

УДК 532.546

ДВУМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОЖДЕВОГО СТОКА И ТРАНСПОРТА НАНОСОВ НА МАЛЫХ ВОДОСБОРАХ

С. Л. КИВВА, М. И. ЖЕЛЕЗНЯК

Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев

Получено 31.07.2001

Предложена физически обоснованная математическая модель формирования дождевого стока с малых водосборов. В рамках модели описываются следующие процессы: перехват осадков растительностью, их задержание в микродепрессиях рельефа, инфильтрация, поверхностный сток, смыв, транспорт и переотложение почвенных частиц. Численное моделирование формирования поверхностного стока основывается на решении нестационарного двумерного уравнения мелкой воды, инфильтрационного уравнения и уравнения переноса взвешенных наносов. Для уравнений мелкой воды и уравнения переноса взвесей построены неявные консервативные разностные схемы первого порядка аппроксимации. Разностная схема для уравнений мелкой воды позволяет моделировать движение жидкости со свободной границей. Верификация модели проведена по данным дождевых паводков для водосборов р. Бутеня.

Запропонована фізично обґрунтована математична модель формування дощового стоку з малих водозборів. У рамках моделі описуються наступні процеси: перехоплення опадів рослинністю, їхнє затримання в мікродепресіях рельєфу, інфільтрація, поверхневий стік, змив, транспорт і перевідкладення ґрунтових часток. Чисельне моделювання формування поверхневого стоку базується на рішеннях нестационарного двовимірного рівняння мілкої води, інфільтраційного рівняння і рівняння переносу завислих наносів. Для рівнянь мілкої води і рівняння переносу суспензій побудовані неявні консервативні різницеві схеми першого порядку апроксимації. Різницева схема для рівнянь мілкої води дозволяє моделювати рух рідини з вільною границею. Верифікація моделі проведена за даними дощових паводків для водозборів р. Бутені.

A physically based mathematical model of a runoff formation in small catchments is developed. The processes of interception, depression storage, infiltration, overland flow, soil particle detachment, their transport and deposition are considered in the model. The numerical simulation of runoff formation requires the solution of the unsteady, two-dimensional shallow water equations, an equation for the infiltration process and the sediment transport equation. The shallow water equations and the sediment transport equation are integrated numerically using conservative implicit difference schemes of the first order of approximation. The difference scheme for the shallow water equations allows simulating of a open flow with the free boundary. Verification of the model has been based on observed data for rain-induced sediment yield events at catchments of the Buteni river.

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование формирования дождевого стока на водосборах является одной из центральных проблем гидрологии. Однако в последние десятилетия в связи с переходом от "боксовых" концептуальных моделей к распределенным моделям стока на водосборах [1–2], основанным на уравнениях прикладной гидромеханики и в связи с использованием гидромеханических подходов к описанию формирования твердого стока с водосборов, такие задачи в значительной степени переместились в предметную область гидромеханики окружающей среды. Прикладной аспект этой проблемы связан как с прогнозированием паводков и наводнений на основе прогноза осадков, так и с расчетами эрозии склонов [2] и прогнозированием смыва загрязняющих веществ, значительная часть которых (радионуклиды, тяжелые металлы, пестициды) транспортируется с водосборов с наносами (твердым стоком) [4, 4].

Поверхностный сток на водосборе является сложным природным процессом и определяется микрорельефом склона, характеристиками

подстилающей поверхности и гидрофизическими свойствами почв, для которых характерна существенная пространственная неоднородность. В силу этой пространственной неоднородности как характеристик водосбора, так и интенсивности осадков, формирование поверхностного стока на разных участках водосбора происходит не одновременно. В начальном периоде дождя водосбор обычно представляет собой чередование участков стока и бессточных областей. Наиболее адекватными моделями, описывающими формирование поверхностного стока на водосборе и учитывающими неоднородность характеристик склона, являются модели, основанные на решении двумерных уравнений мелкой воды (Сен-Венана) [1, 2].

Для численного решения уравнений мелкой воды наиболее часто использовались разностные схемы второго порядка типа Прейссмана, Лакса-Вендрова, Мак Кормака и т. п. [1, 2, 4, 3]. Однако схемы такого типа не всегда надежны для моделирования поверхностного стока в силу ряда особенностей.

Во-первых, поверхностный сток на водосборе характеризуется небольшой глубиной, которая из-

меняется от нескольких сантиметров до миллиметров. Поверхностный сток существенно зависит от топографии земной поверхности и вариации локальных уклонов поверхности. При этом в сравнении с глубиной поверхностного стока перепад высот микрорельефа имеет тот же порядок или зачастую даже больший. Все это может приводить к осцилляциям в численном решении, появлению отрицательных глубин и в результате к развалу численного решения.

Во-вторых, существует большое напряжение трения, вызванное шероховатостью поверхности. Силы трения на дне совместно с осадками и инфильтрацией определяют распределенный источник-сток в уравнениях мелкой воды. Этот источник-сток является существенно нелинейным и может накладывать жесткие ограничения на временной шаг в явных разностных схемах.

В последнее время для преодоления этих трудностей применяют TVD варианты известных явных схем [5–8]. При таком подходе, используя метод дробных шагов [9–10], неоднородные двумерные уравнения мелкой воды расщепляются на однородные одномерные уравнения и систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неоднородного члена. Однородные одномерные уравнения аппроксимируются явными TVD схемами, а система обыкновенных дифференциальных уравнений для неоднородного члена - неявной разностной схемой.

В данной работе предложена двумерная модель формирования поверхностного стока на водосборе, учитывающая такие процессы как: перехват осадков растительностью, их задержание в микропонижениях рельефа, инфильтрационное впитывание дождевых вод в почву, поверхностное стекание, смыв, транспорт и переотложение почвенных частиц. Для двумерных уравнений мелкой воды построена неявная разностная схема первого порядка аппроксимации. В силу аппроксимации уравнения неразрывности разностной схемой вверх по потоку обеспечивается неотрицательность глубины потока для любых режимов течения. Приведены результаты численного моделирования поверхностного стока на водосборе Лога Плоского.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО СТОКА

1.1. Перехват осадков растительностью

Перехват осадков растительностью определяется количеством воды, которое задерживается по-

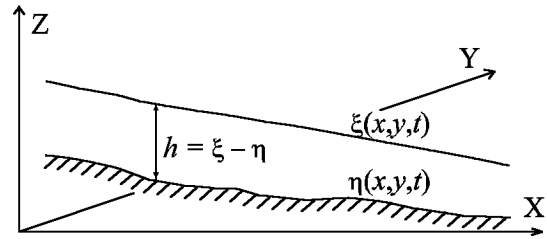


Рис. 1. Схематизация потока жидкости по склону водосбора

верхностью растений и испарением с нее. Перехват осадков растительностью моделируется в виде аккумулирующей процедуры для емкости перехвата, скорость заполнения которой определяется соотношением [11]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \begin{cases} R - E_0, & 0 \leq P \leq P_{mx}, \\ 0, & P > P_{mx}, \end{cases}$$

где P – толщина пленки воды на поверхности растительности; P_{mx} – максимальная емкость перехвата осадков растительностью; R – интенсивность осадков; E_0 – испаряемость.

1.2. Поверхностное задержание

Количество воды, которое идет на заполнение бессточных емкостей микрорельефа, вычисляется по формуле [12]

$$h_d(t) = h_{mx} \exp(-\beta I) \left[1 - \exp \left\{ -\frac{Q(t)}{h_{mx} \exp(-\beta I)} \right\} \right],$$

где h_d – средний по площади слой задержания воды в микродепрессиях рельефа; h_{mx} – максимальный слой задержания при нулевом уклоне поверхности водосбора; I – уклон склона водосбора; Q – кумулятивная стокообразующая часть осадков с начала дождя; β – коэффициент, зависящий от строения микрорельефа водосбора.

1.3. Поверхностный сток

Пусть поверхность земли описывается уравнением $z = \eta(x, y, t)$, а свободная поверхность жидкости - $z = \xi(x, y, t)$ (рис.1). Двумерные уравнения мелкой воды с учетом напряжений на дне и свободной поверхности жидкости выводятся интегрированием по глубине трехмерных уравнений динамики потока с учетом ограничений, рассмотренных в [1, 3]. Для склонового стока эти уравнения записываются в виде [3]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = R_{ex}(x, y, t), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x}(uuh) + \frac{\partial}{\partial y}(vuh) - \\ -u_{\xi}R = -gh\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{\rho}(\tau_x^{\xi} - \tau_x^{\eta}), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(vh) + \frac{\partial}{\partial x}(uvh) + \frac{\partial}{\partial y}(vvh) - \\ -v_{\xi}R = -gh\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{\rho}(\tau_y^{\xi} - \tau_y^{\eta}), \end{aligned} \quad (3)$$

где u, v – проекции вектора скорости жидкости на оси координат x и y соответственно; g – ускорение свободного падения; τ^{ξ} – вектор напряжений на свободной поверхности жидкости; τ^{η} – вектор напряжений на дне; u_{ξ}, v_{ξ} – горизонтальные составляющие скорости дождя; R_{ex} – стокообразующая часть дождевых осадков.

Эти уравнения описывают как ламинарное, так и турбулентное течения. Для ламинарного течения вязкие напряжения преобладают и рейнольдсовыми напряжениями можно пренебречь. Тогда напряжение трения на поверхности водосбора записывается в виде

$$\tau_x^{\eta} = \rho \frac{c_f}{8} u (u^2 + v^2)^{1/2},$$

$$\tau_y^{\eta} = \rho \frac{c_f}{8} v (u^2 + v^2)^{1/2},$$

где c_f – фактор сопротивления. Для ламинарного течения c_f определяется из уравнения Дарси-Вейсбаха

$$c_f = K_0/Re,$$

где $Re = h(u^2 + v^2)^{1/2}\nu^{-1}$ – число Рейнольдса; ν – кинематическая вязкость; K_0 – безразмерный параметр шероховатости поверхности.

Обычно предполагается, что течение по поверхности водосбора начинается как ламинарное течение и затем становится турбулентным для больших чисел Рейнольдса [2]. Поэтому после начала дождя ламинарный закон используется до тех пор, пока число Рейнольдса не превышает некоторое критическое значение.

Для турбулентного течения рейнольдсовы напряжения преобладают и вязкими напряжениями можно пренебречь. В этом случае для вычисления

напряжения трения на дне может использоваться формула Маннинга

$$\tau_x^{\eta} = gn^2 h^{-1/3} u (u^2 + v^2)^{1/2},$$

$$\tau_y^{\eta} = gn^2 h^{-1/3} v (u^2 + v^2)^{1/2},$$

где n – коэффициент шероховатости Маннинга.

Напряжение трения на свободной поверхности возникает в результате воздействия ветра и попадания в поток капель дождя. Капли дождя, падая на поверхность потока, образуют брызги и порождают турбулентность потока. При этом воздействие тем больше, чем глубина потока меньше и течение ламинарное. Все это может приводить к увеличению гидравлического сопротивления. В то же время влиянием ветра на формирование поверхностного стока на водосборе можно пренебречь.

Напряжение трения на свободной поверхности, вызванное падением капель дождя, задавалось на основе соотношений [3]:

$$\tau_x^{\xi} = -\rho Ru,$$

$$\tau_y^{\xi} = -\rho Rv.$$

1.4. Инфильтрация

Интенсивность инфильтрации может определяться из решения уравнения Richards [13] или рассчитываться по модели Morel-Seytoux [16].

Согласно модели Morel-Seytoux, инфильтрационный процесс во время дождя состоит из двух фаз: инфильтрации до момента обводнения поверхности земли t_p , то есть когда интенсивность осадков превысит интенсивность инфильтрации; и последующей инфильтрации, которая характеризуется уменьшением ее интенсивности в то время, как увеличивается влагосодержание корневого слоя почвы.

До обводнения поверхности земли предполагается, что интенсивность инфильтрации равна интенсивности осадков и поверхностный сток отсутствует. После обводнения интенсивность инфильтрации определяется допустимой интенсивностью инфильтрации.

Время обводнения поверхности водосбора вычисляется по формуле Morel-Seytoux [16–17]

$$t_p = t_0 + \frac{1}{R} \left[\frac{S_f}{R^* - 1} - W^0 \right],$$

где t_0 – время начала текущего шага по времени; R – средняя интенсивность осадков в течение данно-

го шага по времени; S_f – параметр, характеризующий инфильтрационную способность от влагосодержания верхнего слоя почвы; R^* – нормированная интенсивность осадков (отношение интенсивности осадков R к коэффициенту фильтрации); W^0 – глубина кумулятивной инфильтрации с начала дождя до момента времени t_0 .

Параметр S_f находится по формуле

$$S_f = (\theta - \theta_i)H_c(\theta_i),$$

где θ – почвенное содержание влаги; θ_i – начальное содержание влаги в верхнем почвенном слое; $H_c(\theta_i)$ – параметр, характеризующий капиллярный подъем жидкости.

Глубина кумулятивной инфильтрации в момент времени t вычисляется из уравнения

$$K(t - t_p) = W^t - W_p - S_f \ln \frac{S_f + W^t}{S_f + W_p},$$

где W^t – глубина кумулятивной инфильтрации в конце текущего временного шага; W_p – глубина кумулятивной инфильтрации в момент времени обводнения.

Средняя интенсивность инфильтрации на текущем шаге по времени Δt рассчитывается как

$$F = \frac{W^t - W^0}{\Delta t}.$$

1.5. Перенос взвеси

Одновременно с поверхностным стоком начинается процесс смыва, транспорта и переотложения почвенных частиц. Перенос взвешенных частиц потоком жидкости описывается следующим конвективно-диффузионным уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hS)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uhS) + \frac{\partial}{\partial y}(vhS) = \frac{\partial}{\partial x} \left(hD_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(hD_y \frac{\partial S}{\partial y} \right) - (1 - \phi)\rho_b \frac{\partial \eta}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4)$$

где ϕ – пористость верхнего слоя почвы; ρ_b – плотность скелета почвы; S – объемная концентрация взвешенных наносов.

1.6. Эрозия/отложение почвенных частиц

Изменение рельефа поверхности водосбора описывается уравнением

$$\rho_b(1 - \phi) \frac{\partial \eta}{\partial t} = q^s - q^b,$$

где q^s и q^b – соответственно интенсивности переотложения и эрозии поверхности водосбора.

Интенсивность эрозии q^b складывается из интенсивностей эрозии почвы вследствие воздействия падающих капель дождя q_s^b и гидравлической эрозии q_h^b , обусловленной поверхностным течением воды, то есть

$$q^b = q_s^b + q_h^b.$$

Интенсивность эрозии почвы под воздействием падающих капель дождя вычисляется по формуле

$$q_s^b = r_f r(h) \alpha R_{ex}^\beta,$$

где R_{ex} – интенсивность осадков (мм час⁻¹); r_f – коэффициент почвенной эродированности в результате воздействия капель дождя (Дж⁻¹); $r(h)$ – уменьшающий фактор, который определяет уменьшение воздействия капель дождя на эрозию почвы в силу увеличения глубины поверхностного потока воды; α и β – эмпирические коэффициенты, значения которых были определены регрессионным анализом для всевозможных интервалов изменения интенсивности осадков [18].

Функция $r(h)$ определяется следующим соотношением [19–20]:

$$r(h) = \begin{cases} \exp(1 - h/d_m), & h > d_m, \\ 1, & h \leq d_m, \end{cases}$$

где h – глубина потока; d_m – средний диаметр капель дождя.

Средний диаметр капель дождя находится из уравнения Laws-Parsons [21]

$$d_m = 0.00124 R_{ex}^{0.182}.$$

Интенсивность гидравлической эрозии и интенсивность отложения наносов рассчитывались на основе подхода [22], определяющего их по разности между равновесной концентрацией и текущей концентрацией взвешенных наносов:

$$q^s = \max \{0, w_0(S - S^*)\},$$

$$q_h^b = \max \{0, E_r w_0(S^* - S)\},$$

где S – объемная концентрация наносов; S^* – равновесная концентрация наносов, соответствующая транспортирующей способности потока; w_0 – скорость осаждения наносов; E_r – коэффициент эродированности поверхностного потока.

Равновесная концентрация наносов определяется соотношением

$$S^* = \frac{p}{h(u^2 + v^2)^{1/2}},$$

где p – транспортирующая способность потока.

Транспортирующая способность потока для заданного размера наносов может быть вычислена с использованием одного из пяти уравнений: Engelund-Hansen, Yalin, Einstein-Brown, Bagnold и Ackers-White [23].

2. РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Для конечно-разностной аппроксимации уравнений (1)-(3) область моделирования покрывается неравномерной прямоугольной сеткой так, чтобы граница области аппроксимировалась ломаной линией, не проходящей через узлы сетки. Вокруг каждого узла сетки выделяется элементарный объем V , боковые поверхности которого проходят по середине расстояния между соседними узлами сетки. Для упрощения разностных выражений на сеточном шаблоне соседние узлы сетки будем обозначать согласно сторонам горизонта (рис.2). Так, левый соседний узел от центрального узла шаблона P по оси X будем называть западным и обозначать индексом W , соответственно правый узел – восточным и обозначать индексом E . Для оси Y эти узлы будут соответственно южным (S) и северным (N).

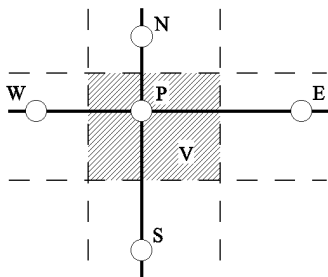


Рис. 2. Обозначения узлов сеточного шаблона.

2.1. Аппроксимация уравнений поверхностного стока

Интегрируя уравнение (1) по элементарному объему V на временном интервале $[t, t + \Delta t]$, для сеточного узла P имеем:

$$\int_{x_{PW}}^{x_{PE}} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} h|_t^{t+\Delta t} dydx + \int_t^{t+\Delta t} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} (uh)|_{x_{PW}}^{x_{PE}} dydt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_{PW}}^{x_{PE}} (vh)|_{y_{PS}}^{y_{PN}} dxdt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_{PW}}^{x_{PE}} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} \varphi dydxdt, \quad (5)$$

где $x_{PJ} = 0.5(x_P + x_J)$ и $y_{PJ} = 0.5(y_P + y_J)$.

Заменяя в уравнении (5) интегралы их квадратными формулами, получаем

$$V \frac{h_P^{t+\Delta t} - h_P^t}{\Delta t} + \sum_J A_J F(h)_J^{t+\Delta t} = V \varphi_P^{t+\Delta t}, \quad (6)$$

где $J = W, E, S, N$, то есть, если не оговорено противное, суммирование берется по всем боковым узлам шаблона; A_J – площадь боковой поверхности между элементарными объемами V_P и V_J .

Аналогично для уравнений (2)-(3) имеем

$$V \frac{(uh)_P^{t+\Delta t} - (uh)_P^t}{\Delta t} + \sum_J A_J F(uh)_J^{t+\Delta t} + \sum_{I=W,E} A_I G_I^{t+\Delta t} = V \phi_P^{t+\Delta t}, \quad (7)$$

$$V \frac{(vh)_P^{t+\Delta t} - (vh)_P^t}{\Delta t} + \sum_J A_J F(vh)_J^{t+\Delta t} + \sum_{I=S,N} A_I G_I^{t+\Delta t} = V \psi_P^{t+\Delta t}. \quad (8)$$

Поток F_J через боковую поверхность элементарного объема аппроксимируется вверх по потоку

$$F(w)_J = \begin{cases} [u]_{PJ}^+ w_P + [u]_{PJ}^- w_J, & J = W, E; \\ [v]_{PJ}^+ w_P + [v]_{PJ}^- w_J, & J = S, N, \end{cases}$$

где квадратные скобки с нижним индексом PJ обозначают, что для аппроксимации заключенного в них шаблонного функционала на боковой поверхности элементарного объема между узлами P и J может использоваться формула наиболее подходящего осреднения (среднеарифметическое, гармоническое или геометрическое); $w^+ = \max(0, w)$ и $w^- = \min(0, w)$.

Функционал G_J вычисляется по формуле

$$G_J = 0.125(3h_P + h_J)(\eta_J - \eta_P).$$

Заметим, что

$$V \frac{(wh)_P^{t+\Delta t} - (wh)_P^t}{\Delta t} = V h_P^t \frac{w_P^{t+\Delta t} - w_P^t}{\Delta t} + V w_P^{t+\Delta t} \frac{h_P^{t+\Delta t} - h_P^t}{\Delta t} = V h_P^t \frac{w_P^{t+\Delta t} - w_P^t}{\Delta t} - w_P^{t+\Delta t} \sum_J A_J F(h)_J^{t+\Delta t} + V w_P^{t+\Delta t} \varphi_P^{t+\Delta t}. \quad (9)$$

Поэтому уравнения (7)-(8) перепишем в виде

$$V h_P^t \frac{u_P^{t+\Delta t} - u_P^t}{\Delta t} + \sum_J A_J \Phi(u)_J^{t+\Delta t} + \sum_{I=W,E} A_I G_I^{t+\Delta t} = V (\phi - u\varphi)_P^{t+\Delta t}, \quad (10)$$

$$V h_P^t \frac{v_P^{t+\Delta t} - v_P^t}{\Delta t} + \sum_J A_J \Phi(v)_J^{t+\Delta t} + \sum_{I=S,N} A_I G_I^{t+\Delta t} = V (\psi - v\varphi)_P^{t+\Delta t}, \quad (11)$$

где

$$\Phi(w)_J = \begin{cases} [u]_{PJ}^- (w_J - w_P) h_J, & J = W, E; \\ [v]_{PJ}^- (w_J - w_P) h_J, & J = S, N. \end{cases}$$

Разностная схема (6), (9)-(10) имеет первый порядок аппроксимации по временной и пространственным переменным. В силу аппроксимации в уравнении неразрывности (1) конвективных членов разностями вверх по потоку разностная схема (6) является монотонной разностной схемой и, следовательно, для неотрицательной правой части уравнений (6) обеспечивает неотрицательность глубины потока при любых режимах течения.

2.2. Аппроксимация уравнения переноса наносов

Интегрируя уравнение (1) по элементарному объему V на временном интервале $[t, t + \Delta t]$, для сеточного узла P получаем:

$$\int_{x_{PW}}^{x_{PE}} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} [hS + (1 - \phi)\rho_b \eta]_t^{t+\Delta t} dy dx + \int_t^{t+\Delta t} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} \left(uhS - hD_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) \Big|_{x_{PW}}^{x_{PE}} dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_{PW}}^{x_{PE}} \left(vhS - hD_y \frac{\partial S}{\partial y} \right) \Big|_{y_{PS}}^{y_{PN}} dx dt = 0. \quad (12)$$

Заменяя в уравнении (11) интегралы их квадратными формулами, имеем

$$V \frac{(hS)_P^{t+\Delta t} - (hS)_P^t}{\Delta t} + V(1 - \phi)\rho_b \frac{\eta_P^{t+\Delta t} - \eta_P^t}{\Delta t} +$$

$$+ \sum_J A_J \Gamma_J^{t+\Delta t} = 0. \quad (13)$$

Потоки Γ_J через боковую поверхность элементарного объема состоят из диффузионной и конвективной составляющих. Диффузионная составляющая аппроксимируется по центрально-разностной формуле, тогда как конвективная составляющая вверх по потоку

$$\Gamma_J = \begin{cases} \Gamma_J^x, & J = W, E; \\ \Gamma_J^y, & J = S, N, \end{cases}$$

$$\Gamma_J^x = [u]_{PJ}^+ h_P S_P + [u]_{PJ}^- h_J S_J + [hD_x]_{PJ} \frac{S_P - S_J}{\Delta_J},$$

$$\Gamma_J^y = [v]_{PJ}^+ h_P S_P + [v]_{PJ}^- h_J S_J + [hD_y]_{PJ} \frac{S_P - S_J}{\Delta_J},$$

где Δ_J - расстояние между узлами P и J .

3. АППРОКСИМАЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Разностные схемы (6), (9)-(10) и (12) для уравнений (1)-(3) и (4) были получены для внутренних узлов сетки. Аппроксимация дифференциальных уравнений (1)-(3), (4) для узлов сетки, лежащих возле границы области, отличается необходимостью учета граничных условий. Обычно граничные условия определяют либо значения основных переменных (условия Дирихле), либо значения потока (условия Неймана или Коши) на границе.

Известно, что для однозначного решения уравнений (1)-(3) граничные условия должны удовлетворять следующим требованиям: 1 - на каждой границе ставится столько условий, сколько на ней имеется входящих в область характеристик; 2 - условию диссипативности.

Учет граничных условий для уравнений (1)-(3) осуществляется подстановкой соответствующих значений в функционалы F_J , Φ_J и G_J в уравнениях (6), (9)-(10). При моделировании стока на водосборе на склоне переменные в квадратных скобках осредняются вверх по потоку и никаких дополнительных граничных условий не ставится.

Для учета граничных условий Дирихле уравнения (4) в разностной схеме (12) основные переменные в граничных узлах заменяются их значениями на границе. В случае граничных условий Неймана или Коши, значения потоков на границе области подставляются непосредственно в разностную схему (12) вместо соответствующих потоков через боковую поверхность.

4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система нелинейных уравнений (6), (9)-(10) может быть представлена в виде

$$R(x) = 0,$$

где $R(x) : E^n \rightarrow E^n$.

Для ее решения использовался метод Ньютона

$$x^{s+1} = x^s - \left(\frac{\partial R(x^s)}{\partial x} \right)^{-1} R(x^s),$$

где s обозначает номер итерации.

Итерации по нелинейности выполнялись до удовлетворения критерия:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{|x_i^{s+1} - x_i^s|}{|x_i^s|} \leq \varepsilon,$$

где ε – некоторая наперед заданная константа.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

До верификации описанной выше математической модели по экспериментальным данным о формировании поверхностного стока на реальных водосборах проводилось тестирование разностной схемы (7), (10)-(11) на задачах о прорыве плотины.

5.1. Одномерная задача о прорыве плотины

Рассматривался горизонтальный канал постоянного поперечного сечения длиной 1000 м, который имел тонкую перегородку в сечении $x = 500$ м. По левую сторону от перегородки уровень воды составлял 100 м, по правую сторону – 1 м. Предполагалось, что первоначально вода по обе стороны перегородки находится в состоянии покоя. В нулевой момент времени плотина мгновенно разрушается и требуется определить последующее движение воды [24].

Область моделирования покрывалась равномерной сеткой с шагом, равным 10 м. На рис. 3. приведено сравнение численного (штриховая линия) и аналитического (сплошная линия) решений через 10 с после прорыва плотины.

5.2. Двумерная задача о прорыве плотины

Эта задача моделирует частичное разрушение дамбы или быстрое открытие шлюзных ворот [6]. Квадратная область со стороной в 250 м разделена

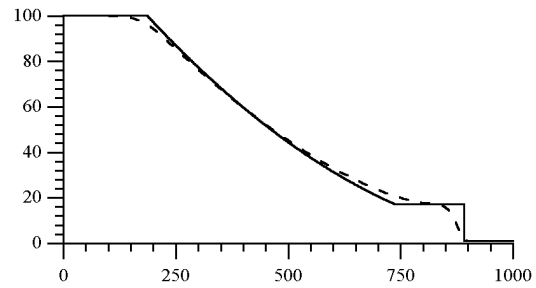


Рис. 3. Сравнение численного и аналитического решения задачи о прорыве плотины через 10 с

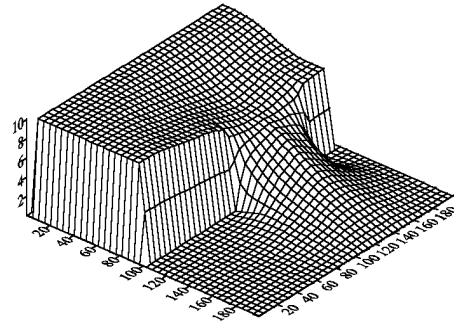
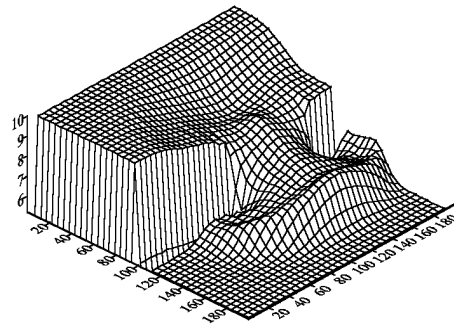


Рис. 4. Решение задачи о прорыве плотины через 7.2 с: случай заполненной второй подобласти (вверху) и движение потока по сухому дну (внизу).

дамбой на две равные прямоугольные подобласти. Предполагается, что одна из подобластей заполнена водой и ее глубина равна 10 м. Для второй подобласти рассматриваются два случая: 1) когда она также заполнена водой, глубина которой составляет 5 м; 2) когда в подобласти нет воды. В момент времени $t = 0$ часть дамбы шириной в 75 м и с центром в 132.5 м мгновенно удаляется. Вода начинает вытекать через образовавшееся отверстие, формируя бор, который распространяется вперед и растекается горизонтально. В то же самое время отрицательная волна понижения распространяется вверх.

Область моделирования покрывалась равномер-

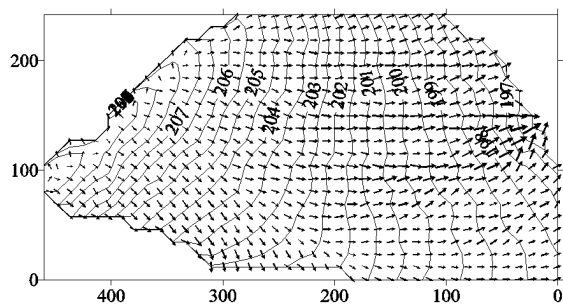


Рис. 5. Изолинии рельефа и поле скоростей поверхностного стока с водосбора лога Плоского через 30 мин. после начала дождя для паводка 13 июня 1970 г.

ной квадратной сеткой с пространственным шагом в 5 м. На рис. 4. показаны результаты моделирования через 7.2 с. после разрушения дамбы. Они хорошо согласуются с результатами, полученными в [8, 10].

5.3. Поверхностный сток с водосборов

Данные, собранные Украинским научно-исследовательским гидрометеорологическим институтом и Одесским государственным университетом, по дождевым паводкам на водосборах р.Бутеня (Богуславская ПЭГМБ) использовались для оценки способности вышеописанной модели моделировать поверхностный сток на водосборе [23]. В данной работе приводятся результаты моделирования стока воды и наносов с водосбора Лога Плоского.

Лог Плоский занимает верхнюю полевую часть водосбора балки Довжик. Площадь водосбора составляет 0.085 кв.км. Длина водосбора от наиболее удаленной точки водораздела до замыкающего створа 0.54 км, средняя ширина 0.19 км. Средний уклон водосбора 24.7%, тальвега - 22.6%. Водосбор лога довольно плоский и имеет вытянутую с юга на север форму. Водоразделительная линия, за исключением верхней части водосбора, выражена весьма слабо и поэтому возможны ошибки в определении водосборной площади.

Вся площадь водосбора весной распаивается и засаживается пшеницей, кукурузой и овощами по севообороту. Почвы водосбора темно-серые оподзоленные, крупнопылевато-легкосуглинистые. Грунтовые воды залегают на глубине 45 – 50 м.

Водосбор покрывался равномерной прямоугольной сеткой 11.5 × 11.5 м. Временной шаг выбирался равным 1 мин. Инфильтрационные потери рассчитывались по модели Morel-Seytoux. Перехват осадков растительностью и поверхностное

задержание вычислялись из уравнений Бефани. Транспортирующая способность потока определялась из уравнений Engelund-Hansen и Yalin. Рельеф водосбора и поле скоростей для паводка 13 июня 1970 года через 30 мин. после начала дождя показаны на рис. 5.

На рис. 6-7. приведено сравнение рассчитанных и наблюдаемых гидрографов жидкого и твердого стоков. Полевые измерения показали, что фракция взвешенных наносов с диаметром частиц 0.01 – 0.05 мм является преобладающей (составляет более 70%). В вычислениях диаметр взвешенных наносов полагался равным 0.01 мм, если транспортирующая способность потока вычислялась из уравнения Yalin, и 0.07 мм для уравнения Engelund-Hansen.

Рис. 6. показывает хорошее совпадение между рассчитанными и наблюдаемыми гидрографами жидкого и твердого стоков для дождевого паводка 13 июня 1970 года. Как видно из рис. 7. для дождевого паводка 16 августа 1980 г. не наблюдается такого хорошего совпадения между вычисленными и наблюдаемыми гидрографами как в предыдущем случае. Заметим, что гидрограф твердого стока сильно зависит от используемого уравнения для определения транспортирующей способности потока, особенно в областях малых скоростей поверхностного потока.

ВЫВОДЫ

Сравнение результатов численного моделирования с наблюдаемыми данными демонстрирует способность предложенной математической модели моделировать формирование стока на малых водосборах, которые можно определить как водосборы формирования ручейковой сети. Наличие русел средних и крупных рек с водохранилищами на территории водосбора требует введения в модель соответствующих параметризаций, которые не являлись предметом настоящей публикации.

Для уравнения мелкой воды построена неявная консервативная разностная схема первого порядка аппроксимации. В силу аппроксимации конвективных членов в уравнении неразрывности вверх по потоку обеспечивается неотрицательность глубины потока для любых режимов течения. Численные эксперименты показали эффективность применения схемы для решения такой задачи о движении жидкости со свободной поверхностью и подвижной границей, рассматриваемых в рамках различных модификаций уравнений мелкой воды, как формирование стока на малых водосборах.

Результаты расчетов по двумерной модели

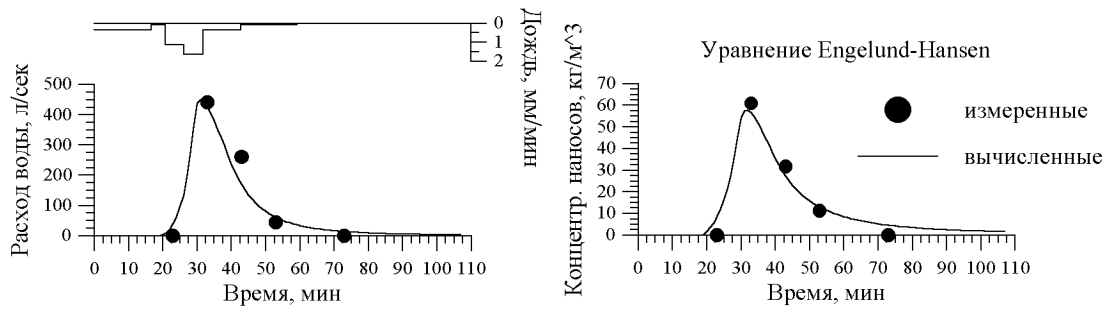


Рис. 6. Сравнение численных и наблюдаемых гидрографов жидкого и твердого стока для дождевого паводка 13 июня 1970 г.

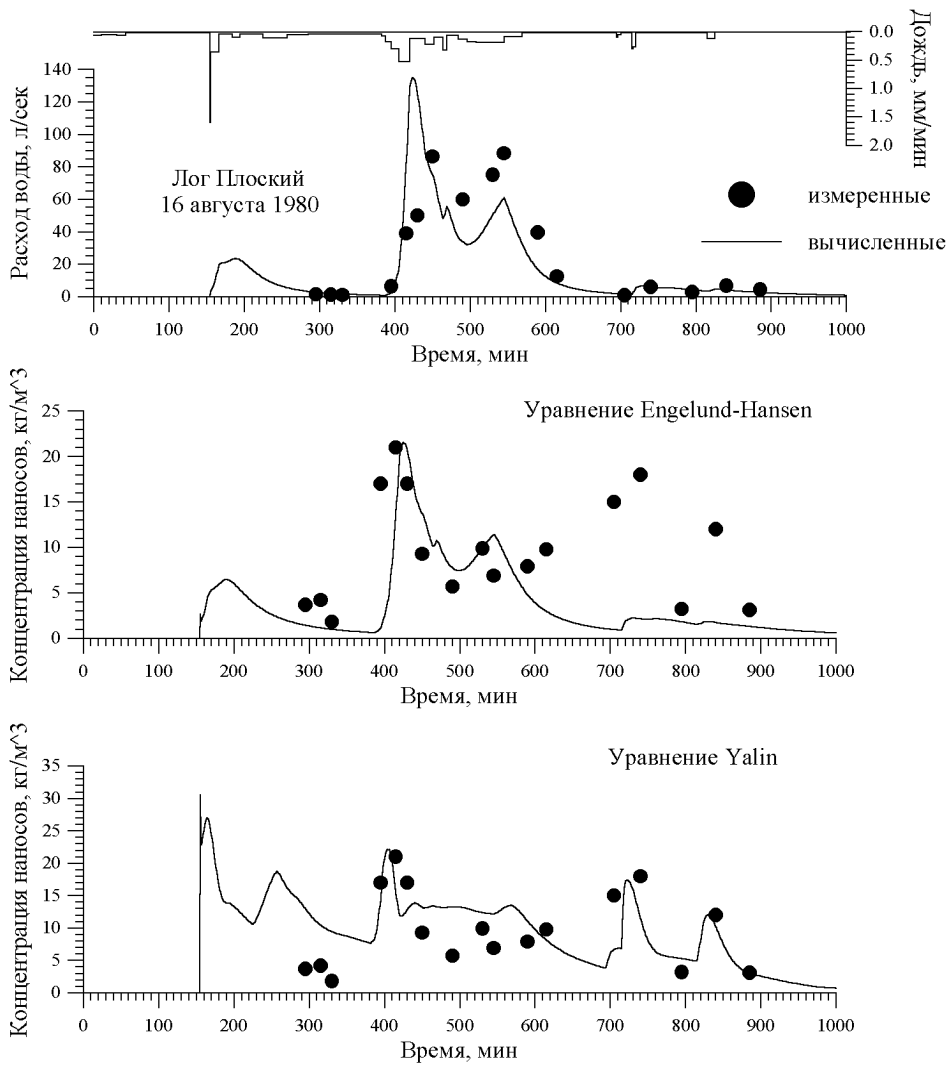


Рис. 7. Сравнение наблюдаемых и рассчитанных гидрографов стока для дождевого паводка 16 августа 1980 г.

транспорта и переотложения наносов существенно зависят от используемых соотношений для вычисления транспортирующей способности потока. При этом результаты моделирования показывают, что в случае "ливневых" дождей использование уравнения Engelund-Hansen, а в случае "морозящих" дождей - уравнения Yalin дает неплохое согласование численных результатов с наблюдаемыми на водосборах.

Модель формирования дождевого стока на небольших водосборах разработана при выполнении проекта SPARTACUS программы Европейской Комиссии Инко-Коперникус.

1. Кучмент Л. С., Демидов В. Н., Мотовилов Ю. Г. Формирование речного стока. – М.: Наука, 1983. – 215 с.
2. Singh V. P. (ed.) Computer Models of Watersheds Hydrology. – Highlands Ranch, Colorado: Water Resource Publications, 1995. – 1130 p.
3. Woolhiser D. A., Smith R. E., Goodrich D. C. KINEROS, A Kinematic Runoff and Erosion Model: Documentation and User Manual. – USDA-ARS: ARS Publication No. 77, 1990. – 211 p.
4. Raskob W., Popov A., Zheleznyak M. J., Heling R. Radioecological Models for Inland Water Systems. – Karlsruhe: FZKA 6089, Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, 1998. – 225 p.
5. Yan M., Kahawita R. Modelling the Fate of Pollutant in Overland flow // Wat. Res. – 2000. – 34(13). – P. 3335–3344.
6. Zhang W., Cundy T. W. Modeling of Two-Dimensional Overland Flow // Water Resour. Res. – 1989. – 25(9). – P. 2019–2035.
7. Louaked M., Hanich L. TVD scheme for the shallow water equations // J. Hydr. Res. – 1998. – 36(3). – P. 363–378.
8. Mingham C. G., Causon D. M. High-Resolution Finite-Volume Method for Shallow Water Flows // J. Hydr. Engrg. – 1998. – 124(6). – P. 605–614.
9. Yost S. A., Rao P. M. S. V. A non-oscillatory scheme for open channel flows // Adv. in Water Resour. – 1998. – 22(2). – P. 133–143.
10. Zoppou C., Roberts S. Catastrophic Collapse of Water Supply Reservoirs in Urban Areas // J. Hydr. Engrg. – 1999. – 125(7). – P. 686–695.
11. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 196 с.
12. Strang G. On the construction and comparison of finite difference schemes // SIAM J. Numer. Anal. – 1968. – 5(3). – P. 506–517.
13. Бефани А. Н. Расчет осадков растительностью // Метеорология, климатология и гидрология. – 1975. – Вып. 11. – С. 97–104.
14. Бефани А. Н. Математическая модель поверхностного задержания дождевых вод на склонах // Метеорология, климатология и гидрология. – 1982. – Вып. 18. – С. 108–117.
15. Richards L. A. Capillary conduction of liquids through porous materials // Physics. – 1931. – 1. – P. 318–333.
16. Morel-Seytoux H. J. From Excess Infiltration to Aquifer Recharge: A Derivation Based on the Theory of Flow of Water in Unsaturated Soils // Water Resources Research. – 1984. – 20. – P. 1230–1240.
17. Morel-Seytoux H. J., Sanders T. G. Abstractions, Excess Rainfall and Direct Runoff, Chapter 3. Hydrology for Transportation Engineers, Federal Highway Administration, Office of Research and Development, January 1980, US Government Printing Office, T. G. Sanders, editor, 1978. – P. 81–139.
18. Wicks J. M. Physically-based mathematical modelling of catchment sediment yield. Ph.D. Thesis, University of Newcastle upon Tyne, 1988.
19. Palmer R. S. Waterdrop impact forces // Trans. ASAE. – 1965. – 8(1). – P. 69–70, 72.
20. Park S. W., Mitchell J. K., Scarborough J. N. Soil erosion simulation on small watersheds: a modified ANSWERS model // Trans. ASAE. – 1982. – 25. – P. 1581–1588.
21. Laws J. O., Parsons D. A. The relation of raindrop size to intensity // Trans. Am. Geophys. Union. – 1943. – 24. – P. 452–460.
22. Zheleznyak M. J. The mathematical modelling of radionuclide transport by surface water flow from the vicinity of the Chernobyl nuclear power plant // Condensed Matter Physics. – 1997. – 12. – P. 37–49.
23. Perk M. van der (ed.) SPARTACUS - Spatial Redistribution of Radionuclides within Catchments: Development of GIS-based models for decision support systems. EC Contract No. ERB IC15 CT98 0215, Final Report. Utrecht: Utrecht University, 2000. – 165 p.
24. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1959. – 618 с.