

УДК 532.465

# ЧИСЛЕННЫЙ ЛАГРАНЖЕВЫЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПЯТЕН НЕФТИ

И. А. БРОВЧЕНКО, В. С. МАДЕРИЧ,

*Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев**Получено 20.02.2002*

Представлена численная модель распространения нефтяных пятен произвольной формы на поверхности воды, в которой учтены как процессы растекания пятен под действием сил плавучести и поверхностного натяжения, так и перенос ветром и течениями, а также горизонтальная турбулентная диффузия. Разработан численный лагранжевый метод, в котором учитывается взаимодействие частиц. Результаты модельных расчетов хорошо согласуются с автомодельными решениями задачи.

Представлена чисельна модель розповсюдження нафтових плям довільної форми на поверхні води, в якій враховані як процеси розтікання плям під впливом сил плавучості та поверхневого натягу, так і перенесення вітром та течіями, а також горизонтальна турбулентна дифузія. Розроблений чисельний лагранжевий метод, в якому враховується взаємодія часток. Результати модельних розрахунків добре узгоджуються з автомодельними розв'язками задачі.

The numerical model of spreading of oil slick with the arbitrary shape on the water surface is presented. The model describes processes of slick spreading under the buoyancy forces and surface tension, transport by the wind and currents as well as horizontal diffusion. The numerical Lagrangian method which takes into account particles interaction was developed. The results of simulations are in a good agreement with the self-similar solutions of the problem.

## ВВЕДЕНИЕ

Типичной особенностью распространения нефти и нефтепродуктов в море является формирование на начальном этапе разлива обширных пятен загрязнений в виде пленок на поверхности, которые растекаются под действием сил плавучести и поверхностного натяжения и перемещаются под действием ветра, течений и волнения. В дальнейшем масса нефти в поверхностном пятне уменьшается за счет испарения, растворения, эмульсификации и дисперсии капель нефти в воде под действием обрушения волн и турбулентности в приповерхностном слое моря. Задача еще более усложняется, когда нефть распространяется в береговой зоне или при наличии ледового покрова.

Несмотря на то, что первые работы, описывающие динамику распространения нефти, появились еще в конце 60-х годов [1, 2], проблема моделирования нефтяных разливов остается актуальной и сегодня. Все еще далек от решения старый вопрос, поставленный в 60-х годах: как ветер, течения и условия утечки нефти влияют на распространение нефтяного slicka. Модели нефтяных slickов (см. напр. [3, 4]) в основном используют классические автомодельные зависимости для мгновенного разлива в покоящемся море, полученные в работах [1, 2, 5–8] для инерционной, вязкой стадии и стадии поверхностного натяжения. Однако эти зависимо-

сти не описывают наблюдаемое несимметричное растекание нефтяных пятен в поле ветра и течений.

В настоящей работе предложена новая численная лагранжева модель распространения поверхностных пятен нефти при произвольных условиях поступления нефти на поверхность, ветре и течениях. Описание параметризации других важных процессов: испарения, растворения, дисперсии нефти в слое воды и взаимодействия с берегом – здесь не представлено. Оно будет дано в последующей публикации.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим динамику пленки нефтепродуктов на поверхности моря вдали от берега. Осредненные по толщине пленки уравнения движения и неразрывности в гидростатическом приближении имеют вид:

$$\frac{\partial \vec{u}_o}{\partial t} + \vec{u}_o \nabla \vec{u}_o = -g' \vec{\nabla} h - \frac{\vec{\tau}_w + \vec{\tau}_a}{\rho_o h} + \vec{f}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \vec{u}_o h = 0, \quad (2)$$

где  $\vec{u}_o$  – вектор скорости движения нефти с составляющими  $(u, v)$ ;  $h$  – толщина нефтяного пятна;  $g' = g(\rho_w - \rho_o)/\rho_w$ ;  $\rho_w$  – плотность воды;  $\rho_o$  – плотность нефти;  $\vec{\tau}_w$  – напряжение трения на границе нефть–вода;  $\vec{\tau}_a$  – напряжение трения на границе

нефть-воздух;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\vec{f}$  – силы поверхностного натяжения.

Эта система уравнений для неизвестных толщины и скорости слика незамкнута. Параметризуем силы трения и поверхностного напряжения. Напряжение трения на поверхности “вода-нефть” равно

$$\vec{\tau}_w = -\nu_w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \rho_w, \quad (3)$$

где  $\nu_w$  – коэффициент кинематической вязкости воды. Так как вязкость нефти много больше вязкости воды, то можно считать, что скорость нефтяного слика равномерно распределена по толщине пятна. Тогда

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \approx \frac{\vec{u}_o - \vec{u}_w}{\delta_w}, \quad (4)$$

где  $\delta_w$  – толщина пограничного слоя, образующегося под нефтяной пленкой. В общем случае  $\delta_w$  сложным образом зависит от направления потока и геометрии слика. Оценим ее по формуле Рейля [5]:

$$\delta_w = (\nu_w t')^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

где  $t'$  – характерное время, которое можно оценить как  $t' = L/|\vec{u}_o - \vec{u}_w|$ . В результате получим

$$\vec{\tau}_w = C_w \rho_w \sqrt{\nu_w |\vec{u}_o - \vec{u}_w| / L} \cdot (\vec{u}_o - \vec{u}_w), \quad (6)$$

где  $L$  – характерный линейный масштаб;  $C_w$  – эмпирическая константа.

Касательное напряжение ветра можно оценить из аэродинамической формулы

$$\vec{\tau}_a = -C_a |\vec{W}| \vec{W}, \quad (7)$$

где  $\vec{W}$  – скорость ветра; эмпирическая постоянная  $C_a = 1.75 \cdot 10^{-6}$ .

Силы поверхностного натяжения вызывают растяжение нефтяной пленки, если поверхностное натяжение на поверхности вода-воздух  $\sigma_{aw}$  превосходит сумму сил поверхностного натяжения на поверхностях раздела нефть-воздух  $\sigma_{oa}$  и нефть-вода  $\sigma_{ow}$ , т.е. когда коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma_0 = \sigma_{aw} - (\sigma_{ow} + \sigma_{oa})$  больше нуля. При этом в пятне выделяются тонкая (микронная или мономолекулярная) полоса у края пленки, в которой составное поверхностное напряжение  $\sigma$  изменяется от  $\sigma_{aw}$  до  $\sigma_{ow} + \sigma_{oa}$ , и относительно толстое ядро, в котором напряжения на поверхностях вода-нефть и нефть-воздух мало меняются [9]. Приложенная к мономолекулярной полосе результирующая сила, пропорциональная  $\sigma_0$ , уравновешивается вязкими силами трения, распределенными по всей площади пятна. Полный анализ динамики распространения нефтяных пятен

оказался достаточно сложен и был проведен только для идеализированной одномерной задачи [9]. В моделях распространения нефтяных пятен, как правило, использовались автомодельные соотношения, полученные методом размерности с эмпирическими коэффициентами. Исключение составляет работа [13], в которой силы эффективного поверхностного натяжения распределялись по некоторой полосе вдоль края пятна. В настоящей работе для упрощения задачи и сохранения единообразия в расчетах будем полагать, что сила эффективного поверхностного натяжения распределена по всему пятну и вызвана градиентом поверхностного натяжения так, что

$$\vec{f} = C_\sigma \frac{\vec{\nabla} \sigma}{\rho_w h}, \quad (8)$$

где  $C_\sigma$  – постоянная. При этом мономолекулярный слой на краю пятна не выделяется. Предполагая, что  $\sigma = \sigma(h)$ , получаем:

$$\vec{\nabla} \sigma = \frac{d\sigma}{dh} \vec{\nabla} h. \quad (9)$$

Эффективное поверхностное натяжение изменяется от значения  $\sigma_0$  на границе пятна и до малых почти постоянных значений в областях больших толщин. Аппроксимируя  $\sigma(h)$  линейной зависимостью

$$\sigma(h) = \sigma_0 (1 - h/h_{\max}), \quad (10)$$

где  $h_{\max}(t)$  – наибольшее значение толщины пятна, находим, что

$$\frac{d\sigma}{dh} = -\frac{\sigma_0}{h_{\max}(t)}. \quad (11)$$

Эта зависимость не противоречит экспериментальным данным [10]. Когда область толстой пленки отсутствует, т.е. пятно представляет собой мономолекулярный слой, тогда  $\partial \sigma / \partial h$  можно полагать постоянным [11, 12]:

$$\frac{d\sigma}{dh} = -\chi, \quad (12)$$

где  $\chi$  – константа.

Таким образом,

$$\frac{d\sigma}{dh} = -\chi_1 = -\min(\chi, \frac{\sigma_0}{h_{\max}}). \quad (13)$$

Тогда выражение для силы поверхностного натяжения будет иметь вид

$$\vec{f} = -C_\sigma \chi_1 \frac{\vec{\nabla} h}{\rho_w h}. \quad (14)$$

Таким образом, задача сводится к решению системы двух уравнений:

$$\frac{\partial \vec{u}_o}{\partial t} + \vec{u}_o \nabla \vec{u}_o = \vec{F} \left( h, \chi_1, \vec{W} \right) + \frac{C_w \rho_w}{\rho_o h} \sqrt{\nu_w |\Delta \vec{u}|} / L \Delta \vec{u}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \vec{u}_o h = 0 \quad (16)$$

для неизвестных функций  $h = h(x, y, t)$  и  $\vec{u}_o = \vec{u}_o(x, y, t)$  с соответствующими начальными условиями. Здесь

$$\vec{F} \left( h, \chi_1, \vec{W} \right) = \frac{C_a |\vec{W}| \vec{W}}{\rho_o h} - \vec{\nabla} h \left( g' + \frac{\chi_1}{\rho_w h} \right), \quad (17)$$

$$\Delta \vec{u} = \vec{u}_o - \vec{u}_w. \quad (18)$$

Граничные условия на свободной границе пятна  $D$  имеют вид

$$h = 0, \quad (x, y) \in D. \quad (19)$$

Справедливость аппроксимаций сил вязкости и поверхностного натяжения будет показана в следующем разделе.

## 2. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Задача в приведенной выше постановке допускает автомодельные решения в одномерном и осесимметричном случаях на основных стадиях растекания пятна в покоящейся среде (инерционной, гравитационно-вязкой и стадии поверхностного натяжения). Рассмотрим ниже наиболее интересные и продолжительные стадии – гравитационно-вязкую и стадию поверхностного натяжения – для того, чтобы сравнить их с известными решениями [2, 5, 11] и лабораторными экспериментами [2] и оценить значения эмпирических постоянных модели.

### 2.1. Гравитационно-вязкая стадия

Рассмотрим задачу о распространении симметричного пятна на гравитационно-вязкой стадии. Вместо переменных  $(x, y)$  переходим к одному аргументу  $r$  – расстоянию в направлении распространения пятна. Уравнения неразрывности и ди-

намики для случая баланса сил плавучести и вязкости примут вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial (hur^n)}{\partial r} = 0, \quad (20)$$

$$h \frac{\partial h}{\partial r} = -RL^{-1/2} u^{3/2}, \quad (21)$$

где  $R = C_w \sqrt{\nu_w} \rho_w / g' \rho_o$ ; показатель  $n = 0$  в одномерном случае и  $n = 1$  в осесимметричной задаче. За характерный размер  $L$  примем полуширину полосы нефти в одномерной задаче и радиус для осесимметричного пятна.

Представим искомые функции в виде:

$$h = t^\alpha H(\eta), \quad u = t^\beta U(\eta), \quad \eta = r/t^\gamma. \quad (22)$$

Тогда  $L = \eta_{\max} t^\gamma$ . Получим уравнения:

$$t^{\alpha-1} \left( \alpha H - \gamma \eta \frac{dH}{d\eta} \right) + \frac{t^{\alpha+\beta-\gamma}}{\eta^n} \frac{d}{d\eta} (\eta^n U h) = 0, \quad (23)$$

$$t^{2\alpha-\gamma} H \frac{dH}{d\eta} = -R \eta_{\max}^{1/2} t^{-\gamma/2+3/2\beta} U^{3/2}. \quad (24)$$

Для случая мгновенного разлива условие сохранения объема  $V$  имеет вид

$$\int_0^\infty (2\pi r)^n h dr = (2\pi)^n \int_0^\infty \eta^n t^{\alpha+\gamma(1+n)} H d\eta = \frac{V}{2^{1-n}}. \quad (25)$$

Для полосы нефти  $V$  представляет собой объем на единицу ширины полосы. Подбирая константы  $\alpha, \beta, \gamma$  так, чтобы удовлетворить условиям автомодельности и сохранения объема (25), находим, что

$$\alpha = -\frac{3(1+n)}{4(2+n)}, \quad \beta = -\frac{5+4n}{4(2+n)}, \quad \gamma = \frac{3}{4(2+n)}. \quad (26)$$

Решение системы уравнений (23)-(24) имеет вид:

$$H(\eta) = \sqrt{\frac{4}{5} \frac{R}{\sqrt{\eta_{\max}}}} \gamma^{3/2} \sqrt{\eta_{\max}^{5/2} - \eta^{5/2}}, \quad (27)$$

$$U(\eta) = \gamma \cdot \eta, \quad (28)$$

$$\eta_{\max} = \left( \frac{2^{1-n} (2\pi)^n \sqrt{\pi}}{V} \times \frac{\Gamma(2(1+n)/5)}{5\Gamma(19/10 + 2n/5)} \sqrt{\frac{4}{5} R \gamma^{3/2}} \right)^{\frac{-1}{(2+n)}}, \quad (29)$$

где  $\Gamma(z)$  – гамма функция. Закон изменения размера пятна аналогичен полученному в [1]. Для одномерного случая полуширина полосы нефти будет

$$L = 1.19 C_w^{-1/4} t^{3/8} \left( \frac{V^2 g' \rho_o}{\rho_w \sqrt{\nu}} \right)^{1/4}. \quad (30)$$

Для осесимметричного случая радиус будет

$$L = 1.12 C_w^{-1/6} t^{1/4} \left( \frac{V^2 g' \rho_o}{\rho_w \sqrt{\nu}} \right)^{1/6}. \quad (31)$$

При  $C = 0.5$  [13] в одномерном случае значение  $1.19 C_w^{-1/4} = 1.42$  неплохо согласуется с экспериментальным значением 1.5 [14].

## 2.2. Стадия поверхностного натяжения

Рассмотрим задачу о распространении симметричного пятна на стадии поверхностного натяжения. Уравнения неразрывности и динамики для случая баланса сил поверхностного натяжения и вязкости примут вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial(hur^n)}{\partial r} = 0, \quad (32)$$

$$-C_w \rho_w \sqrt{\nu} L^{-1/2} u^{3/2} + C_\sigma \frac{d\sigma}{dh} \frac{\partial h}{\partial r} = 0. \quad (33)$$

При использовании аппроксимации (11) показатели автомодельного решения (22) для случая мгновенного разлива имеют вид

$$\alpha = -\frac{3(1+n)}{4}, \quad \beta = -\frac{1}{4}, \quad \gamma = \frac{3}{4}. \quad (34)$$

Соответствующими автомодельными решениями задачи (32)-(33) будут

$$H = \frac{2}{5} \gamma^{3/2} \frac{H_0 C_w \rho_w \sqrt{\nu_w}}{C_\sigma \sigma_0} \eta_{\max}^{-1/2} \left( \eta_{\max}^{5/2} - \eta^{5/2} \right), \quad (35)$$

$$U = \gamma \cdot \eta, \quad (36)$$

где

$$\eta_{\max} = \sqrt{\frac{5}{2} \gamma^{-3/2} \frac{C_\sigma \sigma_0}{C_w \rho_w \sqrt{\nu_w}}}, \quad (37)$$

$$H_0 = \frac{18}{25\pi} \frac{V}{2^{1-n}} \gamma^{3/2} \frac{C_w \rho_w \sqrt{\nu_w}}{C_\sigma \sigma_0}. \quad (38)$$

Для одномерного и осесимметричного случаев получим одинаковые выражения для полуширины и радиуса:

$$L = \sqrt{\frac{5}{2}} t^{3/4} \gamma^{-3/4} \sqrt{\frac{C_\sigma \sigma_0}{C_w \rho_w \sqrt{\nu_w}}} \approx 1.962 \left( \frac{C_\sigma}{C_w} \right)^{1/2} t^{3/4} \left( \frac{\sigma_0}{\rho_w} \right)^{1/2} \nu_w^{-1/4}. \quad (39)$$

Значение постоянной в формуле (39) согласно [5], равно 1.43 в одномерном случае и 1.6 в осесимметричном. Полагая  $C_w = 0.5$ ,  $C_\sigma = 0.3$ , получаем значение константы, равное 1.52.

Наконец, при использовании аппроксимации (12) для тонкого слоя степенные показатели в соотношениях (22) имеют вид

$$\alpha = -\frac{3(1+n)}{2(n+3)}, \quad \beta = \frac{3}{2(3+n)} - 1, \quad (40)$$

$$\gamma = \frac{3}{2(3+n)},$$

что совпадает с решением [11], тогда как соответствующие автомодельные решения

$$H = \frac{2}{5} \gamma^{3/2} \frac{C_w \rho_w \sqrt{\nu_w}}{C_\sigma \chi} \eta_{\max}^{-1/2} \left( \eta_{\max}^{5/2} - \eta^{5/2} \right), \quad (41)$$

$$U = \gamma \cdot \eta, \quad (42)$$

где

$$\eta_{\max} = \left( \frac{5V\chi(n+1)(7+2n)}{14\gamma^{3/2} C_w \rho_w \sqrt{\nu_w}} \right)^{1/(3+n)}, \quad (43)$$

несколько отличаются от [11], где  $H \approx (\eta_{\max}^2 - \eta^2)$ , из-за того, что масштаб  $L$  здесь принят пропорциональным характерному размеру пятна, тогда как в работе [11] он полагался пропорциональным расстоянию от центра симметрии пятна.

## 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

### 3.1. Алгоритм лагранжева метода взаимодействующих частиц

Для решения поставленной задачи будем использовать метод Лагранжа. Представим нефтяное пятно в виде ансамбля, состоящего из  $N_p$  частиц. Каждая частица имеет массу  $m_i$ , а ее положение характеризуется радиусом-вектором  $\vec{x}_i$  и скоростью  $\vec{u}_i$ . Траектория движения частицы находится из уравнения

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \vec{u}_i. \quad (44)$$

Для численного решения системы уравнений (15), (16) и (44) в лагранжевых переменных используем схему второго порядка с перешагиванием [15]:

$$\vec{u}_o^{n+\frac{1}{2}} = \vec{u}_o^{n-\frac{1}{2}} - \Delta t \left[ \vec{F}^n(h, \chi_1, W) + \frac{C_w \rho_w}{2\rho_o h \sqrt{L}} \times \sqrt{\nu_w |\Delta \vec{u}^{n-1/2}|} \left( \Delta \vec{u}^{n+\frac{1}{2}} + \Delta \vec{u}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right], \quad (45)$$

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \Delta t \vec{u}^{n+1/2}, \quad (46)$$

где  $\Delta t$  – шаг по времени, индекс  $i$  опущен. Значения  $h$ ,  $\vec{\nabla} h$  и  $L$  определяются на  $n$ -ом временном слое. Плотность воды и нефти, а также вязкость воды считаются постоянными во времени. Если можно пренебречь инерционными членами, то расчетная схема приобретет особенно простой вид:

$$\vec{u}_o^n = \vec{u}_w^n + \left( \frac{h \rho_o \sqrt{L}}{C_w \rho_w \sqrt{\nu_w}} \right)^{2/3} \times \vec{F}^n(h, \chi_1, \vec{W}) / \left| \vec{F}^n(h, \chi_1, \vec{W}) \right|^{1/3}, \quad (47)$$

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \Delta t \vec{u}^n. \quad (48)$$

Чтобы вычислить скорость в формулах (45), (46) или (47), (48), необходимо определить силы плавучести и поверхностного натяжения, зависящие от  $h(\vec{x}, t)$  и  $\vec{\nabla} h(\vec{x}, t)$ . Чтобы восстановить гладкое поле  $h(x, y)$ , будем полагать, что частицы имеют пространственный размер и могут свободно проходить друг сквозь друга. Распределение толщины слоя нефти в частице аппроксимируется плотностью нормального распределения:

$$h_i(x, y) = \frac{m_i}{2\pi \rho_o w_x w_y} \times \exp \left( -\frac{(x-x_i)^2}{2w_x^2} - \frac{(y-y_i)^2}{2w_y^2} \right), \quad (49)$$

где  $w_x^2, w_y^2$  – дисперсии нормального распределения. Толщина пятна определится как сумма высот каждой частицы в данной точке:

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^{N_p} h_i(x, y). \quad (50)$$

Исходя из вида функций  $h_i(x, y)$ , получим, что:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{(x-x_i)}{w_x^2} h_i(x, y), \quad (51)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{(y-y_i)}{w_y^2} h_i(x, y).$$

Описанный подход позволяет учесть взаимодействие частиц в ансамбле. Аналогичные методы развивались в физике плазмы для моделирования бесстолкновительных систем (метод “частица-частица” [15]). В задачах дисперсии пассивной примеси в атмосфере представление концентрации, аналогичное (49)–(50), используется с 80-х годов [16]. В задачах растекания нефти представление поля концентрации нефти в виде выражения (50) было использовано [17], однако только для задачи пассивного переноса слик течением и ветром.

Решение задачи будет зависеть от выбора параметров нормального распределения  $w_x^2, w_y^2$  в формуле (49). Для практических расчетов использовалось соотношение  $w_x = w_y = w = \sqrt{S/n}$ , являющееся оценкой для среднего расстояния между частицами при равномерном распределении их в прямоугольной области.

### 3.2. Моделирование горизонтальной турбулентной диффузии

Скорость течения  $\vec{u}_w$  может быть разложена на детерминированную адвективную составляющую скорости  $\vec{u}_{adv}$  и случайную составляющую  $\vec{u}_{diff}$ , вызванную горизонтальной турбулентной диффузией:

$$\vec{u}_w = \vec{u}_{adv} + \vec{u}_{diff}. \quad (52)$$

Адвективная составляющая скорости находится либо из решения уравнений гидродинамической модели [18, 19], либо задается из наблюдений. Случайная составляющая моделируется методом случайных блужданий [20, 21]:

$$\vec{u}_{diff} = P_d^{(u)} \sqrt{2K_d/\Delta t}, \quad (53)$$

где  $P_d^u$  – равномерно распределенный в области  $[-1; 1] \times [-1; 1]$  случайный вектор;  $K_d$  – изотропный коэффициент турбулентности. Для определения  $K_d$  можно использовать известное экспериментальное соотношение Окубо [22]

$$K_d = 1.17 \cdot 10^{-6} t_k^{1.34}, \quad (54)$$

где  $t_k$  – время жизни частицы. Максимальное значение  $K_d$  должно быть равно подсеточному коэффициенту диффузии в гидродинамической модели.

### 3.3. Алгоритм сортировки частиц

В общем случае для того, чтобы учесть взаимодействие всех частиц, нужно произвести количество операций порядка  $n^2$ . Для того, чтобы сэкономить время вычислений, введем эффективный радиус взаимодействия  $D = 3w$  – расстояние, на котором силами взаимодействия между частицами уже можно пренебречь. Теперь для вычисления силы, действующей на конкретную частицу, нужно учесть влияние только тех частиц, расстояние до которых меньше  $D$ . Но для того чтобы выяснить, нужно ли учитывать какую-либо частицу, надо сначала определить расстояние до нее, что в свою очередь дает количество операций порядка  $n^2$ . Возникает задача о сортировке частиц по координатам таким образом, чтобы вычислять расстояния только для некоторого подмножества  $N_n$  общего количества частиц  $N_p$ . Для этого, следуя Хокни, вводится цепочечная сетка – решетка размерностью  $M_x \times M_y$ , покрывающая расчетную область с размером ячейки, равным  $D$ . Тогда в силу, действующую на частицу, находящуюся в ячейке, будут оказывать ненулевой вклад только те частицы, которые находятся либо в этой же ячейке, либо в девяти соседних ячейках.

Для определения, какие именно частицы находятся в соседних ячейках, нужно провести предварительную сортировку частиц. В вычислительном отношении выгоднее сортировать адреса координат, а не сами координаты. Адресная сортировка проводится согласно алгоритму, описанному в [15]. Если предположить, что частицы равномерно располагаются по всей расчетной области, то полное число проверок приблизительно равно  $9N_p^2/M_x M_y$ , что дает значительное уменьшение числа операций, при больших размерах цепочечной сетки.

### 3.4. Расчет линейных масштабов пятна

В качестве линейного масштаба  $L$  целесообразно использовать поперечный (минимальный) размер пятна. Минимальный размер пятна можно оценить формулой

$$L_{\min} = \frac{S}{\pi L_{\max}}, \quad (55)$$

где  $S$  – площадь пятна;  $L_{\max}$  – оценка для продольного (максимального) размера. Заметим, что

для круглого пятна линейным масштабом, согласно (55), будет его радиус. Для вычисления площади также удобно использовать цепочечную сетку. Ячейка, в которой находится хотя бы одна частица, считается полностью заполненной, а ячейка, в которой отсутствуют частицы, считается полностью свободной от нефти.

За  $L_{\max}$  принято среднеквадратичное расстояние между частицами, являющееся оценкой для максимального масштаба при равномерном распределении частиц в пятне эллиптической формы. Вычисление среднеквадратичного расстояния тоже требует  $n^2$  вычислений, поэтому расстояние определялось не между частицами, а между центрами цепочечных ячеек, в которых присутствует хотя бы одна частица.

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для проверки разработанного численного алгоритма результаты расчетов с описанной выше моделью были сопоставлены с автомодельными решениями для осесимметричного растекания пятна на гравитационно-вязкой стадии и на стадии поверхностного натяжения.

Представленные ниже графики на рис.1-3 построены для случая растекания 600 т нефти при начальном равномерном распределении в области в форме квадрата со стороной 100 м. Моделирование происходило с помощью 3000 частиц. Для численных расчетов выбирались следующие параметры:  $C_w = 0.5$ ;  $C_\sigma = 0.3$ ;  $C_a = 1.75 \cdot 10^{-6}$ ;  $\rho_o = 876 \text{ кг/м}^3$ ;  $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$ ;  $\sigma_0 = 0.025 \text{ Н/м}$ ;  $\nu_w = 1.7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . Расчеты для рис. 1-2 проводились с помощью схемы (45), (46).

На рис. 1,а представлено распределение частиц в начальный момент времени и через 3000 с. Движение частиц происходило в покоящейся среде. Как видно на рисунке, относительно быстро пятно принимает правильную круглую форму, хотя в начальный момент времени частицы были распределены в квадратной области, что выражает свойство автомодельности решаемой задачи. На рис. 1,б показано непрерывное распределение толщины пятна, построенное по этому ансамблю частиц в момент времени  $t = 3000 \text{ с}$ .

Как следует из рис. 2, автомодельные профили толщины слик очень хорошо согласуются с профилями, полученными численно на гравитационно-вязкой стадии и стадии поверхностного натяжения, за исключением края пятна, где концентрация частиц относительно мала. Отметим, что профили толщины пятна при  $t = 300 \text{ с}$  и  $t = 1000 \text{ с}$  практически совпадают, что свиде-

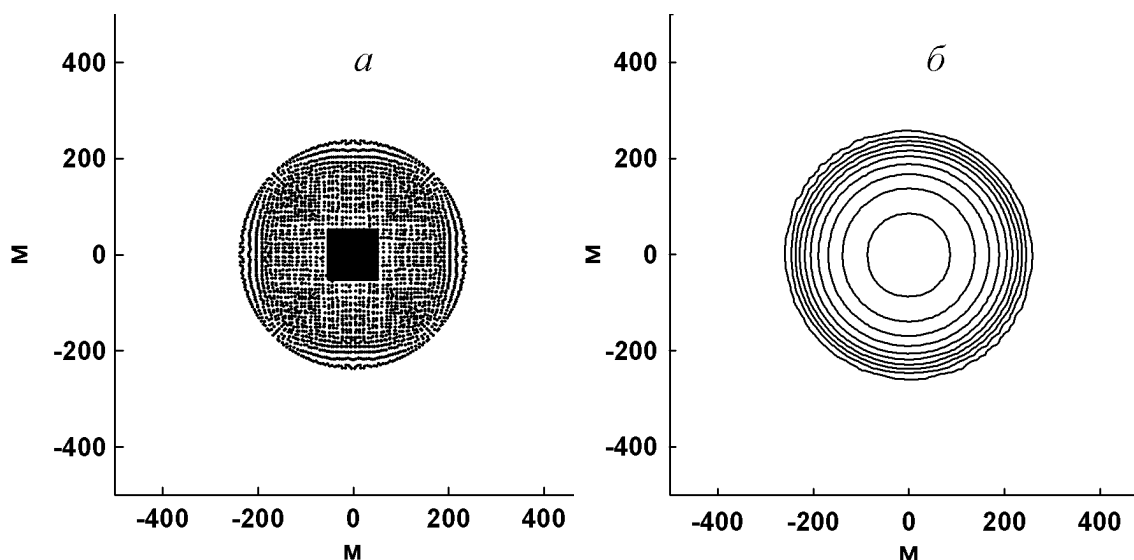


Рис. 1. Распределение частиц (а) и построенная по ним поверхность пятна (б):  
а - распределение частиц при  $t = 10$  с (квадрат в центре) и  $t = 3000$  с, б - толщина нефтяного пятна при  $t = 3000$  с

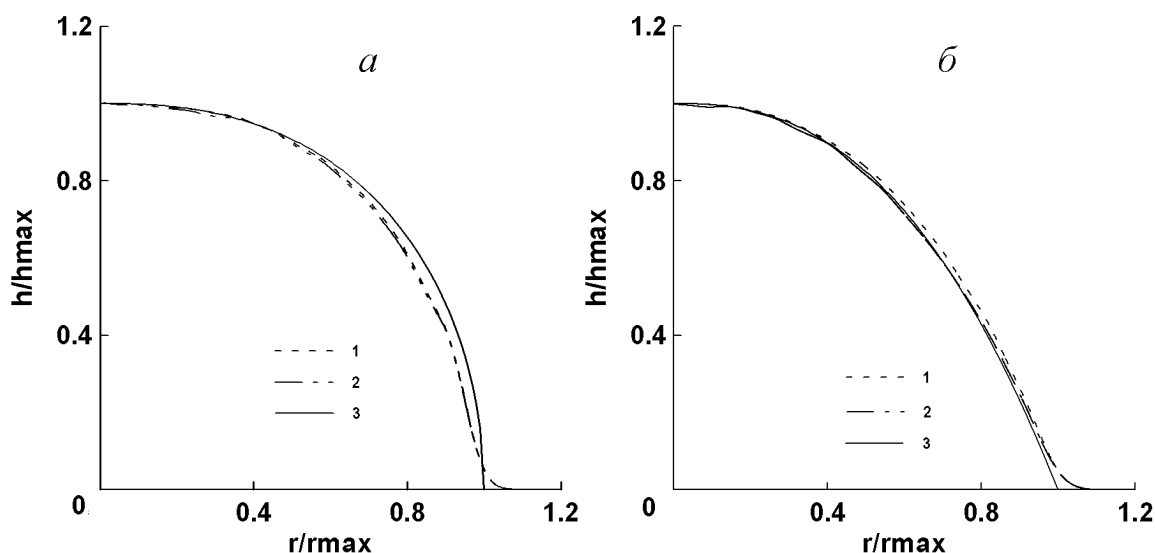


Рис. 2. Радиальное распределение толщины пятна в автомодельных переменных  
а - гравитационно-вязкий режим. 1 - при  $t = 300$  с, 2 - при  $t = 1000$  с, 3 - автомодельное решение  
б - режим поверхностного натяжения. 1 - при  $t = 10^5$  с, 2 - при  $t = 10^6$  с, 3 - автомодельное решение

тельствует о быстром выходе решений на автомодельный режим.

На рис. 4 изображена зависимость изменения радиуса нефтяного пятна от времени. Прямые штриховые линии соответствуют автомодельным асимптотикам для гравитационно-вязкой стадии и стадии поверхностного натяжения с толстым ядром. Кривая 1 соответствует изменению радиуса, рассчитанного с помощью полной системы уравнений (45), (46), а кривая 2 - при использовании вязкой системы (47)-(48). Как следует из

рисунка, начальная инерционная стадия непродолжительна и для дальнейшей эволюции пятна не существенна, что позволяет использовать для расчетов более простую численную схему (47)-(48).

На рис. 3 представлены результаты расчетов для модельной задачи с непрерывного источника нефти при наличии течения. В расчетах использованы такие параметры: мощность источника -  $0.28 \text{ м}^3/\text{с}$ ; объем одной частицы -  $0.45 \text{ м}^3$ ; скорость течения  $\vec{u}_w = (0.3; 0.3) \text{ м/с}$ . Результаты приведены для момента времени  $t = 1300$  с со времени

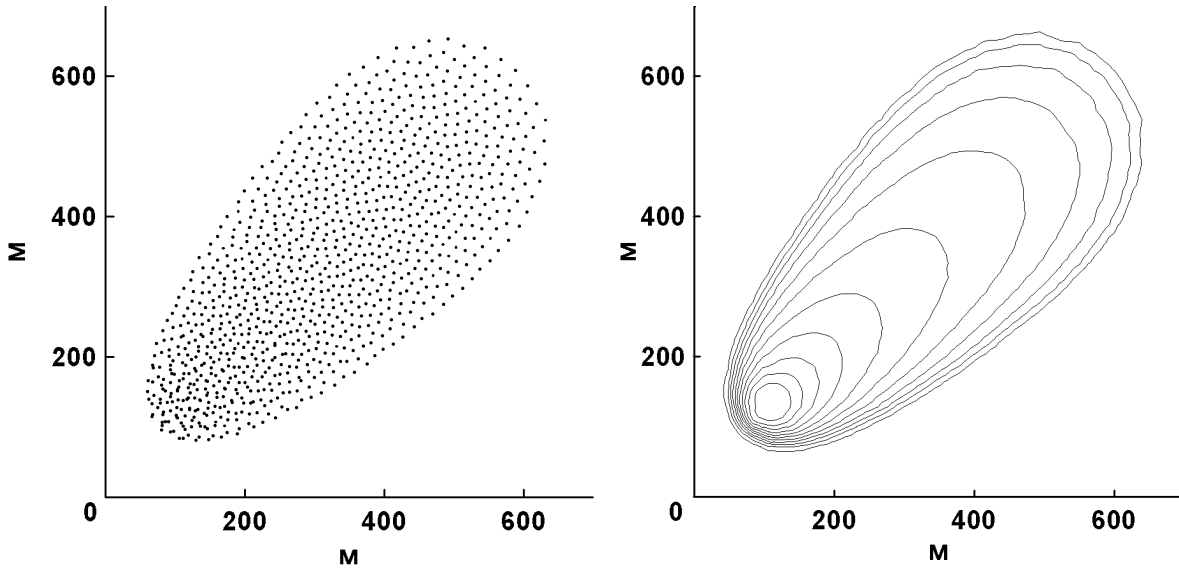


Рис. 3. Распределение маркеров и построенная по ним поверхность слика при наличии течения и непрерывно действующем источнике нефтяного загрязнения

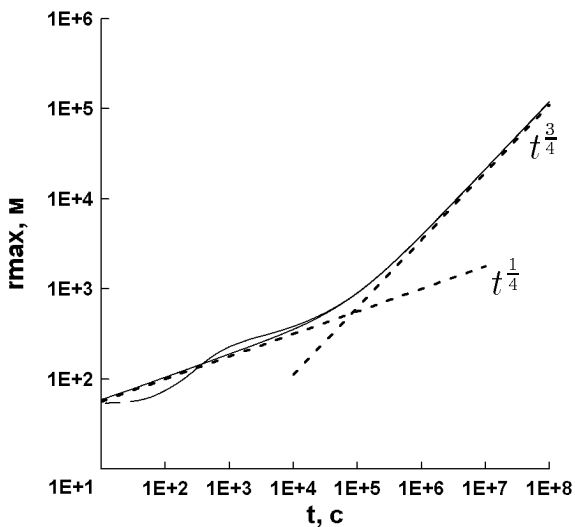


Рис. 4. Зависимость изменения радиуса пятна со временем: 1 – расчет с использованием схемы (45)-(46), 2 – с использованием схемы (47)-(48)

начала работы источника. Как следует из рисунка, при умеренных скоростях течения разные механизмы распространения слика – адвективный, гравитационно-вязкий и поверхностного натяжения – одинаково существенны. В дальнейшем важную роль начинает играть горизонтальная турбулентная диффузия.

## ВЫВОДЫ

В работе представлена модель динамики нефтяных пятен и численный метод Лагранжа решения задачи, позволяющий рассчитывать распространение нефтяных пятен произвольной формы на поверхности воды. В модели учтены как процессы растекания пятен под действием сил плавучести и поверхностного натяжения, так и перенос ветром и течениями, а также горизонтальная турбулентная диффузия. Приведены новые параметризации сил вязкости и поверхностного натяжения, для которых получены аналитические автомодельные решения. Автомодельные зависимости согласуются с известными решениями задачи и лабораторными экспериментами.

Для решения задачи разработан лагранжев метод взаимодействующих частиц, позволяющий в рамках модели сплошной среды рассчитывать поле давления в пятне. Результаты модельных численных экспериментов хорошо согласуются с автомодельными решениями задачи. Разработанные модель и численный метод без труда обобщаются для учета процессов дисперсии нефти в воде [23], взаимодействия с берегом [17] и других процессов трансформации нефтяных загрязнений.

Настоящая работа выполнена в рамках проекта INTAS N 01-0330.



1. Fay J. A. The spread of oil slick on a calm sea. // Oil on the Sea.– NY, Plenum, 1969.– P. 53–63.
2. Hoult D. P. Oil spreading on the sea. // Ann. Rev. Fluid Mech. 4.– Palo Alto, 1972.– P. 341–348.
3. ASCE Task Committee on Modelling of Oil Spills of the Water Resources Engineering Division State of art review of modeling transport and fate of oil spills. // J. Hydraulic Eng.– 1996.– 122 N 11.– P. 594–609.
4. Reed M., Johansen O., Brandvik P. J., Daling P., Lewis A., Fiocc R., Mackay D., Prentki R. Oil spill modeling towards the close of the 20th century: Overview of the state of art. // Spill Science & Technology Bulletin.– 1999.– 5 N 1.– P. 3–16.
5. Fannelop T. K., Waldman G. D. Dynamics of oil slicks. // AIAA Journal.– 1972.– 10.– P. 506–510.
6. Buckmaster J. Viscous-gravitational spreading of an oil slick. // J. Fluid Mech.– 1973.– 59.– P. 481–491.
7. Sundaram T. R. Spread of oil slicks on a natural body of water. // J. Hydronautics.– 1980.– 14.– P. 124–126.
8. Sundaram T. R. The spread of high-and low viscosity chemical on water. // J. Hydronautics.– 1981.– 15.– P. 100–102.
9. DiPietro N. D., Huh C., Cox R. G. The hydrodynamics of the spreading of one liquid on the surface of another. // J. Fluid Mech.– 1978.– 84.– P. 529–549.
10. Foda M., Cox R. G. The spreading of thin liquid films on a water air interface. // J. Fluid Mech.– 1980.– 101.– P. 33–51.
11. Никишов В. И. Об одном режиме растекания пленки поверхностно-активного вещества // Инж.-физ. журнал.– 1983.– 46, N 6.– С. 958–962.
12. Jensen O. E. The spreading of the insoluble surfactants at free surface of a deep fluid layer. // J. Fluid Mech.– 1995.– 293.– P. 349–378.
13. Искиердо А. Г., Каган Б. А., Рябкин А. А., Сеин Д. В. Численное моделирование растекания нефти по поверхности воды // Метеорология и гидрология.– 1995.– N 7.– С. 77–84.
14. Hoult D. P., Fay J. A., Milgram J. H., and Cross R. H. The Spreading and Containment of Oil Slicks // AIAA Paper.– Cambridge, Mass., 1970.– P. 70–754.
15. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц.– М.: Мир, 1987.– 638 с.
16. Bass A. Modelling long range transport and diffusion. // Second Joint Conf. on Appl. of Air Poll. Met.– 1980, AMS, New Orleans, USA.– P. 193–215.
17. Zhang D. F., Easton A. K., Steiner J. M. Simulation of coastal oil spills using the random walk particle method with Gaussian kernel weighting. // Spill Science & Tech. Bull.– 1997.– 4.– P. 71–88.
18. Koziv L., Maderich V., Margvelashvili N., Zheleznyak M. Three-dimensional model of radionuclide dispersion in the estuaries and shelf seas. // J. Environmental Modeling and Software.– 1998.– 13.– P. 413–420.
19. Iritz L., Maderich V., Margvelashvili N., Vuković M., Zheleznyak M. A model system for advanced management of accidental toxic spill in drinking water sources. // Vatten.– 1999.– 10.– P. 506–516.
20. Majer-Reimer E. On tracer methods in computational hydrodynamics // Engineering Applications of Computational Hydraulics, 1.– Pitman, London, 1982.– P. 198–217.
21. Озмидов Р. В. Диффузия примесей в океане.– Л.: Гидрометеиздат, 1986.– 280 с.
22. Okubo A. Oceanic diffusion diagrams. // Deep-Sea Res.– 1971.– 18.– P. 789–802.
23. Delvigne G. A. L., Sweeney C. E. Natural dispersion of oil. // Oil & Chemical Pollution.– 1988.– 4.– P. 281–310.