

УДК 533.6.013.42

# СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ С УПРУГИМИ МЕМБРАНАМИ НА СВОБОДНОЙ И ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТЯХ

Ю. Н. КОНОНОВ, Е. А. ТАТАРЕНКО

Донецкий национальный университет

Получено 21.12.2002  $\diamond$  Пересмотрено 01.06.2003

Построено аналитическое решение плоской задачи гидроупругости, описывающей взаимосвязанные свободные колебания двухслойной идеальной несжимаемой жидкости в прямоугольном канале и плоских мембран, расположенных на свободной и внутренней поверхностях жидкости. Получено условие устойчивости связанных колебаний жидкостей и мембран. Рассмотрены случаи, когда мембрана находится только на свободной или внутренней поверхности двухслойной жидкости. Проведены численные исследования собственных частот. На основе метода Бубнова – Галеркина построено приближенное решение рассматриваемой задачи. В результате сравнения обоих подходов отмечается эффективность аналитического решения задачи.

Побудовано аналітичний розв'язок плоскої задачі гідропругості, яка описує взаємозв'язані вільні коливання двохшарової ідеальної нестисної рідини в прямокутному каналі та плоских мембран, які розташовані на вільній та внутрішній поверхнях рідини. Одержана умова стійкості пов'язаних коливань рідин та мембран. Розглянуто випадки, коли мембрана знаходиться тільки на вільній або внутрішній поверхні рідини. Проведені чисельні дослідження власних частот. На основі метода Бубнова – Гальоркіна побудовано наближене рішення задачі, що розглядається. В результаті порівняння обох підходів відзначається ефективність аналітичного розв'язку задачі.

The analytical solution for two-dimensional problem of hydroelasticity, describing the interconnected free oscillations of two-layer perfect incompressible liquid in the rectangular channel and planar membranes, located on free and interior surfaces of liquid is constructed. Stability condition for interconnected oscillations of liquid and membranes is obtained. The cases of membranes location only on free and interior surfaces of liquid are considered. Numerical research of eigenvalues is carried out. On the basis of Bubnov – Galerkin method the approximate solution of considered problem is obtained. Comparison of two approaches shows the effectiveness of analytical solution for the given problem.

## ВВЕДЕНИЕ

Создание резервуаров больших емкостей для хранения жидкости в сейсмоопасных районах и для транспортировки жидких грузов требует тщательного анализа возможного резонансного возбуждения волновых движений жидкости. Одним из средств ограничения подвижности жидкости могут быть мембраны или пластинки, закрывающие свободную поверхность однородной жидкости [1–3].

Механические, тепловые и другие воздействия, как правило, вызывают разделение жидкости на слои разной плотности, что приводит к образованию внутренних волн. В этой связи возникает задача о влиянии стратификации на собственные колебания гидроупругой системы. Для ограничения подвижности внутренних поверхностей могут также использоваться упругие мембраны, разделяющие многослойную жидкость [4, 5].

В работах [4, 5] выведены частотные уравнения собственных колебаний двухслойной и многослойной жидкостей в прямом круговом цилиндре с мембранами, расположенными на свободной и внутренних поверхностях многослойной жидкости. В статье [2] получено аналитическое и приближен-

ное решение плоской гидроупругой задачи о свободных колебаниях жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности. Данная работа посвящена обобщению результатов этой статьи.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим прямоугольный канал шириной  $b$ , заполненный двухслойной идеальной и несжимаемой жидкостью с плотностями  $\rho_n$  до глубин  $h_n$  ( $n = 1, 2$ ). На свободной поверхности верхней жидкости ( $n = 1$ ) и на поверхности раздела двухслойной жидкости равномерно натянуты гибкие инерционные мембраны с растягивающими усилиями в срединной поверхности  $T_n$ , массовой плотностью материала  $\rho_{0n}$ , толщиной  $\delta_{0n}$ . Края мембран жестко закреплены на стенках канала. Движение жидкостей и мембран будем рассматривать в плоской постановке. Систему координат  $Oxyz$  расположим так, чтобы ось  $Ox$  была направлена вдоль канала, а ось  $Oz$  совпадала с осью симметрии его поперечного сечения и направлена вверх. Начало системы координат  $Oxyz$  поместим в плоскости внутренней мембраны (рис. 1). Задачу будем решать в рамках линейной теории, а движения жид-

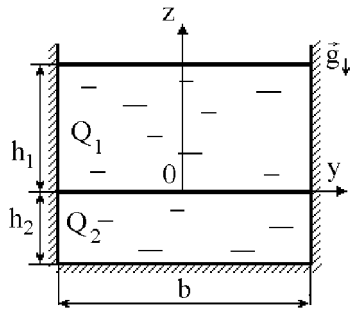


Рис. 1. Механическая система в состоянии покоя

костей считать потенциальными.

При сделанных предположениях мембраны будут нести поперечную нагрузку со стороны жидкостей, не изменяющуюся по длине канала, что позволяет описать движение мембран в поле силы тяжести следующим уравнением:

$$\rho_{0n}\delta_{0n}\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} - T_n\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} = P_n(t, y) - P_{n-1}(t, y) \quad (1)$$

при граничных условиях

$$w_n\left(t, \pm\frac{b}{2}\right) = 0. \quad (2)$$

Поперечная нагрузка  $P_n(t, y)$ , которую испытывает мембрана со стороны жидкости, может быть определена с помощью линеаризованного интеграла Лагранжа – Коши по формуле

$$P_n = -\rho_n \left[ \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial t^2} \Big|_{z=z_n} + g(w_n + z_n) + \chi_n \right]. \quad (3)$$

Здесь  $\Phi_n(t, y, z)$  – потенциал смещений  $n$ -й жидкости;  $w_n(t, y)$  – нормальный прогиб  $n$ -й мембраны;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $\chi_n(t)$  – произвольная функция времени;  $z_1 = h_1, z_2 = 0; \rho_0 = 0, P_0 = 0$ .

Потенциал смещений жидкости  $\Phi_n(t, y, z)$  определяется из решения краевой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial z^2} &= 0, \quad (y, z) \in Q_n, \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} \Big|_{y=\pm b/2} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=-h_2} = 0, \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} \Big|_{z=z_n} &= w_n, \quad \int_{-b/2}^{b/2} w_n(t, y) dy = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $Q_n$  – область поперечного сечения канала, занятая  $n$ -й жидкостью.

Для исследования собственных колебаний механической системы представим неизвестные функции в виде

$$\Phi_n = \phi_n(y, z)e^{i\omega t}, \quad w_n = W_n(y)e^{i\omega t}, \quad (5)$$

$$\chi_n = \hat{C}_n e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1},$$

которые подставим в соотношения (1)-(4) и перейдем к безразмерным величинам, выбрав в качестве характерного линейного размера ширину канала  $b$ . В результате получим граничную задачу на собственные значения:

$$\begin{aligned} W_n'' - \gamma_n^2 W_n &= c_n - \lambda^2 d_n \left[ \phi_n(y, z_n) - \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} \phi_{n-1}(y, z_n) \right], \\ W_n\left(\pm\frac{1}{2}\right) &= 0, \quad \int_{-1/2}^{1/2} W_n(y) dy = 0, \\ \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial z^2} &= 0, \quad (y, z) \in Q_n, \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \Big|_{y=\pm 1/2} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \Big|_{z=-h_2} = 0, \quad \frac{\partial \phi_n}{\partial z} \Big|_{z=z_n} = W_n, \end{aligned} \quad (6)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \gamma_n^2 &= d_n \left( 1 - \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} \right) - \lambda^2 a_n, \\ \lambda^2 &= \frac{\omega^2 b}{g}, \quad a_n = \frac{g\rho_{0n}\delta_{0n}b}{T_n}, \quad d_n = \frac{\rho_n g b^2}{T_n}, \end{aligned}$$

$c_n$  – произвольная постоянная. Будем предполагать, что выполняется неравенство

$$\lambda^2 < \frac{d_n}{a_n} \left( 1 - \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} \right). \quad (7)$$

## 2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

После применения метода разделения переменных составляющие потенциала смещений жидкости  $\phi_n$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i_{1k} \operatorname{ch} \pi k z - i_{2k} \operatorname{ch} \pi k (z - h_1)}{\pi k \operatorname{sh} \pi k h_1} Y_k, \\ \phi_2 &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i_{2k} \operatorname{ch} \pi k (z + h_2)}{\pi k \operatorname{sh} \pi k h_2} Y_k. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$Y_k = \cos \pi k \left( y + \frac{1}{2} \right), \quad i_{nk} = \int_{-1/2}^{1/2} W_n Y_k dy.$$

С учетом соотношений (8) исходную задачу (6) сведем к краевой задаче на собственные значения для интегро-дифференциального уравнения относительно составляющей прогиба мембраны:

$$W_n'' - \gamma_n^2 W_n = c_n - \sum_{k=1}^{\infty} B_{nk} Y_k, \quad (9)$$

$$W_n(\pm \frac{1}{2}) = 0, \quad \int_{-1/2}^{1/2} W_n dy = 0,$$

где

$$B_{nk} = \frac{2\lambda^2 d_n}{\pi k} (u_{nk} i_{nk} - b_{nk} i_{\tilde{n}k}), \quad \tilde{n} = n - (-1)^n,$$

$$u_{nk} = \text{cth } \pi k h_n + \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} \text{cth } \pi k h_{n-1},$$

$$b_{1k} = \frac{1}{\text{sh } \pi k h_1}, \quad b_{2k} = \rho_{12} b_{1k}, \quad \rho_{12} = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Частное решение уравнения (9) будем искать в форме, отвечающей его правой части:

$$W_n^* = W_{0n} + \sum_{k=1}^{\infty} W_{nk} Y_k. \quad (10)$$

Подставляя выражение (10) в уравнение (9), имеем

$$W_{nk} = B_{nk} / (\gamma_n^2 + \pi^2 k^2), \quad W_{0n} = -c_n / \gamma_n^2. \quad (11)$$

Общее решение задачи (9) представим в виде

$$W_n = A_n \text{sh } \gamma_n y + B_n \text{ch } \gamma_n y + W_n^*(y). \quad (12)$$

Здесь  $A_n, B_n$  - произвольные постоянные.

Выберем постоянную  $W_{0n}$  из условия несжимаемости  $n$ -й жидкости, и с учетом соотношения (11) представим функцию  $W_n(y)$  в следующем виде:

$$W_n(y) = A_n \left( \text{sh } \gamma_n y + \sum_{k=1}^{\infty} A_{\tilde{n}\tilde{n}} I_{nk} Y_k \right) +$$

$$+ B_n \left( \text{ch } \gamma_n y - \frac{2}{\gamma_n} \text{sh } \frac{\gamma_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{\tilde{n}\tilde{n}} \tilde{I}_{nk} Y_k \right) -$$

$$- A_{\tilde{n}} \sum_{k=1}^{\infty} A_{n\tilde{n}} I_{\tilde{n}k} Y_k - B_{\tilde{n}} \sum_{k=1}^{\infty} A_{n\tilde{n}} \tilde{I}_{\tilde{n}k} Y_k, \quad (13)$$

где

$$A_{ii} = 2 \left( \frac{a_{ii}}{\Delta_k} - 1 \right), \quad A_{ij} = 2 \frac{a_{ij}}{\Delta_k}, \quad M_{nk} = \frac{\lambda^2 d_n}{\pi k (\gamma_n^2 + \pi^2 k^2)},$$

$$a_{ii} = 1 - M_{ik} u_{ik}, \quad a_{ij} = M_{ik} b_{ik}, \quad (i, j = \{n, \tilde{n}\}),$$

$$\Delta_k = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

$$I_{nk} = \int_{-1/2}^{1/2} \text{sh } (\gamma_n y) Y_k dy, \quad \tilde{I}_{nk} = \int_{-1/2}^{1/2} \text{ch } (\gamma_n y) Y_k dy.$$

Для удобства записи здесь и далее третий индекс  $k$  будем опускать. Постоянные  $A_n$  и  $B_n$  определим из условий жесткого закрепления мембран. При этом получим линейную алгебраическую систему

$$A_n \left( \text{sh } \frac{\gamma_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{\tilde{n}\tilde{n}} I_{nk} (-1)^k \right) +$$

$$+ B_n \left( \text{ch } \frac{\gamma_n}{2} - \frac{2}{\gamma_n} \text{sh } \frac{\gamma_n}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{\tilde{n}\tilde{n}} \tilde{I}_{nk} (-1)^k \right) -$$

$$- A_{\tilde{n}} \sum_{k=1}^{\infty} A_{n\tilde{n}} I_{\tilde{n}k} (-1)^k - B_{\tilde{n}} \sum_{k=1}^{\infty} A_{n\tilde{n}} \tilde{I}_{\tilde{n}k} (-1)^k = 0,$$

$$A_n \left( -\text{sh } \frac{\gamma_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{\tilde{n}\tilde{n}} I_{nk} \right) +$$

$$+ B_n \left( \text{ch } \frac{\gamma_1}{2} - \frac{2}{\gamma_1} \text{sh } \frac{\gamma_n}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{\tilde{n}\tilde{n}} \tilde{I}_{nk} \right) -$$

$$- A_{\tilde{n}} \sum_{k=1}^{\infty} A_{n\tilde{n}} I_{\tilde{n}k} - B_{\tilde{n}} \sum_{k=1}^{\infty} A_{n\tilde{n}} \tilde{I}_{\tilde{n}k} = 0. \quad (14)$$

Учитывая значения определенных интегралов  $I_{nk}, \tilde{I}_{nk}$ , можно показать, что система уравнений (14) разделяется на две независимые системы относительно  $A_1, A_2$  и относительно  $B_1, B_2$ :

$$A_n \left( \text{sh } \frac{\gamma_n}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} A_{\tilde{n}\tilde{n}} I_{nk} \right) + A_{\tilde{n}} \sum_{k=1}^{\infty} A_{n\tilde{n}} \tilde{I}_{nk} = 0,$$

$$B_n \left( \text{ch } \frac{\gamma_n}{2} - \frac{2}{\gamma_n} \text{sh } \frac{\gamma_n}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{\tilde{n}\tilde{n}} \tilde{I}_{nk} \right) -$$

$$- B_{\tilde{n}} \sum_{k=1}^{\infty} A_{n\tilde{n}} \tilde{I}_{\tilde{n}k} = 0. \quad (15)$$

Условия существования нетривиальных решений систем (15) приводят к двум характеристическим уравнениям относительно параметра  $\lambda$ :

$$\prod_{n=1}^2 \left( \frac{1}{2\gamma_n} \text{cth } \frac{\gamma_n}{2} - \frac{1}{\gamma_n^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{\tilde{n}\tilde{n}}}{\gamma_n^2 + \alpha_k^2} \right) -$$

$$- \prod_{n=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{\tilde{n}\tilde{n}}}{\gamma_n^2 + \alpha_k^2} = 0,$$

$$\prod_{n=1}^2 \left( \frac{1}{2\gamma_n} \text{th } \frac{\gamma_n}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{\tilde{n}\tilde{n}}}{\gamma_n^2 + \beta_k^2} \right) -$$

$$- \prod_{n=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{\tilde{n}\tilde{n}}}{\gamma_n^2 + \beta_k^2} = 0. \quad (16)$$

Здесь  $\alpha_k = 2k\pi$ ,  $\beta_k = (2k - 1)\pi$ .

Если значения  $\lambda$  совпадают с корнями первого уравнения (16), то им соответствуют симметричные формы связанных колебаний мембран и жидкостей, а частоты для несимметричных форм колебаний определяются из второго уравнения (16). Уравнения (16) совпадают с соответствующими частотными уравнениями работы [2] при  $T_2 = \infty$  или  $T_1 = \infty$ ,  $\rho_1 = 0$ .

Отметим, что все приведенные выше соотношения справедливы при выполнении неравенства (7). Для тех случаев, когда это неравенство не выполняется все расчетные формулы можно легко получить с помощью замены, аналогичной [2]  $\gamma_n = i\tilde{\gamma}_n$ ,  $\tilde{\gamma}_n = \sqrt{d_n(1 - \rho_{n-1}/\rho_n) - \lambda^2 a_n}$  и соотношений  $\cos iz = \operatorname{ch} z$ ,  $i \sin iz = -\operatorname{sh} z$ .

Разложим гиперболические функции в уравнениях (16) на простейшие дроби так, как это сделано в [2], и представим эти уравнения в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{G_{1k} - \lambda^2 g_{1k}}{Z_k(\lambda^2)} - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{G_{2k} - \lambda^2 g_{2k}}{Z_k(\lambda^2)} - d_1 d_2 \lambda^4 \rho_{12} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{b_{1k}}{Z_k(\lambda^2)} \right)^2 = 0, \quad (17)$$

где

$$Z_k(\lambda^2) = A_k \lambda^4 - B_k \lambda^2 + C_k,$$

$$A_k = g_{1k} g_{2k} - d_1 d_2 b_{1k} b_{2k}, B_k = g_{1k} G_{2k} - G_{1k} g_{2k},$$

$$C_k = G_{1k} G_{2k}, g_{ik} = \alpha_k a_i + d_i u_{ik},$$

$$G_{ik} = \alpha_k \left[ d_i \left( 1 - \frac{\rho_{i-1}}{\rho_i} \right) + \alpha_k^2 \right].$$

Следует заметить, что частотное уравнение (17) имеет одинаковый вид как для симметричных, так и для несимметричных форм колебаний, не зависит от условия (7), что удобно для численных исследований. Однако корни этого уравнения находятся с большей погрешностью, чем корни (16).

В случае, если мембрана расположена только на свободной поверхности, частотные уравнения соответственно для симметричных и несимметричных форм колебаний представляются следующим образом:

$$\frac{1}{2\gamma_1} \operatorname{cth} \frac{\gamma_1}{2} - \frac{1}{\gamma_1^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{22}}{\gamma_1^2 + \alpha_k^2} = 0,$$

$$\frac{1}{2\gamma_1} \operatorname{th} \frac{\gamma_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{22}}{\gamma_1^2 + \beta_k^2} = 0 \quad (18)$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{\alpha_k(1 - \rho_{12}) - \lambda^2 u_{2k}}{Z_k(\lambda^2)} = 0. \quad (19)$$

Здесь

$$A_k = g_{1k} u_{2k} - d_1 \rho_{12} b_{1k}^2,$$

$$B_k = g_{1k} \alpha_k(1 - \rho_{12}) + G_{1k} u_{2k},$$

$$C_k = G_{1k} \alpha_k(1 - \rho_{12}).$$

Если же мембрана находится только на внутренней поверхности, соответствующие частотные уравнения представляются в виде

$$\frac{1}{2\gamma_2} \operatorname{cth} \frac{\gamma_2}{2} - \frac{1}{\gamma_2^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{11}}{\gamma_2^2 + \alpha_k^2} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{1}{2\gamma_2} \operatorname{th} \frac{\gamma_2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{11}}{\gamma_2^2 + \beta_k^2} = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{\alpha_k - \lambda^2 u_{1k}}{Z_k(\lambda^2)} = 0, \quad (21)$$

где

$$A_k = g_{2k} u_{1k} - d_2 \rho_{12} b_{1k}^2,$$

$$B_k = G_{2k} u_{1k} + g_{2k} \alpha_k, C_k = G_{2k} \alpha_k.$$

Уравнения (18) - (19) и (20) - (21) совпадают с точностью до обозначений с частотными уравнениями работы [2] соответственно при  $\rho_1 = \rho_2$  и  $\rho_1 = 0$ .

При  $h_1 = \infty$ , ( $b_{1n} = b_{2n} = 0$ ) из уравнений (16) и (17) следует

$$\prod_{n=1}^2 \left( \frac{1}{2\gamma_n} \operatorname{cth} \frac{\gamma_n}{2} - \frac{1}{\gamma_n^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{\tilde{n}\tilde{n}}}{\gamma_n^2 + \alpha_k^2} \right) = 0,$$

$$\prod_{n=1}^2 \left( \frac{1}{2\gamma_n} \operatorname{th} \frac{\gamma_n}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{\tilde{n}\tilde{n}}}{\gamma_n^2 + \beta_k^2} \right) = 0,$$

$$\prod_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{G_{ik} - \lambda^2 g_{ik}} = 0.$$

Таким образом, если верхний слой имеет бесконечную глубину, то уравнения (16) и (17) распадутся на два независимых уравнения.

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ

Необходимым условием устойчивости совместных колебаний мембран и жидкостей в прямоугольном канале является положительность всех

корней частотного уравнения (17). Для приближенного анализа этого уравнения ограничимся двумя членами в рядах (17) (поскольку учет одного члена не приводит к уравнению, содержащему неизвестную частоту). В этом случае имеем

$$b_0 \lambda^4 - b_1 \lambda^2 + b_2 = 0. \quad (22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} b_0 &= \alpha_1^2 A_2 + \alpha_2^2 A_1 + \alpha_1 \alpha_2 (g_{21} g_{12} + g_{22} g_{11} - \\ &\quad - d_1 d_2 (b_{11} b_{22} + b_{12} b_{21})), \\ b_1 &= (\alpha_1 g_{22} + \alpha_2 g_{21})(\alpha_1 G_{12} + \alpha_2 G_{11}) + \\ &\quad + (\alpha_1 g_{12} + \alpha_2 g_{11})(\alpha_1 G_{22} + \alpha_2 G_{21}), \\ b_2 &= (\alpha_1 G_{12} + \alpha_2 G_{11})(\alpha_1 G_{22} + \alpha_2 G_{21}). \end{aligned}$$

Корни уравнения (22) относительно  $\lambda^2$  будут положительны, если

$$b_i > 0, \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

так как нетрудно показать, что при любых параметрах механической системы  $b_0 > 0$ . Из неравенств (23) с учетом выражений для  $b_1$  и  $b_2$  получаем условие устойчивости собственных колебаний механической системы:

$$\alpha_1 G_{22} + \alpha_2 G_{21} > 0$$

или, что то же самое,

$$\rho_1 - \rho_2 < \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2} \frac{T_2}{gb^2} = R_1 \frac{T_2}{gb^2}, \quad R_1 \approx 49.348$$

при симметричных формах колебаний и

$$\rho_1 - \rho_2 < \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2} \frac{T_2}{gb^2} = R_2 \frac{T_2}{gb^2}, \quad R_2 \approx 98.696.$$

при несимметричных формах колебаний.

Полученное условие устойчивости не зависит от натяжения верхней мембраны, инерционности мембран и глубин заполнения. Следует отметить, что если нижняя жидкость тяжелее, чем верхняя ( $\rho_2 \geq \rho_1$ ), то полученное условие устойчивости всегда выполнено. В противном случае возможна потеря устойчивости.

Если учитывать три члена в рядах (17), то  $R_1 \approx 45.512$ ,  $R_2 \approx 92.116$ , если четыре – то  $R_1 \approx 43.844$ ,  $R_2 \approx 89.113$ . Следовательно, с достаточной для практики точностью можно считать

$$R_1 \approx 43.844, \quad R_2 \approx 89.113.$$

#### 4. ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА БУБНОВА – ГАЛЕРКИНА

Рассмотрим применение метода Бубнова – Галеркина к построению приближенного решения краевой задачи на собственные значения для интегро-дифференциального уравнения (9). Для случая несимметричных колебаний рассматриваемой механической системы аналогично статье [2] представим функции  $W_n(y)$  в виде отрезка ряда Фурье:

$$W_i = \sum_{i=1}^p W_i \sin 2\pi i \left( y + \frac{1}{2} \right). \quad (24)$$

Это представление удовлетворяет всем граничным условиям задачи (9). После его подстановки в уравнение (9) и применения процедуры метода Бубнова – Галеркина задача об определении частот и форм связанных колебаний мембран и жидкостей сводится к однородной системе линейных алгебраических уравнений, которую можно представить в следующем матричном виде:

$$\begin{cases} (A_1 - \lambda^2 B_1) \vec{W}_1 + \lambda^2 \tilde{B}_1 \vec{W}_2 = 0, \\ \lambda^2 \tilde{B}_2 \vec{W}_1 + (A_2 - \lambda^2 B_2) \vec{W}_2 = 0, \end{cases} \quad (25)$$

где  $\vec{W}_i = (W_{i1}, W_{i2}, \dots, W_{ip})^T$ . Элементы симметричных матриц  $A_i, B_i, \tilde{B}_i$  определяются по формулам

$$A_n = \left\| (d_n (1 - \rho_{n-1}/\rho_n) + 2\pi^2 i^2) \delta_{ij} \right\|,$$

$$B_n = \left\| a_n \delta_{ij} + \sum_{k=1}^p \frac{64ij d_n u_{ns}}{\pi^3 s (4i^2 - s^2)(4j^2 - s^2)} \right\|,$$

$$\tilde{B}_n = \left\| \sum_{k=1}^p \frac{64ij d_n b_{ns}}{\pi^3 s (4i^2 - s^2)(4j^2 - s^2)} \right\|,$$

$$i, j = \overline{1, p}, \quad s = 2k - 1, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Система (25) при  $T_2 = \infty$  или  $T_1 = \infty$ ,  $\rho_1 = 0$  совпадает с системой работы [2].

В случае, если механическая система содержит только  $n$ -ю мембрану, система линейных уравнений в методе Бубнова – Галеркина записывается следующим образом:

$$(A_n - \lambda^2 \tilde{B}_n(\lambda^2)) \vec{W}_n = 0,$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_n(\lambda^2) &= \left\| a_n \delta_{ij} + \sum_{k=1}^p \frac{64ij d_n}{\pi^3 s (4i^2 - s^2)(4j^2 - s^2)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( u_{ns} + \frac{\lambda^2 \rho_{12} b_{1s}^2}{(1 - \rho_{n-1}/\rho_n) \pi s - u_{ns} \lambda^2} \right) \right\|. \end{aligned} \quad (26)$$

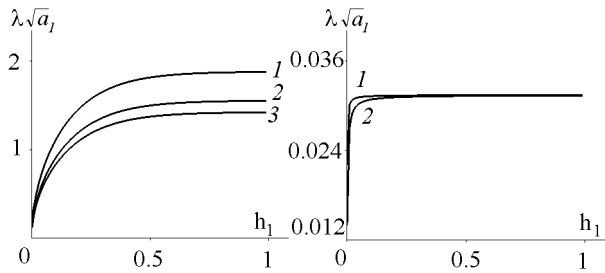


Рис. 2. Зависимость первой безразмерной собственной частоты от глубины верхней жидкости  $h_1$ :  
 а – первого набора,  
 б – второго набора,  
 для значений  $\varepsilon_1$ : 1- $\varepsilon_1=0.5$ , 2- $\varepsilon_1=0.2$ , 3- $\varepsilon_1=0$

Следует отметить, что линейные системы в методе Бубнова – Галеркина (26), а также частотные уравнения (19) – (21) для тех случаев, когда отсутствует одна из мембран, нельзя получить из общего случая с помощью предельного перехода, поскольку в соответствующих общих соотношениях (уравнения (16), (17) и система (25)) учтены граничные условия закрепления мембран.

## 5. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

Известно, что собственные колебания двухслойной жидкости имеют частотный спектр, состоящий из двух наборов частот [6]. Первый набор соответствует собственным колебаниям свободной, а второй – внутренней поверхности. В рассматриваемой задаче можно также выделить два набора собственных частот, соответствующих колебаниям мембран на свободной и внутренней поверхностях жидкости.

Пусть в однородной жидкости с упругой мембраной на свободной поверхности произошла двухслойная стратификация с сохранением массы жидкости:

$$\rho_1 = \rho(1 - \varepsilon_1), \quad \rho_2 = \rho(1 + \varepsilon_2),$$

$$\varepsilon_2 = h_1 \varepsilon_1 / h_2, \quad h_2 = h - h_1.$$

Здесь  $\rho$  – плотность однородной жидкости;  $h$  – глубина заполнения.

Для оценки влияния стратификации на частотный спектр были проведены численные исследования при  $h = 1.0$ ,  $a_1 = 0.1$ . Если  $\varepsilon_1 < 0.1$  и  $d_1 = 10$ , то с точностью до обозначений работы [2] первый набор частот близок к частотам колебаний однородной жидкости и при  $\varepsilon_1 = 0$  совпадает с ним. Из зависимости первой безразмерной собственной частоты первого (рис. 2, а) и второго

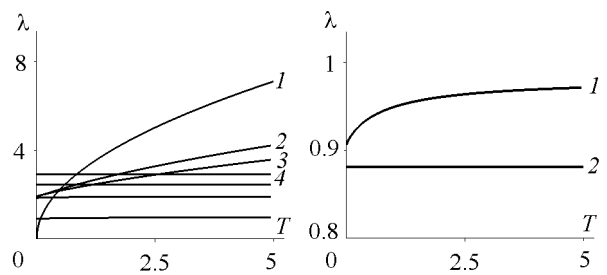


Рис. 3. Зависимость безразмерных собственных частот от натяжения мембраны  $T_1$

(рис. 2, б) наборов от глубины заполнения верхней жидкости  $h_1$  при  $h_2 = 0.001$  видно что с увеличением глубины заполнения верхней жидкости собственные частоты механической системы возрастают, а при  $h_1 > 0.5$  практически становятся постоянными.

На рис. 3, а кривые 1, 3 – графики первой собственной частоты колебаний закрепленной по контуру мембраны соответственно в вакууме и на свободной поверхности однородной жидкости. Если жидкость разделилась на два слоя со значениями параметров  $h_1 = 0.2$ ,  $\varepsilon_1 = 0.5$ , то первая частота собственных колебаний системы увеличивается (кривая 2) и, кроме того, появляется второй набор частот (кривые 4). На эти частоты натяжение мембран влияет несущественно, как это видно из рис. 3, б, где кривые 1, 2 – графики первой собственной частоты из второго набора соответственно при наличии и отсутствии мембраны на свободной поверхности.

Из приведенной в табл. 1 сходимости первых четырех собственных значений уравнения (18) в зависимости от числа членов  $p$  в рядах (18) при  $\varepsilon_1 = 0.1$ ,  $h_1 = 0.1$ ,  $h_2 = 0.9$ . Из табл. 1 следует, что при  $p = 2$  ошибка для первого собственного значения  $\lambda_1\sqrt{a_1}$  составляет 0.3%. При  $p = 4$  в значениях  $\lambda_i\sqrt{a_1}$ ,  $i = \overline{1, 4}$  получено до четырех верных значащих цифр, при  $p = 6$  – до пяти верных значащих цифр, а при  $p = 14$  их число возрастает до 6. При расчетах учитывалось условие (7). В табл. 2 приведены аналогичные данные, полученные с помощью уравнения (17). Здесь при  $p = 4$  ошибка для  $\lambda_i\sqrt{a_1}$  составляет 9 – 12%, при  $p = 6$  – 6...7%, при  $p = 8$  – 4...5%, а при  $p = 10$  – 3...4%.

Частоты, полученные с помощью метода Бубнова – Галеркина, внесены в табл. 3, из которой видно, что данный метод позволяет получить в первом приближении  $\lambda_1\sqrt{a_1}$  с ошибкой 6.62%. Реше-

Табл. 1. Частоты первого набора, вычисленные с помощью уравнения (18)

P	$\lambda_1\sqrt{a_1}$	$\lambda_2\sqrt{a_1}$	$\lambda_3\sqrt{a_1}$	$\lambda_4\sqrt{a_1}$
2	1.369718	4.216998	–	–
4	1.366277	4.006543	7.423590	11.873995
6	1.366069	4.000544	7.372909	11.251036
8	1.366033	3.999562	7.366208	11.222234
10	1.366023	3.999295	7.364474	11.215598
12	1.366019	3.999199	7.363864	11.213357
14	1.366017	3.999158	7.363605	11.212424

Табл. 2. Частоты первого набора, вычисленные с помощью уравнения (19)

P	$\lambda_1\sqrt{a_1}$	$\lambda_2\sqrt{a_1}$	$\lambda_3\sqrt{a_1}$	$\lambda_4\sqrt{a_1}$
2	1.665737	–	–	–
4	1.490161	4.421652	8.261339	–
6	1.444142	4.253551	7.860605	12.024867
8	1.422971	4.181336	7.711366	11.760429
10	1.410816	4.141044	7.631407	11.628318
12	1.402931	4.115332	7.581377	11.547898
14	1.397405	4.097501	7.547089	11.493591

Табл. 3. Частоты первого набора, вычисленные с помощью метода Бубнова–Галеркина

P	$\lambda_1\sqrt{a_1}$	$\lambda_2\sqrt{a_1}$	$\lambda_3\sqrt{a_1}$	$\lambda_4\sqrt{a_1}$
1	1.456441	–	–	–
2	1.374633	4.455916	–	–
4	1.367345	4.034112	7.487536	12.789980
6	1.366637	4.021700	7.398510	11.294058
8	1.366462	4.019134	7.384928	11.242897
10	1.366399	4.018277	7.380821	11.229668

ние, построенное по шести координатным функциям, дает погрешность менее 1%, по восьми координатным функциям – менее 0.3%, а решение, построенное по десяти координатным функциям дает 2 – 4 верных значащих цифр для первых четырех собственных значений.

Численные исследования частотных уравнений (16), (17) показали, что для получения качественной картины удобно использовать соотношения (17) при  $p \geq 4$ . Для уточнения частот целесообразно применять формулы (16) или метод Бубнова–Галеркина с более, чем четырьмя координатными функциями. К аналогичному выводу приходим при расчетах по формулам (19) и (21).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выведено частотное уравнение собственных колебаний двухслойной жидкости в прямоугольном

канале с упругими мембранами на свободной и внутренней поверхностях. Показано, что при большой глубине заполнения верхней жидкости это уравнение распадается на два независимых уравнения.

Рассмотрены случаи, когда мембрана может находиться только на свободной или внутренней поверхности двухслойной жидкости. Получено условие устойчивости совместных колебаний жидкостей и упругих мембран. Это условие определяется разностью плотностей, натяжением внутренней мембраны и шириной канала.

Показано, что частотный спектр состоит из двух наборов собственных частот, соответствующих колебаниям мембран на свободной и внутренней поверхностях. С увеличением натяжения мембраны, находящейся на свободной поверхности жидкости, существенно увеличиваются частоты колебаний первого набора и незначительно частоты колебаний второго набора (см. рис. 3). Аналогичная картина наблюдается и для мембраны, находящейся на внутренней поверхности. Увеличение натяжения мембран и уменьшение их массы приводят к увеличению собственных частот, что находится в соответствии с теоремой Рэлея.

Сравнивая затраты машинного времени на реализацию рассмотренных расчетных схем при использовании пакета Maple, приходим к выводу, аналогичному работе [2] – более предпочтительным алгоритмом является алгоритм, основанный на аналитическом решении задачи.

1. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
2. Троценко В. А. Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности // Прикладная механика. – 1995. – 31, N 8. – С. 74–80.
3. Самодаев В. Е. Влияние перегрузки на частоты колебаний жидкости в жестком цилиндрическом баке с мембраной на свободной поверхности // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. – Томск: ТГУ, 1972. – С. 180–186.
4. Кононов Ю. Н., Шевченко В. П. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими инерционными мембранами на свободной и внутренней поверхностях // Теоретическая и прикладная механика. – 2001. – N 32. – С. 158–163.
5. Кононов Ю. Н., Шевченко В. П. Свободные колебания многослойной стратифицированной жидкости, разделенной упругими мембранами // Теоретическая и прикладная механика. – 1999. – N 29. – С. 151–163.
6. Ламб Г. Гидродинамика. – М.: Гостехиздат, 1947. – 827 с.