

УДК 532.516

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ОБТЕКАНИЯ ПОЛУЦИЛИНДРА И ПОЛУСФЕРЫ НА ПЛОСКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ ПРОСЛОЕК

Н. В. САЛТАНОВ*, В. Н. САЛТАНОВ**

* Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

** Национальный университет им. Т.Г. Шевченко, Киев

Получено 25.01.2001

Построены и исследованы вихревые структуры (вторичные течения), занимающие ограниченные области около полуцилиндра и полусферы на плоскости, на основе точных решений уравнений гидродинамики. Определено влияние безразмерных параметров геометрии и чисел Фруда на силу разрежения, действующую на полуцилиндр и полусферу со стороны потока. Показано, в частности, что указанная сила является убывающей функцией их безразмерных радиусов и нарастающей – соответствующих чисел Фруда. Исследованные зависимости важны с точки зрения получения новых возможностей управления силовым воздействием потоков на обтекаемые тела.

На основі точних розв'язків рівнянь гідродинаміки побудовані та досліджені вихорові структури (вторинні течії), які займають обмежені області біля напівциліндра та напівсфери на площині. Визначений вплив безрозмірних параметрів геометрії й чисел Фруда на силу розрідження, що діє на напівциліндр та напівсферу з боку потоку. Показано, зокрема, що вказана сила є убываючою функцією їх безрозмірних радіусів та нарастаючою – відповідних чисел Фруда. Досліджені залежності є важливі з точки зору одержання нових можливостей керування силовим впливом потоків на тіла, що обтікаються.

Vortex structures in finite areas a semicylinder and semisphere are constructed and studied based on exact solutions of the hydrodynamic equations. Influence of dimensionless parameters of the geometry and influence of the Frude numbers on the rarefaction force acting on the semicylinder and semisphere from the stream is determined. It is shown, in particular, that the indicated force is the decreasing function of the dimensionless radiuses and the increasing function of the corresponding Frude numbers. The investigated dependences are important, in particular, for obtaining new abilities of management of force action of flows on streamline bodies.

ВВЕДЕНИЕ

Расширение возможностей влияния на гидродинамические характеристики пристенных потоков во многих случаях должно быть связано с более глубоким изучением структуры вторичных течений, широко распространенных в природе и технике [1–3, 9, 14–16, 19, 25–29]. Они возникают, например, в течениях с высокими числами Рейнольдса вблизи необтекаемых тел вследствие отрыва пограничного слоя. К созданию зон вторичных течений приводит также закручивание потока вблизи тела [4–7, 33]. Например, в плазмотронах [8] хорошо зарекомендовала себя термоизоляция стенок разрядной камеры вращающимся потоком холодного газа. Многочисленные примеры важных для практики вторичных течений приведены в работах [1–3, 7, 14, 16, 26, 28].

Изменение характеристик вихревого поля вблизи тела может сильно влиять на поле давления и гидродинамические нагрузки. В частности, создание вторичных вихрей может привести к существенному снижению гидродинамического сопро-

тивления. Известно [11], что обычный воздушный шарик в резиновой оболочке испытывает при движении значительно большее сопротивление, чем такая же масса воздуха без оболочки. Этот эффект объясняется непрерывностью скорости и давления на границе, разделяющей вихреобразование в сферической области от основного течения, а также существенным уменьшением потока завихренности в следе за телом.

В зоне вторичного течения движение частиц жидкости имеет вихревой характер, в то время как внешнее течение может быть потенциальным. Между вихревым и потенциальным потоками находится "нулевая" линия тока или поверхность, которая ограничивает область вихреобразования. По этой причине важным методом математического моделирования вторичных течений, получившим значительное развитие во второй половине 20-го столетия [16], является метод склеивания вихревого и потенциального потоков в различных зонах. Этот метод давно привлекает внимание исследователей. Достаточно вспомнить сферический вихрь Хилла [1, 12], цилиндрические вихри Ламба–Чаплыгина и Чаплыгина [12, 30, 32], а так-

же эллиптический вихрь Кирхгофа [10,12]. В дальнейшем идея использования вихрепотенциальных течений как модели отрывных течений получила развитие в работах [1, 11, 18, 20–24, 28, 29, 34] и др. В работе [16] с использованием единого аналитико–расчетного метода исследованы и систематизированы многие классы плоских стационарных течений невязкой жидкости как для ограниченных, так и для неограниченных вихревых областей.

В работе Чаплыгина [31] рассмотрено обтекание полуцилиндра на плоскости потоком с постоянной завихренностью и показано, что в вихревом потоке разрежение над полуцилиндром может быть существенно большим, чем в потенциальном. Эти результаты Чаплыгин увязал с давно подмеченным фактом, что речные течения с достаточно большой легкостью могут увлекать за собой лежащие на дне массивные предметы (камни). В дальнейшем результаты работы Чаплыгина [31] получили развитие в исследованиях ряда авторов (см. библиографию монографии В. С. Садовского [16]). Однако, как отмечается в [16], решения задач об обтекании тел вихревым потоком получены при этом, как правило, для случая, когда величина завихренности либо постоянна во всем течении, либо возрастает при удалении от тела в поперечном относительно вектора скорости на бесконечности направлении. Как следствие, неограниченно нарастает скорость жидкости в этом направлении. С учетом вышесказанного в монографии [16] говорится о целесообразности постановок и решения таких задач, в которых завихренность присутствовала бы лишь вблизи тела.

Цель данного сообщения – построить и исследовать вихревые структуры (вторичные течения), занимающие ограниченные области около полуцилиндра и полусферы на плоскости, на основе точных решений уравнений гидродинамики, выявить влияние безразмерных параметров геометрии и числа Фруда на силу разрежения, действующую на полуцилиндр и полусферу со стороны потока. Это важно, в частности, с точки зрения получения новых возможностей управления силовым воздействием потоков на обтекаемые тела.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ

Обратимся к уравнению для функции тока плоской стационарной задачи динамики идеальной не-

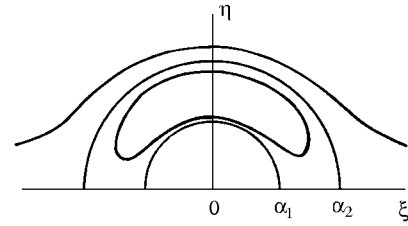


Рис. 1. Поток вокруг полуцилиндра на плоскости $\xi = \beta_0 x$, $\eta = \beta_0 y$

сжимаемой жидкости:

$$\Delta\psi = \frac{dW}{d\psi}, \quad \vec{v} = \nabla\psi \times \vec{e}_z, \quad p = \rho(W - gy - \frac{v^2}{2}). \quad (1)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа; \vec{e}_z – орт в направлении оси цилиндра z ; ось y направлена против вектора силы тяжести; g – ускорение силы тяжести; $W(\psi)$ – переменная Бернулли, которую определим как

$$W = W_0 - \frac{\beta_0^2 \psi^2}{2}. \quad (2)$$

Здесь величина W_0 и параметр завихренности β_0 – постоянные. Учитывая выражение (2) в уравнении (1), приходим к уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + \beta_0^2)\psi = 0. \quad (3)$$

На основе соотношений (1)–(3) получаем следующее точное решение уравнений динамики несжимаемой жидкости, которое описывает в цилиндрических координатах (r, φ) вторичное течение около полуцилиндра радиуса r_1 на плоскости $y = 0$ (см. рис. 1):

$$\bar{p} = \bar{p}_\infty + 1 + \alpha_2^2 \bar{\psi}^2 - \frac{2}{Fr} \frac{\alpha}{\alpha_1} \sin\varphi - \bar{v}_r^2 - \bar{v}_\varphi^2,$$

$$\bar{\psi} = \pi [J_1(\alpha_2) N_1(\alpha) - N_1(\alpha_2) J_1(\alpha)] \sin\varphi,$$

$$\bar{v}_r = \frac{\pi \alpha_2}{\alpha} [J_1(\alpha_2) N_1(\alpha) - N_1(\alpha_2) J_1(\alpha)] \cos\varphi,$$

$$\bar{v}_\varphi = \pi \alpha_2 \{ N_1(\alpha_2) [J_0(\alpha) - \frac{1}{\alpha} J_1(\alpha)] -$$

$$- J_1(\alpha_2) [N_0(\alpha) - \frac{1}{\alpha} N_1(\alpha)] \} \sin\varphi,$$

$$\bar{p} = \frac{2p}{\rho U_\infty^2}, \quad \bar{p}_\infty = \frac{2p_\infty}{\rho U_\infty^2}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{r_2 U_\infty},$$

$$\bar{v}_r = \frac{v_r}{U_\infty}, \quad \bar{v}_\varphi = \frac{v_\varphi}{U_\infty},$$

$$\alpha = \beta_0 r, \quad \alpha_1 = \beta_0 r_1, \quad \alpha_2 = \beta_0 r_2,$$

$$Fr = \frac{U_\infty^2}{gr_1}, \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad (4)$$

$$J_1(\alpha_2)N_1(\alpha_1) - N_1(\alpha_2)J_1(\alpha_1) = 0. \quad (5)$$

Здесь U_∞ – скорость на бесконечности; p_∞ – давление на бесконечности в плоскости $y = 0$; r_2 – внешний радиус вихревого слоя, окружающего полуцилиндр. Ось x выбрана параллельной скорости на бесконечности. При заданном значении величины α_1 в качестве α_2 принимается ближайший к α_1 корень трансцендентного уравнения (5). Вне вихревого слоя течение потенциально:

$$\bar{\psi} = \left(\frac{\alpha}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\alpha}\right)\sin\varphi, \quad \bar{v}_r = \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha^2}\right)\cos\varphi,$$

$$\bar{v}_\varphi = -\left(1 + \frac{\alpha_2^2}{\alpha^2}\right)\sin\varphi,$$

$$\bar{p} = \bar{p}_\infty + 1 - \frac{2}{Fr} \frac{\alpha}{\alpha_1} \sin\varphi - \bar{v}_r^2 - \bar{v}_\varphi^2,$$

$$\alpha \geq \alpha_2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (6)$$

На границе, разделяющей вихревой слой и внешнее потенциальное течение, выполнены условия "склеивания" решений (5) и (6):

$$\alpha = \alpha_2, \quad [v_\varphi] = 0, \quad [v_r] = 0, \quad [p] = 0.$$

Здесь квадратные скобки означают скачок заключенных в них величин на границе раздела.

2. СИЛА РАЗРЕЖЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ПОЛУЦИЛИНДР НА ПЛОСКОСТИ

Пусть снизу на цилиндр действует давление торможения

$$y = 0, \quad \bar{p} = \bar{p}_\infty + 1. \quad (7)$$

Подставим выражения (4) и (7) для давления в следующее соотношение для вертикальной силы, действующей на полуцилиндр:

$$F_y = -\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \oint p(\vec{n} \cdot \vec{e}_y) dl. \quad (8)$$

Здесь \vec{e}_y – единичный вектор в направлении оси y ; \vec{n} и dl – внешняя нормаль и элемент длины периметра. В выражении (8) интегрирование проводится по периметру z -сечения полуцилиндра:

$$F_y = \rho U_\infty^2 r_1 \left[\frac{\pi}{2Fr} + \frac{8}{3} \frac{\alpha_2^2 N_1^2(\alpha_2)}{\alpha_1^2 N_1^2(\alpha_1)} \right]. \quad (9)$$

Напомним, что в выражении (9) величина α_2 является ближайшим к α_1 корнем уравнения (5). Если

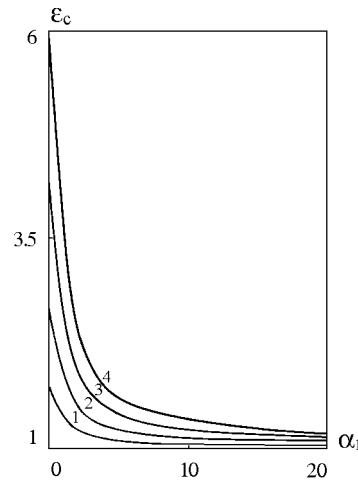


Рис. 2. Зависимость $\varepsilon_c = \varepsilon_c(Fr)$; $Fr = 0.1(1), 0.3(2), 1(3), 10(4)$

вторичное течение около цилиндра отсутствует и поток всюду потенциален, то для силы разрежения, действующей на полуцилиндр, получаем следующее выражение:

$$F_y^{\text{pot}} = \rho U_\infty^2 r_1 \left(\frac{\pi}{2Fr} + \frac{8}{3} \right). \quad (10)$$

Из соотношений (9) и (10) следует

$$\varepsilon_c = \frac{1}{3\pi + 16Fr} \left[3\pi + 16 \frac{\alpha_2^2 N_1^2(\alpha_2)}{\alpha_1^2 N_1^2(\alpha_1)} Fr \right],$$

$$\varepsilon \equiv \frac{F_y}{F_y^{\text{pot}}}. \quad (11)$$

Анализ выражения (11) показал, что при фиксированном значении числа Фруда величина ε_c является убывающей функцией безразмерного радиуса полуцилиндра α_1 . При этом с ростом величины α_1 величина ε_c приближается к единице. Из выражения (11) также следует, что при фиксированном значении радиуса полуцилиндра α_1 величина ε_c является нарастающей функцией числа Фруда. При этом с ростом числа Фруда величина ε_c стремится к значению $[\alpha_2 N_1(\alpha_2) / \alpha_1 N_1(\alpha_1)]^2$. Эти особенности зависимости величины ε_c от параметров α_1 и Fr иллюстрируют рис. 2 и 3.

3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Как известно [4, 17, 19], стационарная осесимметричная ($\partial/\partial\varphi = 0$) задача идеальной несжимаемой жидкости в сферических координатах (R, Θ, φ) при отсутствии азимутальной закрутки

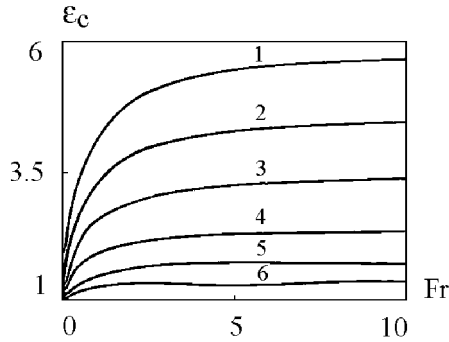


Рис. 3. Зависимость $\varepsilon_c = \varepsilon_c(Fr)$; $\alpha_1 = 0.1(1), 0.5(2), 1(3), 2(4), 4(5), 8(6)$

($v_\varphi = 0$) сводится к следующему нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка, служащему для определения функции тока ψ :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin\Theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \frac{1}{\sin\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) \psi = R^2 \sin^2 \Theta \frac{dW}{d\psi},$$

$$\vec{v} = \nabla \psi \times \frac{\vec{e}_\varphi}{R \sin \Theta}, \quad p = \rho \left(W - gx - \frac{v^2}{2} \right). \quad (12)$$

Здесь переменная Бернулли $W(\psi)$ является некоторой заданной функцией своего аргумента; \vec{e}_φ – орт в азимутальном направлении; ось x направлена против вектора силы тяжести. Пусть выполнены условия

$$W = W_0 - 10b_0\psi, \quad (13)$$

где величины W_0 и b_0 – постоянные. Тогда уравнение (12) становится линейным неоднородным:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin\Theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \frac{1}{\sin\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) \psi = -10b_0 R^2 \sin^2 \Theta. \quad (14)$$

На основе соотношений (12)–(14) получаем следующее точное решение уравнений динамики несжимаемой жидкости, описывающее вторичное течение около полусферы радиуса R_1 на плоскости $x = 0$ (см. рис. 4):

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \bar{p}_\infty + 1 - \frac{15\bar{\psi}}{2\bar{D}_1 + \bar{D}_2 - 4} - \\ &- \frac{2}{Fr} \frac{\bar{R}}{R_1} \sin\Theta \cos\varphi - \bar{v}_R^2 - \bar{v}_\Theta^2; \\ \bar{\psi} &= \frac{3(\bar{D}_1 \bar{R}^2 - \frac{\bar{D}_2}{\bar{R}} - \bar{R}^4)}{2\bar{D}_1 + \bar{D}_2 - 4} \sin^2 \Theta, \end{aligned}$$

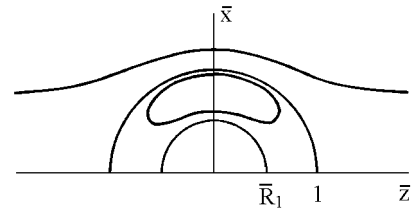


Рис. 4. Поток вокруг полусферы на плоскости; $\bar{z} = (z/R_2)$, $\bar{x} = (x/R_2)$

$$\bar{v}_R = \frac{3(\bar{D}_1 - \frac{\bar{D}_2}{\bar{R}^3} - \bar{R}^2)}{2\bar{D}_1 + \bar{D}_2 - 4} \cos\Theta,$$

$$\bar{v}_\Theta = -\frac{3(\bar{D}_1 + \frac{\bar{D}_2}{2\bar{R}^3} - 2\bar{R}^2)}{2\bar{D}_1 + \bar{D}_2 - 4} \sin\Theta,$$

$$\bar{D}_1 = \frac{1 - \bar{R}_1^5}{1 - \bar{R}_1^3}, \quad \bar{D}_2 = \frac{\bar{R}_1^3(1 + \bar{R}_1)}{1 + \bar{R}_1 + \bar{R}_1^2}$$

$$Fr = \frac{U_\infty^2}{gR_1}, \quad \bar{R} = \frac{R}{R_2}, \quad \bar{R}_1 = \frac{R_1}{R_2},$$

$$\bar{R}_1 \leq \bar{R} \leq 1, \quad 0 \leq \Theta \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\bar{\psi} = \frac{2\psi}{R_2^2 U_\infty^2}, \quad \bar{v}_R = \frac{v_R}{U_\infty}, \quad \bar{v}_\Theta = \frac{v_\Theta}{U_\infty},$$

$$\bar{p} = \frac{2p}{\rho U_\infty^2}, \quad \bar{p}_\infty = \frac{2p_\infty}{\rho U_\infty^2}. \quad (15)$$

Здесь U_∞ – скорость на бесконечности; p_∞ – давление на бесконечности при $\Theta = 0$; R_2 – внешний радиус вихревого слоя, окружающего полусферу. Ось z выбрана параллельной скорости на бесконечности. Вне вихревого слоя течение потенциально:

$$\bar{\psi} = \left(\bar{R}^2 - \frac{1}{\bar{R}} \right) \sin^2 \Theta, \quad \bar{v}_R = \left(1 - \frac{1}{\bar{R}^3} \right) \cos\Theta,$$

$$\bar{v}_\Theta = -\left(1 + \frac{1}{2\bar{R}^3} \right) \sin\Theta,$$

$$\bar{p} = \bar{p}_\infty + 1 - \frac{2}{Fr} \frac{\bar{R}}{R_1} \sin\Theta \cos\varphi - \bar{v}_R^2 - \bar{v}_\Theta^2,$$

$$\bar{R} \geq 1, \quad 0 \leq \Theta \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

На границе, разделяющей вихревой слой и внешнее потенциальное течение, выполнены условия ”склеивания” решений (15) и (16):

$$\bar{R} = 1, \quad [v_\Theta] = 0, \quad [v_R] = 0, \quad [p] = 0.$$

Здесь квадратные скобки означают скачок заключенных в них величин на границе раздела.

4. СИЛА РАЗРЕЖЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ПОЛУСФЕРУ НА ПЛОСКОСТИ

Пусть снизу на полусферу действует давление торможения:

$$x = 0, \quad \bar{p} = \bar{p}_\infty + 1. \quad (17)$$

Подставим выражения (15) и (17) для давления в следующее соотношение для вертикальной силы, действующей на полусферу:

$$F_x = -\frac{\rho U_\infty^2}{2} \oint \oint \bar{p} (\bar{n} \cdot \bar{e}_x) dS \quad (18)$$

В выражении (18) интегрирование проводится по поверхности полусферы (\bar{n} и dS – внешняя нормаль и элемент площади поверхности). В результате получаем

$$F_x = \pi \rho U_\infty^2 R_1^2 \left(\frac{2}{3Fr} + \frac{27}{32} \varepsilon_v^2 \right), \quad (19)$$

$$\varepsilon_v = \frac{3 + 6\bar{R}_1 + 4\bar{R}_1^2 + 2\bar{R}_1^3}{2 + 4\bar{R}_1 + 6\bar{R}_1^2 + 3\bar{R}_1^3}.$$

Если вторичное течение около полусферы отсутствует и поток всюду потенциальный, то для вертикальной силы, действующей на полусферу, получаем следующее выражение:

$$F_x^{\text{pot}} = \pi \rho U_\infty^2 R_1^2 \left(\frac{3}{3Fr} + \frac{27}{32} \right). \quad (20)$$

Из соотношений (19) и (20) следует

$$\varepsilon_S = \frac{64 + 81\varepsilon_v^2 Fr}{64 + 81Fr}, \quad \varepsilon_S \equiv \frac{F_x}{F_x^{\text{rot}}}. \quad (21)$$

Анализ выражения (21) показал, что при фиксированном значении числа Фруда величина ε_S является убывающей функцией безразмерного радиуса полусферы \bar{R}_1 . При этом с приближением величины \bar{R}_1 к единице величина ε_S также стремится к единице. В то же время, из выражения (21) следует, что при фиксированном значении безразмерного радиуса полусферы \bar{R}_1 величина ε_S является нарастающей функцией числа Фруда. При этом с ростом числа Фруда величина ε_S стремится к значению ε_v^2 . Эти особенности зависимости величины ε_S от параметров \bar{R}_1 и Fr иллюстрируют рис. 5 и 6.

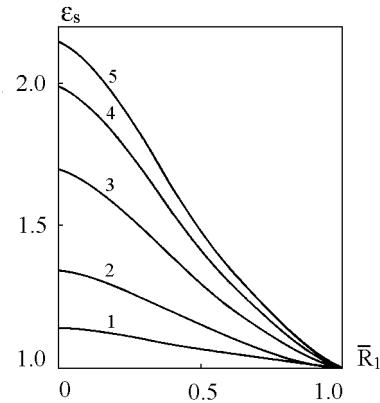


Рис. 5. Зависимость $\varepsilon_s = \varepsilon_s(\bar{R}_1)$; $Fr = 0.1(1), 0.3(2), 1(3), 10(5)$

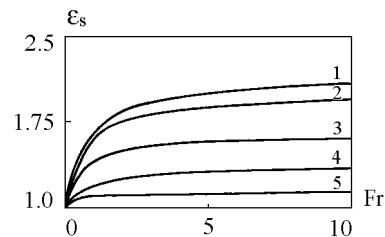


Рис. 6. Зависимость $\varepsilon_s = \varepsilon_s(Fr)$; $\bar{R}_1 = 0.1(1), 0.2(2), 0.4(3), 0.8(5)$

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Выше отмечалось, что величины $\varepsilon_S(\alpha_1, Fr)$ и $\varepsilon_S(\bar{R}_1, Fr)$ при фиксированном числе Фруда являются убывающими функциями параметров α_1 и \bar{R}_1 соответственно. Это обстоятельство соответствует сделанному в работе Чаплыгина [31] выводу о том, что меньшие предметы (камни) переносятся вихревым потоком легче, чем большие. Заметим, что в статье [18] нумерация кривых на рис. 3 должна быть изменена: $5 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 1 \rightarrow 5$.

Сравнивая абсолютные значения величин ε_c и ε_S , можно видеть, что в случае обтекания полуцилиндра влияние вторичного течения на увеличение силы разрежения существенно больше, чем в случае обтекания полусферы. Как хорошо известно, при потенциальном обтекании цилиндр вызывает более значительные возмущения потока, чем сфера. Лойцянский [13] это обстоятельство поясняет

тем, что сечение цилиндра, нормальное к потоку, бесконечно, а сферы – ограничено. Видно, что эта тенденция сохраняется и в случае наличия вторичных течений при обтекании полуцилиндра и полу-сферы на плоскости.

1. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости.– М.: Мир, 1973.– 760 с.
2. Белоцерковский С.М., Гиневский А.С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей.– М.: Издательская фирма "Физико-математическая литература", 1995.– 368 с.
3. Белов И.А., Исаев С.А., Королев В.А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости.– Л.: Судостроение, 1989.– 364 с.
4. Васильев О.Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков.– М.: Госэнергоиздат, 1958.– 144 с.
5. Волшаник В.В., Зуйков А.Л., Мордасов А.П. Закрученные потоки в гидротехнических сооружениях.– М.: Энергоатомиздат, 1990.– 280 с.
6. Гольдштик М.А. Вихревые потоки.– Новосибирск: Наука, 1981.– 368 с.
7. Гупта А., Лилли Д., Сайред Н. Закрученные потоки.– М.: Мир, 1987.– 592 с.
8. Жуков М.Ф., Коротеев А.С., Урюков Б.А. Прикладная динамика термической плазмы.– Новосибирск: Наука СО, 1975.– 300 с.
9. Зигангареева Л.М., Киселев О.М. О безотрывном обтекании тела вращения с одновременным отбором и выбросом жидкости // Изв.АН (Россия). – Механика жидк. и газа.– 2000.– N 1.– С. 14–21.
10. Кирхгоф Г. Механика.– М.: Изд-во АН СССР, 1962.– 404 с.
11. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели.– М.: Наука, 1973.– 416 с.
12. Ламб Гидродинамика.– М.– Л.: Гостехтеориздат, 1947.– 928 с.
13. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987.– 840 с.
14. Меркулов В.И. Управление движением жидкости.– Новосибирск: Наука, 1983.– 174 с.
15. Савченко Ю.Н. Перспективы методов снижения гидродинамического сопротивления // Прикладна гідромеханіка.– 1999.– 1, 4.– С. 42–50.
16. Садовский В.С. Плоские вихрепотенциальные течения невязкой жидкости и их приложения // Труды ЦАГИ им.проф. Н.Е. Жуковского.– 1989.– Вып.2447.– С. 108.
17. Салтанов Н.В. Аналитическая гидромеханика.– Киев: Наук. думка, 1984.– 200 с.
18. Салтанов Н.В. Влияние вторичного течения у полусферы на плоскости на силу разрежения, действующую на нее со стороны потока // Математ. моделир. в образовании, науке и промышленности. Сб. научн. трудов.– Санкт-Петербургское отделение НАН.– Высш. шк.– 2000.– С. 164–167.
19. Салтанов Н.В., Горбань В.А. Вихревые структуры в жидкости: Аналитические и численные решения.– Киев: Наук. думка, 1993.– 242 с.
20. Салтанов Н.В., Ефремова Н.С., Салтанов В.Н. Численно-аналитическое исследование потенциального обтекания цилиндра, окруженного вихревым слоем // Труды Международ. конф. "Математика в индустрии".– Таганрог. пед.ин-т.– 1998.– С. 275–277.
21. Салтанов Н.В., Ефремова Н.С., Салтанов В.Н. Вторичный поток вокруг цилиндра при наличии азимутальной закрутки и его связь с вихрем Чаплыгина // Нелинейные граничные задачи матем. физики и их приложения.– Сб. научн. трудов Института математики НАНУ.– 1999.– С. 213–216.
22. Салтанов Н.В., Ефремова Н.С., Салтанов В.Н. Вторичное течение вокруг сферы при наличии спиральности // Доклады НАН Украины.– 1999.– 9.– С. 59–63.
23. Салтанов Н.В., Салтанов В.Н. Вихрь с азимутальной закруткой на сфере во внешнем потенциальном потоке и его связь с вихрем Хилла // ДАН (Россия).– 1999.– 367, N 3.– С. 349–352.
24. Салтанов Н.В., Салтанов В.Н. Вторичное течение у полуцилиндра на плоскости // Проблемы теор. и прикл. гидродинамики. Тезисы докл. Всерос. науч.-техн. конф.– Краснодар: Кубанск. гос. агр. ун-т.– 2000.– С. 27.
25. Седов Л.И. Об обтекании идеальной жидкостью тела со встречной струей // ДАН СССР.– 1972.– 206, N 1.– С. 41–42.
26. Седов Л.И. Механика сплошной среды.– В 2-х т. М.: Наука, 1976–Т.2.– 576 с.
27. Степанов Г.Ю. Построение безотрывно обтекаемых тел в комплексе с двигателем // Современные проблемы механики. Сборник к 90-летию Л.И. Седова.– М.: НИИ Мех. МГУ.– 1998.– С. 108–115.
28. Сычев В.В., Рубан А.И., Королев Г.Л. Асимптотическая теория отрывных течений.– М.: Наука, 1987.– 256 с.
29. Таганов Г.И. О предельных течениях вязкой жидкости со стационарными срывными зонами при $Re \rightarrow \infty$ // Уч.зап. ЦАГИ.– 1971.– 1, N 3.– С. 1–14.
30. Чаплыгин С.А. Один случай вихревого движения жидкости. Собрание сочинений. Т.П.– М.– Л.: Гостехиздат, 1948.– 155–165 с.
31. Чаплыгин С.А. Вихревой поток, переливающийся через препятствие в форме круглого полуцилиндра. Собрание сочинений. Т.П.– М.– Л.: Гостехиздат, 1948.– 537–545 с.
32. Meleshko V.V., van Heijst G.T.F. On Chaplygin's investigations of twodimensional vortex structures in an inviscid fluid // J. Fluid Mechanics.– 1994.– 272.– P. 157–182.
33. Sheen H.J., Chen W.J., Jeng S.Y. Recirculation zones of unconfined and combined annular swirling jets // AIAA Journal.– 1996.– 34, 3.– P. 572–579.
34. Van Heijst G.T.F. Voortgezette Stromingsleer.– Eindhoven: Technische Universitet, 1992.– 184 p. (in German.)