$$k_{00} = k_{11} = \rho \pi R^2,$$

$$k_{22} = k_{33} = \frac{1}{2}\rho\pi R^2\left[1 - \left(\frac{1}{k_1^{(1)}R}\right)^2\right],$$

$$k_{44} = k_{55} = \frac{1}{2}\rho\pi R^2\left[1 - \left(\frac{2}{k_2^{(1)}R}\right)^2\right]. \qquad (128)$$

Теперь, подставляя выражения (116), (122), (126) – (128) в (112), получаем искомую 5-модовую модель в виде нелинейной системы 5-ти обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка следующего вида (первые строки всех матриц и векторов, соответствующие переменным β_0 и R_0, не рассматриваются):

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} \\ 0 & d_{42} & d_{43} & d_{44} & 0 \\ 0 & d_{52} & d_{53} & 0 & d_{55} \end{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ r_1 \\ p_2 \\ r_2 \end{bmatrix} =$$

$$= [g_0 - w_0(t)]_x \begin{bmatrix} k_{11}p_0 \\ k_{22}p_1 \\ k_{33}r_1 \\ k_{44}p_2 \\ k_{55}r_2 \end{bmatrix} + [g_0 - w_0(t)]_y \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+[g_0 - w_0(t)]_z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1(\dot p_0, \dot p_1, \dot r_1, \dot p_2, \dot r_2) \\ Q_2(\dot p_0, \dot p_1, \dot r_1, \dot p_2, \dot r_2) \\ Q_3(\dot p_0, \dot p_1, \dot r_1, \dot p_2, \dot r_2) \\ Q_4(\dot p_0, \dot p_1, \dot r_1, \dot p_2, \dot r_2) \\ Q_5(\dot p_0, \dot p_1, \dot r_1, \dot p_2, \dot r_2) \end{bmatrix}. \qquad (129)$$

Здесь элементы матрицы коэффициентов при старших производных являются полиномами относительно обобщенных координат и определяются формулами

$$d_{11} = \mu_0, \quad d_{12} = d_{21} = d_6 p_1, \quad d_{13} = d_{31} = d_6 r_1,$$

$$d_{14} = d_{41} = 0, \quad d_{15} = d_{51} = 0,$$

$$d_{22} = \mu_1 + d_5 p_0 + d_3 p_2 + d_1 p_1^2 + d_2 r_1^2,$$

$$d_{23} = d_{32} = d_3 r_2 + (d_1 - d_2) p_1 r_1, \quad d_{24} = d_{42} = -d_4 p_1,$$

$$d_{25} = d_{52} = -d_4 r_1,$$

$$d_{33} = \mu_1 + d_5 p_0 - d_3 p_2 + d_2 p_1^2 + d_1 r_1^2,$$

$$d_{34} = d_{43} = d_4 r_1, \quad d_{35} = d_{53} = -d_4 p_1,$$

$$d_{44} = d_{55} = \mu_2, \quad d_{45} = d_{54} = 0. \qquad (130)$$

Таким образом, в 5-модовой модели матрица коэффициентов при старших производных оказывается симметрической.

Функции $Q_i(\dot p_0, \dot p_1, \dot r_1, \dot p_2, \dot r_2)$ в уравнениях (129) являются квадратичными формами от обобщенных скоростей с полиномиальными коэффициентами и определяются формулами

$$Q_1 = -(c_1 + e_1)(\dot p_1^2 + \dot r_1^2),$$

$$Q_2 = -\Big[(c_2+e_2)p_1\dot p_1^2 + (c_3+e_3)p_1\dot r_1^2 + (c_4+e_4)r_1\dot p_1\dot r_1 +$$

$$+(c_5 + e_5)\dot p_0\dot p_1 + (c_6 + e_6)(\dot p_1\dot p_2 + \dot r_1\dot r_2)\Big],$$

$$Q_3 = -\Big[(c_3+e_2)r_1\dot p_1^2 + (c_2+e_2)r_1\dot r_1^2 + (c_4+e_4)p_1\dot p_1\dot r_1 +$$

$$+(c_5 + e_5)\dot p_0\dot r_1 + (c_6 + e_6)(\dot p_1\dot r_2 - \dot r_1\dot p_2)\Big],$$

$$Q_4 = (c_7 - e_7)(\dot p_1^2 - \dot r_1^2), \quad Q_5 = 2(c_7 - e_7)\dot p_1\dot r_1. \qquad (131)$$

Построенные уравнения (129) обобщают уравнения (15.15) – (15.19) работы [3, стр. 105] на случай произвольного поступательного движения бака и полностью совпадают с ними в случае неподвижного бака. В этом можно убедиться, если использовать соотношения (123), (124) и равенства

$$k_{11}g = 2\rho\pi i_6 g = \mu_0\sigma_0^2, \quad k_{22}g = \rho\pi i_3 g = \mu_1\sigma_1^2,$$

$$k_{44}g = \rho\pi i_{12}g = \mu_2\sigma_2^2, \quad \sigma_i^2 = æ_i g \quad (i = 0, 1, 2),$$

$$g = |g_0|.$$

3. СРАВНЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ ДАННЫХ

Гамильтонова и 5-модовая модели (129) применялись для решения следующей задачи. Вертикальный цилиндрический бак радиусом R=1 м и высотой l=2 м заполнен жидкостью плотности ρ=1000 кг$\cdot$ м$^{-3}$ до уровня h=1.5 м. Бак находится на поверхности Земли, а давление на свободной поверхности жидкости равно атмосферному, т. е. $p^* = 10^5$ Н $\cdot$ м$^{-2}$. Ускорение силы тяжести g=9.81 м $\cdot$ с$^{-2}$, что соответствует, в частности, средним широтам Северного полушария. До момента времени $t = 0$ вся система покоится, а в момент $t = 0$ бак начинает двигаться по горизонтали равноускоренно с некоторым ускорением w. Необходимо рассчитать поведение свободной поверхности жидкости на начальном этапе движения бака при различных значениях ускорения w.

Задача решалась с помощью численного интегрирования уравнений (18) – (19) и (129) методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности. Интервал счета $[t_0, t_1] = [0, 2с]$ (период свободных колебаний

Табл. 3. Обобщенные координаты свободной поверхности как функции времени, посчитанные по гамильтоновой ($\beta_i(t)$) и 5-модовой ($p_i(t), r_i(t)$) моделям. Ускорение бака $w = 0.5$мс$^{-2}$

t, с	$\beta_1(t)$	$\beta_2(t)$	$\beta_3(t)$	$\beta_4(t)$	$\beta_5(t)$
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	0.000	0.000	-0.004	0.000	0.001
0.2	0.000	0.000	-0.014	0.000	0.002
0.3	0.000	0.000	-0.030	0.000	0.005
0.4	0.000	0.000	-0.048	-0.001	0.007
0.5	0.001	0.000	-0.065	-0.001	0.009
0.6	0.001	0.000	-0.078	-0.001	0.009
0.7	0.001	0.000	-0.085	-0.002	0.008
0.8	0.000	0.000	-0.084	-0.001	0.006
0.9	0.000	0.000	-0.076	-0.001	0.003
1.0	-0.001	0.000	-0.063	-0.001	0.001
1.1	-0.001	-0.001	-0.045	0.000	0.000
1.2	0.000	0.000	-0.028	0.000	0.000
1.3	0.000	0.000	-0.013	0.000	0.002
1.4	0.001	0.000	-0.003	0.000	0.004
1.5	0.001	0.000	0.000	0.000	0.006
1.6	0.001	0.000	- 0.005	0.000	0.008
1.7	0.001	0.001	- 0.016	0.000	0.009
1.8	0.000	0.001	- 0.032	0.000	0.008
1.9	0.000	0.001	- 0.050	-0.001	0.007
2.0	0.000	0.001	- 0.067	-0.001	0.005

$p_0(t)$	$p_1(t)$	$r_1(t)$	$p_2(t)$	$r_2(t)$
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	-0.004	0.000	0.000
0.000	0.000	-0.014	0.000	0.000
0.000	0.000	-0.030	0.000	0.000
0.000	0.000	-0.048	-0.001	0.000
0.001	0.000	-0.065	-0.001	0.000
0.001	0.000	-0.078	-0.001	0.000
0.001	0.000	-0.085	-0.002	0.000
0.000	0.000	-0.084	-0.001	0.000
0.000	0.000	-0.076	-0.001	0.000
0.001	0.000	-0.063	-0.001	0.000
-0.001	0.000	-0.045	0.000	0.000
0.000	0.000	-0.028	0.000	0.000
0.000	0.000	-0.013	0.000	0.000
0.000	0.000	-0.003	0.000	0.000
0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
0.001	0.000	-0.005	0.000	0.000
0.001	0.000	-0.016	0.000	0.000
0.000	0.000	-0.032	0.000	0.000
0.000	0.000	-0.050	-0.001	0.000
0.000	0.000	-0.067	-0.001	0.000

жидкости на первой собственной частоте, рассчитанный по линейной модели, равен $1.5 \div 1.6$ с), шаг счета $h = 0.1$ с, вектор ускорения w_0 в самолетных осях

$$w_0 = (w_{0x}, w_{0y}, , w_{0z}) = (0, 0, w).$$

Кроме того, в случае гамильтоновой модели полагалось $N = M = 5$, а расчеты выполнялись по программе, соответствующей корабельным осям. Для корабельных осей

$$C(t) = \frac{p^*}{\rho} + h_0(g + w), \quad (w_{0x}, w_{0y}, w_{0z}) = (0, w, 0),$$

где $h_0 = 0.5$м – z-координата центра невозмущенной поверхности жидкости.

Начальные условия (28), (29) рассматривались в момент $t_0 = 0$, соответствовали состоянию относительного равновесия жидкости до появления ускорения бака и во всех случаях были следующими: для гамильтоновой модели –

$$t = 0, \quad R_m(0) = 0, \quad m = 0, \ldots, 5,$$

$$\beta_0(0) = h_0, \quad \beta_i(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, 5,$$

для 5-модовой модели –

$$t = 0, \quad p_0(0) = p_1(0) = r_1(0) = p_2(0) = r_2(0) = 0,$$

$$\dot{p}_0(0) = \dot{p}_1(0) = \dot{r}_1(0) = \dot{p}_2(0) = \dot{r}_2(0) = 0.$$

Оценка близости получаемых с помощью рассматриваемых моделей результатов выполнена при двух значениях ускорения: $w = 0.5$ м $\cdot$ с$^{-2}$ и $w = 5.0$ м $\cdot$ с$^{-2}$. Соответствующие расчетные данные приведены в табл. 3, 4, а связь обобщенных координат $\beta_i(t)$ и $p_i(t), r_i(t)$ устанавливается в табл. 1. Расчеты проводились с двойной точностью, а округление выполнено до 3-го десятичного знака после точки.

Замечание. По результатам расчетов по гамильтоновой модели обобщенная координата $\beta_0(t) \equiv 0.500$ м для всех t и в таблицах не приводится.

3.1. Поточечные и средние оценки близости расчетных обобщенных координат $\beta_i(t)$ жидкости.

Для оценки точности результатов расчетов по рассматриваемым моделям функций времени в различных точках $t = t_k$ (поточечных оценок) предлагается использовать понятие относительной погрешности, а для оценки близости расчетных функций в среднем (средние оценки близости) – понятие взвешенной средней квадратической ошибки. Эти подходы и соответствующие определения будут применены к данным из табл. 4, а более простой случай из табл. 3 рассмотрим непосредственно.

Анализ данных из табл.3, соответствующих ускорению бака $w = 0.5$ м $\cdot$ с$^{-2}$, позволяет утверждать следующее.

1) Обобщенные координаты $\beta_i(t)$ и $p_i(t), r_i(t)$ как функции времени имеют колебательный характер.

2) Доминирующими в обоих случаях являются колебания по модам, соответствующим обобщенным координатам $\beta_3(t)$ и $r_1(t)$.

3) С точностью до 3-го десятичного знака после точки $\beta_3(t) = r_1(t)$, $\beta_4(t) = p_2(t)$.

4) Остальные пары функций $\beta_1(t)$ и $p_0(t)$, $\beta_2(t)$ и $p_1(t)$, $\beta_5(t)$ и $r_2(t)$ отличаются лишь в 3-м десятичном знаке после точки и практически равны нулю.

5) По гамильтоновой модели амплитудные значения обобщенной координаты $r_1(t)$ (0.085 м) приблизительно на порядок больше амплитудных значений $p_0(t)$, $p_2(t)$, $r_2(t)$ (наибольшее из них соответствует координате $r_2(t)$ и составляет 0.009 м), что не противоречит исходным эвристическим соображениям для 5-модовой модели относительно порядков величин $r_1(t)$, $p_1(t)$ и $p_0(t)$, $p_2(t)$, $r_2(t)$.

6) По 5-модовой модели обобщенные координаты $p_1(t)$ и $r_2(t)$ тождественно равны нулю.

7) Период колебаний в обоих случаях составляет 1.5 с. Отношение амплитуда/радиус равно 0.085 (оценки получены по доминирующим модам).

На основании этих данных можно утверждать, что расчеты по гамильтоновой и 5-модовой моделям при ускорении $w = 0.5$м $\cdot$ с$^{-2}$ практически совпадают.

Несколько более сложная, но похожая картина наблюдается при ускорении бака $w = 5.0$ м $\cdot$ с$^{-2}$. Соответствующие данные приведены в табл. 4. В этом случае естественно взять в качестве меры близости расчетных значений функций, полученных по гамильтоновой и 5-модовой моделям, величину взвешенной средней квадратической ошибки. Определим эту величину применительно к табл. 4.

В теории приближения функций один из способов оценки близости функций на дискретном множестве точек сводится к вычислению величины

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{m} \gamma_k \big[F(x_k) - f(x_k) \big]^2, \qquad (132)$$

где σ – взвешенная средняя квадратическая ошибка; $f(x)$ – данная функция; $F(x)$ – аппрокимирующая функция; γ_k – весовая функция; x_k – точки аппроксимации; m – номер последней точки аппроксимации. В табл. 4 условно полагаем функции $p_i(t)$, $r_i(t)$, полученные по 5-модовой модели, точными и соответствующими функции $f(x)$, а полученные по гамильтоновой модели функции $\beta_i(t)$ – их приближениями, соответствующими функции $F(x)$. Тогда, вводя в рассмотрение относительные погрешности вычисления функций $p_i(t)$, $r_i(t)$ в точках $t = t_k$ формулами

$$\delta_k^i = \frac{p_i(t_k) - \beta_i(t_k)}{|\beta_i(t_k)|},$$

$$i = 1, \ldots, 5, \quad k = 0, 1, \ldots, 20,$$

(здесь для сокращения письма положено $p_2(t) = r_1(t)$, $p_4(t) = r_2(t)$), возводя в квадрат эти величины и вычисляя их среднее арифметическое, получим формулу

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{21} \sum_{k=0}^{20} (\delta_k^i)^2 = \frac{1}{21} \sum_{k=0}^{20} \frac{[p_i(t_k) - \beta_i(t_k)]^2}{[\beta_i(t_k)]^2},$$

которая совпадает с формулой (132), если в качестве весовой функции выбрать

$$\gamma_k = \frac{1}{21[\beta_i(t_k)]^2}.$$

Значения квадратов относительных погрешностей δ_k^i, вычисленых по табл. 4, приведены в табл. 5, где в предпоследней строке даны также вычисленные значения средней квадратической ошибки σ_i, а в последней – $\tilde{\sigma}_i$. Оценки $\tilde{\sigma}_i$ отличаются от σ_i тем, что при их получении в первом столбце отброшены аномально большие значения квадрата относительной погрешности (по сравнению с остальными значениями этих величин в данном столбце) 225.0000 и 729.0000, в третьем столбце – 4.0000 и 1.9110, в четвертом столбце – 4489.0000 и 4.4399 (соответственно число узловых точек t_k уменьшено с 21 до 19). Во втором и пятом столбцах такие чрезмерно большие значения $(\delta_k^i)^2$ отсутствуют, поэтому для них оценки σ_i и $\tilde{\sigma}_i$ совпадают. Отмеченные большие относительные погрешности являются нехарактерными и сильно искажают средние оценки квадратической ошибки, а потому могут быть отброшены. Заметим, что очень большие относительные погрешности наблюдаются вблизи мало отличающихся от нуля значений оцениваемых функций.

В дальнейшем σ_i называется полной, а $\tilde{\sigma}_i$ уточненной оценкой средней квадратической ошибки.

Анализируя данные из табл. 4, 5, приходим к следующим выводам.

Табл. 4. Обобщенные координаты свободной поверхности как функции времени, посчитанные по гамильтоновой ($\beta_i(t)$) и 5-модовой ($p_i(t), r_i(t)$) моделям. Ускорение бака w=5.0 м $\cdot$ с$^{-2}$

t, с	$\beta_1(t)$	$\beta_2(t)$	$\beta_3(t)$	$\beta_4(t)$	$\beta_5(t)$	$p_0(t)$	$p_1(t)$	$r_1(t)$	$p_2(t)$	$r_2(t)$
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	0.000	0.000	-0.038	0.000	0.007	0.000	0.000	-0.038	0.000	0.000
0.2	0.004	0.002	-0.143	-0.004	0.024	0.000	0.000	-0.143	0.000	0.000
0.3	0.016	0.007	-0.293	-0.018	0.049	0.017	0.000	-0.293	-0.020	0.000
0.4	0.032	0.016	-0.458	-0.036	0.075	0.040	0.000	-0.453	-0.048	0.000
0.5	0.031	0.022	-0.621	-0.048	0.085	0.061	0.000	-0.596	-0.084	0.000
0.6	0.014	0.010	-0.763	-0.070	0.060	0.071	0.000	-0.708	-0.112	0.000
0.7	0.023	-0.023	-0.833	-0.143	0.007	0.059	0.000	-0.784	-0.121	0.000
0.8	0.070	-0.036	-0.815	-0.246	0.010	0.027	0.000	-0.821	-0.105	0.000
0.9	0.067	-0.010	-0.788	-0.258	0.101	-0.015	0.000	-0.813	-0.068	0.000
1.0	0.024	-0.013	-0.763	-0.150	0.123	-0.052	0.000	-0.755	-0.022	0.000
1.1	0.013	-0.040	-0.678	-0.040	0.070	-0.066	0.000	-0.642	0.014	0.000
1.2	0.016	-0.052	-0.523	0.020	0.022	-0.046	0.000	-0.486	0.024	0.000
1.3	0.016	-0.043	-0.352	0.038	0.000	0.008	0.000	-0.324	0.005	0.000
1.4	0.015	-0.023	-0.192	0.028	0.003	0.073	0.000	-0.191	-0.031	0.000
1.5	0.015	0.000	-0.074	0.001	0.021	0.119	0.000	-0.105	-0.066	0.000
1.6	0.013	0.024	- 0.020	-0.031	0.048	0.124	0.000	-0.068	-0.084	0.000
1.7	0.008	0.047	- 0.034	-0.054	0.076	0.085	0.000	-0.081	-0.076	0.000
1.8	0.001	0.068	- 0.115	-0.061	0.095	0.016	0.000	-0.148	-0.047	0.000
1.9	0.002	0.079	- 0.247	-0.053	0.097	-0.052	0.000	-0.274	-0.010	0.000
2.0	0.012	0.071	- 0.407	-0.030	0.074	0.088	0.000	-0.440	0.015	0.000

1) При ускорении бака $w = 5.0$ м $\cdot$ с$^{-2}$ рассчитанные обобщенные координаты $\beta_i(t)$ и $p_i(t), r_i(t)$ как функции времени имеют колебательный характер.
2) Доминирующими являются колебания по модам, соответствующим обобщенным координатам $\beta_3(t)$ и $r_1(t)$, но, в отличие от случая $w = 0.5$ м $\cdot$ с$^{-2}$, расчетные значения этих функций по большей части не совпадают. Полная оценка средней квадратической ошибки значений этих функций, рассчитанных по гамильтоновой и 5-модовой моделям, $\sigma_i \simeq 55\%$, а уточненная – $\tilde{\sigma}_i \simeq 15\%$.
3) Амплитудные значения функции $\beta_4(t)$ и соответствующей ей функции $p_2(t)$ меньше амплитудных значений доминирующих функций $\beta_3(t)$ и $r_1(t)$, но соизмеримы с ними (0.258 против 0.833 по гамильтоновой модели и 0.121 против 0.821 по 5-модовой модели). В этом случае сделанные в 5-модовой модели априорные допущения относительно порядков величин $r_1(t)$ и $p_2(t)$ выполняются грубо. Полная оценка средней квадратической ошибки значений функций $\beta_4(t)$ и $p_2(t)$, рассчитанных соответственно по гамильтоновой и 5-модовой моделям, $\sigma_i \simeq 146\%$, а уточненная – $\tilde{\sigma}_i \simeq 80\%$.
4) В паре функций $\beta_2(t)$ и $p_1(t)$ первая близка к нулю, а вторая тождественно равна нулю (с точностью до 3-го десятичного знака). Полная и уточненная средние квадратические ошибки их определения по гамильтоновой и 5-модовой моделям $\sigma_i = \tilde{\sigma}_i \simeq 95\%$.
5) В паре функций $\beta_1(t)$ и $p_0(t)$ обе близки к нулю, но их значения в точках t_k распределены так, что мера их близости оказывается весьма далекой от нуля: $\sigma_i \simeq 789\%$, $\tilde{\sigma}_i \simeq 431\%$. 7) Оценки периодов колебаний в гамильтоновом и 5-модовом случаях равны и составляют 1.6 с. Отношение амплитуда/радиус в гамильтоновом случае равно 0.833, а в 5-модовом – 0.821 (оценки получены по доминирующим модам).

Таким образом, на основании приведенных данных можно утверждать, что при ускорении бака $w = 5.0$ м $\cdot$ с$^{-2}$ как в гамильтоновом, так и в 5-модовом случаях доминирующей оказывается мода, соответствующая обобщенным координатам β_3 и r_1, причем расчеты амплитудных значений этих координат по обеим моделям разнятся на 1%, а полная и уточненная средние оценки меры их близости составляют соответственно 55 и 15%. Расчетные амплитудные значения остальных обобщенных координат по обеим моде-

Табл. 5. Квадраты относительных погрешностей δ_k^i, средние квадратические ошибки σ_i и $\bar{\sigma}_i$. Ускорение бака $w = 5.0\text{мс}^{-2}$.

t, c	$(\delta_k^1)^2$	$(\delta_k^2)^2$	$(\delta_k^3)^2$	$(\delta_k^4)^2$	$(\delta_k^5)^2$
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	1.0000	1.0000	0.0000	1.0000	1.0000
0.3	0.0039	1.0000	0.0000	0.0123	1.0000
0.4	0.0625	1.0000	0.0001	0.1111	1.0000
0.5	0.9364	1.0000	0.0016	0.5625	1.0000
0.6	16.5763	1.0000	0.0052	0.3600	1.0000
0.7	2.4499	1.0000	0.0035	0.0237	1.0000
0.8	0.3774	1.0000	0.0001	0.1686	1.0000
0.9	1.4979	1.0000	0.0011	0.5423	1.0000
1.0	10.0280	1.0000	0.0001	0.7281	1.0000
1.1	36.9287	1.0000	0.0028	1.8225	1.0000
1.2	14.0625	1.0000	0.0050	0.0400	1.0000
1.3	0.2500	1.0000	0.0063	0.7541	0.0000
1.4	14.9514	1.0000	0.0000	4.4399	1.0000
1.5	48.0706	1.0000	0.1755	4489.0000	1.0000
1.6	72.9060	1.0000	4.0000	2.9231	1.0000
1.7	92.6406	1.0000	1.9110	0.1660	1.0000
1.8	225.0000	1.0000	0.0824	0.0527	1.0000
1.9	729.0000	1.0000	0.0119	0.6582	1.0000
2.0	40.1107	1.0000	0.0066	2.2500	1.0000
σ_i	7.89	0.95	0.55	14.65	0.93
$\bar{\sigma}_i$	4.31	0.95	0.15	0.80	0.93

лям в 3 – 12 раз меньше амплитудного значения доминирующей координаты, что уже хуже согласуется с априорными предположениями о порядках малости координат β_i, чем в случае ускорения $w = 0.5\ \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$.

6) В паре функций $\beta_5(t)$ и $r_2(t)$ обе также близки к нулю, причем $r_2(t)$ тождественно равна нулю. Для них полная и уточненная средние квадратические ошибки совпадают и равны $\sigma_i = \tilde{\sigma}_i \simeq 93\%$.

3.2. Оценки близости расчетных ординат свободной поверхности жидкости в контрольной точке.

Априорные условия о порядках малости координат β_i в случае ускорения $w = 5.0\ \text{м}\cdot\text{с}^{-2}$ хоть и незначительно, но нарушаются. В связи с этим рассмотрим суммарные характеристики обобщенных координат β_i в виде ординат свободной поверхности жидкости и оценим одну из таких ординат по гамильтоновой и 5-модовой моделям в некоторой контрольной точке. В качестве контрольной выберем точку с координатами

$$\xi = R, \quad \eta = \frac{3}{2}\pi.$$

Смещения свободной поверхности в этой точке представляют также практический интерес, поскольку она расположена в тыльной (по ходу движения) части бака и, следовательно, в этой точке смещения свободной поверхности при ускорениях бака должны быть наибольшими.

Подставив значения координат (ξ, η) контрольной точки в формулу (31) и воспользовавшись табл. 1, получим выражения ординат свободной поверхности через обобщенные координаты, а именно: для гамильтоновой модели –

$$z_* = h_0 + \beta_1 - \beta_3 - \beta_4,$$

для 5-модовой модели –

$$x_* = p_0 - r_1 - p_2.$$

(В корабельных осях вертикальная координата обозначается через z, а в самолетных – через x.)

Табл. 6. Расчетные ординаты свободной поверхности жидкости в контрольной точке (в м), относительные погрешности δ_k и их квадраты. Ускорение бака w=5.0 мс$^{-2}$.

t, c	$z_* - h_0$	x_*	δ_k	$(\delta_k)^2$
0.0	0.000	0.000	0.0000	0.0000
0.1	0.038	0.038	0.0000	0.0000
0.2	0.151	0.143	0.0530	0.0028
0.3	0.328	0.330	0.0061	0.0000
0.4	0.526	0.541	0.0285	0.0008
0.5	0.700	0.741	0.0586	0.0034
0.6	0.847	0.891	0.0543	0.0029
0.7	0.999	0.964	0.0350	0.0012
0.8	1.131	0.953	0.1574	0.0248
0.9	1.113	0.896	0.1950	0.0380
1.0	0.937	0.725	0.2263	0.0512
1.1	0.731	0.562	0.2312	0.0535
1.2	0.519	0.416	0.1985	0.0394
1.3	0.330	0.327	0.0091	0.0001
1.4	0.179	0.295	0.6480	0.4199
1.5	0.088	0.290	2.2955	5.2693
1.6	0.064	0.276	3.3125	10.9727
1.7	0.096	0.242	1.5208	2.3128
1.8	0.177	0.211	0.1921	0.0369
1.9	0.302	0.232	0.2318	0.0537
2.0	0.449	0.513	0.1425	0.0203

Из этих выражений видно, что ординаты свободной поверхности в выбранной контрольной точке зависят как раз от тех обобщенных координат, которые наиболее уклоняются от нуля (т. е. от доминирующей обобщенной координаты β_3 и соизмеримых с ней β_1, β_4).

Расчеты ординат свободной поверхности в контрольной точке по приведенным формулам выполнены с использованием данных табл. 4 и представлены в табл. 6.

Поскольку сравниваются динамические отклонения свободной поверхности от горизонтальной плоскости невозмущенной свободной поверхности, для гамильтоновой модели в табл. 6 выписаны значения разностей $z_* - h_0$. В этой же таблице приведены относительные погрешности

$$\delta_k = \frac{(z_*(t_k) - h_0) - x_*(t_k)}{z_*(t_k) - h_0}, \quad k = 0, 1, \ldots, 21,$$

и их квадраты.

Замечание. Для рассматриваемого цилиндра высотой l=2 м данные табл. 6 имеют физический смысл до момента t=0.4 с, поскольку приблизительно в этот момент происходит контакт жидкости с крышкой, после чего модели перестают работать. Остальные данные можно интерпретировать для цилиндра высотой $l > 2$ м при условии отсутствия контакта жидкости с крышкой (при этом условии уравнения движения жидкости не зависят от высоты l бака и, следовательно, можно рассматривать баки большей высоты).

Как и в случае анализа расчетных обобщенных координат, для ординат свободной поверхности оценивалась средняя взвешенная квадратическая ошибка σ, причем в этом случае использовалась формула

$$\sigma^2 = \frac{1}{21}\sum_{k=0}^{20}(\delta_k)^2.$$

При анализе относительных погрешностей и средних квадратических ошибок точными условно считаются расчетные значения $x_*(t_k)$, полученные по 5-модовой модели, так что рассматриваются отклонения расчетов по гамильтоновой модели от расчетов по 5-модовой модели.

Полная средняя квадратическая ошибка расчетов ординат по гамильтоновой модели относительно расчетов по 5-модовой модели, вычисленная по последнему столбцу табл. 6, составляет

$$\sigma = 0.9587 \simeq 96\%,$$

а уточненная, т.е. при отброшенных аномально больших значениях относительных погрешностей 5.2693, 10.9727 и при $m + 1 = 19$, –

$$\tilde{\sigma} = 0.4014 \simeq 40\%.$$

Таким образом, как следует из приведенных данных, расчеты амплитудных значений (1.131 м и 0.964 м) ординат свободной поверхности (в контрольной точке) по обеим моделям разнятся на $\simeq$ 15%, а полная и уточненная средние оценки меры их близости составляют соответственно 96 и 40%. Эти оценки хуже соответстующих оценок для доминирующей обобщенной координаты β_3, что объясняется возросшим вкладом остальных обобщенных координат в суммарную величину ординат свободной поверхности и лишь грубым выполнением при $w = 5.0$ м $\cdot$ с$^{-2}$ априорных условий о величинах порядков различных обобщенных координат.

Итак, в рассмотренных случаях расчеты по гамильтоновой и 5-модовой моделям координат $\beta_i(t)$ и ординат $\zeta(\xi, \eta, t)$ свободной поверхности в среднем отличаются на 40%. Для близких к нулю значений этих параметров расхождения в расчетах могут превышать 90%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненный анализ двух рассмотренных вариационных моделей колебаний жидкости в поступательно перемещающемся вертикальном цилиндре позволяет сделать следующие выводы (имеются в виду только 5-модовые аппроксимации свободной поверхности и потенциала скоростей жидкости).

1) Гамильтонова модель представляет собой нелинейную систему десяти обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений 1-го порядка, а 5-модовая – нелинейную систему пяти обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

2) Уравнения гамильтоновой модели являются точными, а 5-модовой – приближенными (3-го порядка точности).

3) В обоих случаях системы уравнений являются квазилинейными и не разрешены относительно старших производных. В гамильтоновой модели коэффициенты при этих производных и остальные интегральные члены представляют собой двукратные интегралы по сечению цилиндра от функций, параметрически зависящих от обобщенных координат β_i. В 5-модовой модели этим интегральным членам соответствуют их приближения кратными рядами Тейлора по β_i.

4) Уравнения 5-модовой модели выводятся из уравнений гамильтоновой модели путем исключения квазискоростей $R_k(t)$ из группы уравнений, соответствующих обобщенным координатам β_i.

5) Построена 5-модовая модель, учитывающая любые поступательные (горизонтальные, вертикальные или комбинированные) движения бака и обобщающая известные 5-модовые модели нелинейных свободных колебаний жидкости в неподвижном баке и нелинейных вынужденных колебаний жидкости в горизонтально перемещающемся баке.

6) В основе 5-модовой модели, в отличие от гамильтоновой, лежат априорные условия на порядки малости обобщенных координат β_i и их производных по времени.

7) Отмечены случаи, когда получаемые расчетные данные противоречат упомянутым априорным условиям. Это имеет место в задаче о колебаниях жидкости в равномерно ускоряемом из состояния покоя цилиндрическом баке при достаточно больших величинах ускорения. Для рассмотренных в работе габаритов и уровня заполнения бака рассогласование априорных условий и расчетных значений обобщенных координат β_i отмечено при ускорении $w = 5.0$ м $\cdot$ с$^{-2}$, соизмеримом с g. При малом же по сравнению с g ускорении $w = 0.5$м $\cdot$ с$^{-2}$ расчетные значения β_i хорошо согласуются с априорными условиями.

8) В случае $w = 5.0$ м$\cdot$с$^{-2}$ расхождения в результатах расчетов по двум моделям ординат свободной поверхности жидкости как функций времени могут составлять в среднем 40%, а в отдельные моменты времени превышать 90% (близость расчетных данных оценивалась с помощью величин средней взвешенной квадратической ошибки и относительных погрешностей).

9) При компьютерной реализации расчеты по 5-модовой модели выполнялись несколько быстрее, чем по гамильтоновой.

Заметим, наконец, что гамильтонова модель является более строгой, и потому можно ожидать более точного совпадения с экспериментом полученных на ее основе расчетных данных. Однако в настоящее время почти отсутствуют должным образом представленные и пригодные для сопоставлений с расчетами экспериментальные данные по динамике свободной поверхности жидкости. Также имеют практический интерес оценки близости моделей по другим критериям, в частности, по точности расчетов действующих на бак гидродинамических сил или по точности приближения свободной поверхности в целом (т.е. как функции пространственных координат). Остался не исследованным вопрос о близости моделей в задаче об установившихся колебаниях жидкости на резонансных режимах, где 5-модовая модель дает удовлетворительное качественное и (по силам) количественное совпадение с экспериментом. Все эти вопросы требуют отдельного рассмотрения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке по проекту НИП N 0102U000917.

1. Вариационные методы в задачах о колебаниях жидкости и тела с жидкостью – М.: ВЦ АН СССР, 1962. – 247 с.

2. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость.– М.: Наука, 1965.– 439 с.

3. *Луковский И. А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость.– К.: Наук. думка, 1990.– 295 с.

4. *Miles J.W.* Nonlinear surface waves in closed basins // J.Fluid Mech.– 1976.– **75**, part 3.– P. 419–448.

5. *Луковский И. А.* Вариационный метод в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью //Колебания упругих конструкций с жидкостью. – М.: ЦНТИ "Волна", 1976. – С. 260–264.

6. *Луковский И. А., Пилькевич А. М.* Исследование нелинейных колебаний жидкости в соосных круговых цилиндрах вариационным методом // Краевые задачи математической физики.– К.– 1978.– С. 79–91.

7. *Луковский И. А., Пилькевич А. М.* Определение присоединенных моментов инерции ограниченного объема жидкости вариационным методом и методом теории возмущений// Динамика упругих и твердых тел, взаимодествующих с жидкостью: Тр. V семинара. – Томск, 1984. – С. 102–112.

8. *Луковский И. А., Пилькевич А. М.* Нелинейные уравнения пространственных движений твердого тела с цилиндрической полостью, содержащей жидкость. – К., 1984. – 40 с.– (Препр./ АН УССР. Ин-т матемматики; 84.18)

9. *Луковский И. А., Пилькевич А. М.* Таблицы гидродинамических коэффициентов нелинейных уравнений пространственных движений твердого тела с цилиндрической полостью, содержащей жидкость. – К., 1984. – 46 с. – (Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 84.39)

10. *Faltinsen O.M., Timokha A.N.* Adaptive multimodal approach to nonlinear sloshing in a rectangular tank // J.Fluid Mech.– 2001.– **432**.– P. 167–200.

11. *Gavrilyuk I.P., Lukovsky I.A., Timokha A.N.* A multimodal approach to nonlinear sloshing in a circular cylindrical tank // Hybrid Methods in Engineering.– 2000.– **2**,No 4.– P. 463–483.

12. *Лимарченко О. С., Ясинский В. В.* Нелинейная динамика конструкций с жидкостью.– Киев: НТТУ "КПІ", 1997.– 338 с.

13. *Луковский И. А., Лимарченко О. С., Пилькевич А. М.* Численно-аналитические методы в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости // Прикладная механика.– 1988.– **24, N 1**.– С. 102–107.

14. *Золотенко Г. Ф.* Компьютерное моделирование на основе уравнений типа Гамильтона нелинейных колебаний жидкости в прямоугольном баке // Прикладна гідромеханіка.– 2002.– **4, N 1**.– С. 18–33.

15. *Золотенко Г. Ф.* Компьютерное моделирование на основе уравнений типа Гамильтона нелинейных колебаний жидкости в цилиндрическом баке // Прикладна гідромеханіка.– 2003.– **5(77), N3** .– С. 19–40.

16. *Лурье А. И.* Аналитическая механика.– М.: ФМ, 1961.– 824 с.