

УДК 551.511.001: 551.593

В'ЯЗКО-ДИФУЗІЙНА СТАДІЯ ЕВОЛЮЦІЇ ДВОВИМІРНОЇ ПЕРЕМІШАНОЇ ПЛЯМИ В ПОЛІ ВНУТРІШНЬОЇ ХВИЛІ

П. В. ЛУК'ЯНОВ*, В. С. МАДЕРИЧ**, О. Г. СТЕЦЕНКО*

* Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

** Інститут проблем математичних машин і систем НАН України

Одержано 15.02.2000 ◊ Переглянуто 05.01.2001

Досліджено особливості в'язко-дифузійної стадії еволюції двовимірної перемішаної області в рідині (плями), коли вона знаходиться в полі монохроматичної внутрішньої хвилі (ВХ). Побудована фізико-математична модель для випадку максимального впливу ВХ на пляму, коли характерний горизонтальний розмір плями значно менший від довжини внутрішньої хвилі. Виконані чисельні розрахунки для шару скінченої товщини лінійно-стратифікованої рідини. Показано, що з достатнім ступенем точності впливом ВХ на еволюцію перемішаних плям можна знехтувати.

Исследованы особенности вязко-диффузионной стадии эволюции двухмерной перемешанной области в жидкости (пятна), когда она находится в поле монохроматической внутренней волны (ВВ). Построена физико-математическая модель для случая максимального влияния ВВ на пятно, когда характерный горизонтальный размер пятна значительно меньше длины внутренней волны. Выполнены численные расчеты для слоя конечной толщины линейно-стратифицированной жидкости. Показано, что с достаточной степенью точности влиянием ВВ на эволюцию перемешанных пятен можно пренебречь.

Peculiarities of visco-diffusive stage of a two-dimensional mixed patch, when it is present in the field of a monochrome internal wave (IW), have been studied. A physico-mathematical model has been plotted for the case of maximum effect of an IW on a patch when characteristic horizontal dimension of the patch is much less than the wave length. Numerical computations have been done for a linear stratified fluid layer of finite thickness. It has been shown that the effect of an IW on evolution of mixed patches may be neglected with sufficient degree of accuracy.

ВСТУП

Процеси обміну мас і енергії, які постійно відбуваються в діяльному шарі морів та океанів, обумовлені рядом механізмів різної фізичної природи. Серед них важливе місце займає крупномасштабна та дрібномасштабна турбулентність [1, 2]. Турбулентний обмін часто пов'язаний з еволюцією турбулентних зон, які утворюються при втраті стійкості руху морського середовища. Слід відмітити, що турбулентність в океані, за винятком перемішаного приповерхневого шару та придонного пограничного шару, має яскраво виражений переміжний характер, тобто існує у вигляді локалізованих областей (плям) різних масштабів [1, 3]. Тому процеси обміну, обумовлені такими областями, представляють інтерес при вивченні діяльного шару океану.

На протязі всього періоду своєї еволюції турбулентна пляма в стратифікованому середовищі є областю, де розподіл густини відмінний від того, що має місце зовні від неї. При проходженні через таку область внутрішніх хвиль, які завжди присутні в океані, вона стає джерелом їх розсіяння і утворення поля розсіяних хвиль. В той самий час, проходження через турбулентну пляму внутрішньої хвилі означає періодичну змінність в часі характеру зовнішньої до плями стратифікації

та поля швидкості середовища, що, в свою чергу, впливає на характер еволюції такої плями. Життя турбулентної плями з моменту її виникнення складається з декількох характерних стадій – початкової, коли відбувається падіння частинок рідини всередині плями на свій рівноваговий рівень і розтікання в горизонтальному напрямі, проміжної, коли сили плавучості врівноважуються в основному силами інерції і в деякій мірі випромінюванням ВХ, в'язкої, коли сили плавучості зрівноважуються силами в'язкості, і в'язко-дифузійної, коли ефекти молекулярної дифузії стають співвимірними з ефектами плавучості та в'язкості.

Найбільш цікавою з точки зору дослідження вказаної взаємодії плями та ВХ виявляється в'язко-дифузійна стадія еволюції плями, оскільки вона є найбільш тривалою в часі з характерним масштабом $10^2 - 10^4$ с. Особливість цієї стадії полягає в ламінарному режимі руху всередині плями. Відношення характерної товщини l_v плями до її горизонтального розміру l_H становить величину $l_v/l_H = \delta \approx 10^{-2}$. При цьому характерні значення товщин плям складають величину десятків сантиметрів - метрів [3].

Оскільки процеси еволюції плям та розсіяння ВХ відбуваються одночасно, існує необхідність оцінки впливу обумовлених ВХ періодично-змінних у часі структури та характеру руху зов-

нішнього до плями середовища на її еволюцію. Така оцінка є необхідною для коректної постановки задач розсіяння ВХ на такого роду неоднорідностях середовища.

Процеси розсіяння лінійних ВХ на областях неоднорідностей густини, до яких належить також клас перемішаних плям або їх ансамблів, розглядалися в роботах [4-9]. Особливістю цих досліджень є прийняття "замороженості" в часі структури неоднорідностей густини всередині плями, що не відповідає дійсності і тому стає недоліком таких моделей. Дослідження власне еволюції перемішаних турбулентних плям у стійко стратифікованому середовищі представлено достатньо обширною бібліографією. Детальний аналіз фізики цього явища, дослідження різних його стадій виконано в [3]. З останніх досліджень слід відмітити роботу [10], де в лінійному наближенні в єдиній постановці виконані розрахунки процесу еволюції перемішаної плями протягом двох стадій - в'язкої та в'язко-дифузійної. З одержаних результатів випливає, що характерним масштабом часу в'язко-дифузійної стадії еволюції є величина $T_i = \nu l_v^{-2} N^{-2} \delta^{-2}$, де ν - кінематична в'язкість середовища; N - частота В'айсяля-Брента. Відношення цього масштабу часу до характерного масштабу часу ВХ T_w , який є величиною $\sim 10^2$, може становити величину $\delta_1 = T_i/T_w \sim 1 \div 100$. Одержані в [4-9] результати не містять характерного T_i . Однак припущення "замороженості" структури всередині плями та незмінності її геометрії фізично відповідає значенню $T_i = \infty$. Тому вказані результати лише якісно описують поле розсіяних ВХ на плямах для ситуацій реального океану з $\delta_1 \gg 1$.

Характер взаємодії перемішаної плями та внутрішньої хвилі визначається співвідношенням характерних лінійних та часових масштабів хвилі й плями, ступенем перемішаності середовища всередині плями та параметрами стратифікації середовища. Зважаючи на відсутність резонансних режимів при взаємодії ВХ з плямою (ентрузійний процес не є періодичним), в даного роду задачах мають місце три характерні ситуації, які визначаються відношенням характерних розмірів плями l_v і l_H та хвилі l_w :

$$1. l_v \ll l_H \ll l_w \quad 2. l_v \ll l_H \sim l_w$$

$$3. l_v \sim l_w \ll l_H$$

В першому випадку має місце максимальний ефект впливу ВХ на еволюцію плями, оскільки зі зменшенням довжини ВХ наростає вплив ефекту одночасної присутності в межах плями кінематичної (поле швидкості) та динамічної (поле стра-

тифікації) дії (зі сторони ВХ на пляму) протилежних знаків. В силу малості розмірів плями порівняно з довжиною набігаючої ВХ, розсіюванням останньої можна знехтувати. Отже, в ситуації 1 має місце односторонній максимальний вплив ВХ на пляму. У другому випадку вплив ВХ на пляму, згідно вищесказаного, значно менший, однак еволюція самої плями вже істотно впливає на формування розсіяної хвилі, причому характер формування поля цих хвиль визначається величиною параметра δ_1 . Тому тут слід окремо розглядати ситуації $\delta_1 \sim 1$ і $\delta_1 \gg 1$. Накінець, у третьому випадку впливом ВХ на еволюцію плями можна знехтувати. Тут має місце трансформація набігаючої ВХ на плямі, що відповідає ситуації максимального впливу плями на хвилю. Саме такий випадок взаємодії розглянуто в роботі [9].

В даній роботі розглядається перша ситуація з метою оцінки максимального впливу монохроматичної ВХ на еволюцію перемішаної плями на її в'язко-дифузійній стадії. Досліджувана пляма знаходиться в шарі скінченої товщини лінійно-стратифікованої рідини з $N = \text{const}$.

1. МАТЕМАТИЧНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Система рівнянь, яка описує динаміку двовимірної плями на в'язкій та в'язко-дифузійній стадії в полі ВХ, складається з рівнянь Нав'є-Стокса в наближенні Бусинеска, рівняння нерозривності та рівняння плавучості:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \\ = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + b + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u \frac{\partial b}{\partial x} + w \frac{\partial b}{\partial z} + N^2 w = \chi \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} \right). \quad (4)$$

Тут u, w - поздовжня і вертикальна складові збудженої швидкості; $p, b = -g(\rho - \bar{\rho})/\bar{\rho}$ - відхилення тиску і плавучості від незбудованих величин \bar{p} і \bar{b} ; ρ - густина; $\bar{\rho}$ - незбудована густина, яка в даному випадку описується лінійною функцією координати z (залежить від температури або солоності); ρ_0 - деяке характерне значення густини; $N^2 = \partial \bar{b} / \partial z$

– частота В'яйсяля-Брента; ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості; χ – коефіцієнт температуропровідності або дифузії солі.

В даній задачі взаємодіють два типи різномасштабних рухів – хвильовий та інтрузійний (еволюція шарових структур – плям). Внутрішні хвилі можна виділити у припущенні ізотропності вертикального l_{wv} і горизонтального l_{wH} масштабів ($l_{wv} = l_{wH} = l_g$), з характерним масштабом швидкості V_g , характерним масштабом часу N^{-1} ; масштабом тиску $\rho V_g N l_g$ і масштабом плавучості $V_g N$. Тоді відповідна безрозмірна система рівнянь (1) – (4) має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Fg \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + Re^{-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + Fg \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + b + Re^{-1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + Fg \left(u \frac{\partial b}{\partial x} + w \frac{\partial b}{\partial z} \right) + w = (RePr)^{-1} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} \right). \quad (8)$$

Тут $Fg = V_g/Nl_g$ – число Фруда; $Re = V_g l_g/\nu$ – число Рейнольдса; $Pr = \nu/\chi$ – число Прандтля. Для $Fg \ll 1$ і $Re \gg 1$ система (5) – (8) спрощується до вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} - b = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + w = 0. \quad (12)$$

Еволюція шарових структур (плям) відбувається за умови сильної анізотропії ($\delta \ll 1$) і при малих числах $F = V_H/Nl_H$, при цьому визначальними для цих процесів є баланс плавучості й в'язкості. Якщо ввести характерні масштаби: для горизонтальної координати – l_H ; для вертикальної координати – l_v ; для часу – $\nu l_v^{-2} N^{-2} \delta^{-2}$; для тиску – $\rho_0 \nu V_H l_H^{-1} \delta^2 \theta$; для горизонтальної швидкості – V_H ; для вертикальної швидкості – $V_H \delta$, для плавучості

– $\rho V_H l_v^{-2} \delta^{-1}$, де параметр $\theta = \nu V_H l_v^{-3} \delta^{-1}$ характеризує міру перемішаності всередині плями, то система (1) – (4) набуває вигляду

$$F^2 \left[\theta^{-2} \frac{\partial u}{\partial t} + \theta^{-1} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (13)$$

$$\delta F^2 \left[\theta^{-2} \frac{\partial w}{\partial t} + \theta^{-1} \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + b + \delta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \theta \left(u \frac{\partial b}{\partial x} + w \frac{\partial b}{\partial z} \right) + w = \epsilon \left(\delta^2 \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} \right). \quad (16)$$

Параметр $\epsilon = \nu \chi l_H^2 N^{-2} l_v^{-6}$ характеризує співвідношення між ефектами в'язкості, дифузії та силами плавучості.

Для випадку $F \ll 1, \delta \ll 1$ маємо систему рівнянь, яка описує еволюцію плями на її в'язко-дифузійній стадії [11]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} - b = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \theta \left(u \frac{\partial b}{\partial x} + w \frac{\partial b}{\partial z} \right) + w = \epsilon \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}. \quad (20)$$

Як видно, в даній задачі вкладом горизонтальної дифузії можна знехтувати.

З вигляду систем рівнянь (9) – (12) та (17) – (20) випливає, що наближена система рівнянь, яка описує одночасно і рух в полі ВХ, і еволюцію плями на в'язко-дифузійній стадії, в розмірній формі представляє собою "урізаний варіант" системи (1) – (4):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - b = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u \frac{\partial b}{\partial x} + w \frac{\partial b}{\partial z} + N^2 w = \chi \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}. \quad (24)$$

Ця система включає різномасштабні складові як інтрузійного [10], так і хвильового [11] процесів. Після відповідного масштабування членів рівнянь і оцінки їх відносного порядку величини з неї випливає система (9) – (11) для хвильового руху та система (17) – (20) для інтрузійного руху. Саме система (21) – (24) буде предметом подальшого аналізу.

Шуканий розв'язок представляється у вигляді суми хвильового та інтрузійного складових:

$$u = u_i + u_w, \quad w = w_i + w_w, \\ p = p_i + p_w, \quad b = b_i + b_w, \quad (25)$$

де індекс "i" вказує на інтрузійну природу руху, а "w" – на хвильову. Хвильова складова вважається заданою, що якраз і відповідає випадку одностороннього впливу ВХ на еволюцію плями.

При проходженні внутрішньої хвилі центр плями (x_0, z_0) буде описувати певну траєкторію, що визначається складовими швидкості хвильового процесу $u_{w0}(x_0, z_0, t)$ та $w_{w0}(x_0, z_0, t)$ в цій точці. Поле хвильової складової швидкості в області плями може бути представлено як

$$u_w(x, z, t) = u_{w0}(x_0, z_0, t) + u_{w*}(x, z, t); \\ w_w(x, z, t) = w_{w0}(x_0, z_0, t) + w_{w*}(x, z, t). \quad (26)$$

Якщо перейти в рухому систему координат з початком координат в центрі плями, то після підстановки (25) у систему (21) – (24), враховуючи (26) та вигляд рівнянь хвильового руху (9) – (12), одержимо після переходу до інтрузійних масштабів систему рівнянь, яка складається з рівнянь (17) – (19) та рівняння для плавучості у формі

$$\frac{\partial b_i}{\partial t} + \theta \left(u_i \frac{\partial b_i}{\partial x} + w_i \frac{\partial b_i}{\partial z} + u_i \frac{\partial b_w}{\partial x} + w_i \frac{\partial b_w}{\partial z} + u_{w*} \frac{\partial b_i}{\partial x} + w_{w*} \frac{\partial b_i}{\partial z} \right) + w_i = \epsilon \frac{\partial^2 b_i}{\partial z^2}. \quad (27)$$

В даному дослідженні розглядається шар скінченної товщини H лінійно-стратифікованої рідини з $N = \text{const}$, в якому перемішана пляма міститься на горизонті, достатньо віддаленому від границь області, щоб можна було знехтувати їх впливом на еволюцію плями. Система координат вибрана так, що її початок знаходиться на верхній границі області рідини, вісь z направлена вгору і координата $x_0 = 0$. Внутрішня хвиля, яка поширюється в додатньому напрямку вісі x , задається у вигляді

$$\eta_w = a f_n(z, k) \cos[kx - \omega_n(k)t];$$

$$b_w = -a f_n(z, k) \cos[kx - \omega_n(k)t];$$

$$u_{w*} = \frac{a \omega_n}{k} f_n' \{ \cos[kx - \omega_n(k)t] - \cos[\omega_n(k)t] \};$$

$$w_{w*} = a \omega_n(k) f_n \{ \sin[kx - \omega_n(k)t] + \sin[\omega_n(k)t] \}.$$

Тут η_w – величина вертикального зміщення частинок рідини; $f_n(z, k)$ – власна функція відповідної лінійної крайової задачі для ВХ на власні значення; k – хвильове число набігаючої хвилі; a – амплітудний множник, n – номер хвильової моди ВХ; $\omega_n(k)$ – частота ВХ, яка визначається для заданого k у відповідності з дисперсійним співвідношенням.

Якщо з метою спрощення замінити верхню границю рідини нерухомою стінкою (наближення "твердої стінки"), то при заданій стратифікації для монохроматичних хвиль [11]

$$f_n(z, k) = \sin\left(\frac{\pi n z}{H}\right), \quad \omega_n(k) = \frac{k}{[(\pi n)^2 + k^2]^{1/2}}.$$

Якщо в системі рівнянь інтрузійного руху ввести до розгляду допоміжну функцію Q , таку, що

$$p_i = \frac{\partial^3 Q}{\partial z^3}, \quad b_i = \frac{\partial^4 Q}{\partial z^4}, \quad u_i = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z}, \quad w_i = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad (28)$$

то вона зводиться до одного рівняння відносно Q [10]. Враховуючи (27) – (29) та параметри набігаючої хвилі, це рівняння в інтрузійних масштабах набирає вигляду

$$\frac{\partial^5 Q}{\partial t \partial z^4} + A \sin(k \delta_2 x - \omega_n \delta_1^{-1} t) \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} - [1 - B \cos(k \delta_2 x - \omega_n \delta_1^{-1} t)] \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + C [\cos(k \delta_2 x - \omega_n \delta_1^{-1} t) - \cos(\omega_n \delta_1^{-1} t)] \frac{\partial^5 Q}{\partial x \partial z^4} + D [\sin(k \delta_2 x - \omega_n \delta_1^{-1} t) + \sin(\omega_n \delta_1^{-1} t)] \frac{\partial^5 Q}{\partial z^5} = \epsilon \frac{\partial^6 Q}{\partial z^6} - \theta \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} \frac{\partial^5 Q}{\partial x \partial z^4} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \frac{\partial^5 Q}{\partial z^5} \right), \quad (29)$$

де

$$A = a k \delta^{-1} f_n(z_0, k); \quad B = a f_n'(z_0, k); \\ C = a \omega_n k^{-1} (\delta_1 \delta_2)^{-1} f_n'(z_0, k); \\ D = a (\delta \delta_1 \delta_2)^{-1} \omega_n f_n(z_0, k); \\ \delta_1 = T_w / T_i = l_v^2 N \delta^2 / \nu; \quad \delta_2 = l_H / H.$$

З врахуванням малості l_v та умови достатньо віддаленого від границі середовища знаходження

прямою початковою і граничними умовами задачі приймаються аналогічними випадку нескінченного середовища:

$$u_i, w_i, p_i, b_i \rightarrow 0 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} &\text{при } [(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2]^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty, \\ &b_0(t, x, z) = b_{i0}(x, z) \quad \text{при } t = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

У визначенні допоміжної функції Q початкова умова (31) набуває вигляду

$$\frac{\partial^4 Q}{\partial z^4} = b_{i0}(x, z). \quad (32)$$

Вибір функції $b_{i0}(x, z)$ повинен задовольняти умову узгодження з рівнянням для Q -функції, причому всі похідні від Q -функції у рівнянні (29) повинні бути неперервними.

2. СПЕКТРАЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

Високий порядок нелінійного рівняння (29) та початкова умова (31) для розв'язання потребують використання достатньо ефективних методів. Одним з таких є спектральний метод, коли має місце відмова від виконання граничної умови на нескінченності та заміна її на умови періодичності. Для розглянутого типу задач цей метод застосовувався в роботах [12, 13]. Згідно умов періодичності

$$\begin{aligned} Q(x + 2l_x, z, t) &= Q(x, z, t), \\ Q(x, z + 2l_z, t) &= Q(x, z, t). \end{aligned} \quad (33)$$

У відповідності зі спектральним методом розв'язок задачі (29) – (32) для $Q(x, z, t)$ знаходиться у вигляді ($s = 1, 2$)

$$Q = \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N T(n_s, t) \exp[i\pi(n_{1x}x + n_{2z}z)], \quad (34)$$

де $n_{1x} = n_1/l_x$; $n_{2z} = n_2/l_z$.

Підставляючи представлення (34) у рівняння (29), отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь відносно функцій $T(n_1, n_2, t)$:

$$\begin{aligned} &\sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N (\pi n_{2z})^4 \frac{dT}{dt} + [(\pi n_{1x})^2 + \epsilon(\pi n_{2z})^6] T - \\ &-\pi^2 A \sin G n_{1x} n_{2z} T - B \pi^2 n_{1x}^2 \cos G + \\ &+ i\pi^5 C (\cos G - \cos G_0) n_{1x} n_{2z}^4 T + \end{aligned}$$

$$+ iD(\sin G + \sin G_0)\Phi = -\theta\pi^7 \times$$

$$\begin{aligned} &\times \left(\sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N n_{1x} n_{2z} \Phi \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N i n_{1x} n_{2z}^4 \Phi + \right. \\ &\left. + \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N n_{1x}^2 \Phi \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N \Phi \right), \end{aligned} \quad (35)$$

де

$$\begin{aligned} G &= k\delta_2 x - G_0; \quad G_0 = \omega_n(k)\delta_1^{-1}t; \\ \Phi(n_1, n_2, x, z, t) &= T(n_1, n_2, t) \exp[i\pi(n_{1x} + n_{2z})]. \end{aligned}$$

Якщо тепер скалярно помножити обидві частини рівняння (35) на $\exp[i\pi(n_{1x} + n_{2z})]$ та проінтегрувати по області періодичності $(x, z) \in [-l_x, l_x] \times [-l_z, l_z]$, отримаємо таку систему диференціальних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $T(n_1, n_2, t)$:

$$\begin{aligned} &\frac{dT}{dt} + (\pi n_{2z})^{-4} [(\pi n_{1x})^2 + \epsilon(\pi n_{2z})^6] T = \\ &= -\theta(\pi n_{2z})^{-4} \sum_{m_1=-N}^N \sum_{m_2=-N}^N T(m_s, t) \times \\ &\times T(n_1 - m_1, n_2 - m_2, t) \phi(n_1, n_2, m_1, m_2) - \\ &- A \pi^2 n_{1x} n_{2z} \frac{\sin(k\delta_2 l_x)}{k\delta_2 l_x} \sin[\omega_n(k)\delta_1^{-1}t] T - \\ &- B(\pi n_{1x})^2 \frac{\sin(k\delta_2 l_x)}{k\delta_2 l_x} \cos[\omega_n(k)\delta_1^{-1}t] T + \\ &+ iC \pi^5 n_{1x} n_{2z}^4 \left[\frac{\sin(k\delta_2 l_x)}{k\delta_2 l_x} - 1 \right] \cos[\omega_n(k)\delta_1^{-1}t] T + \\ &+ iD \left[\frac{\sin(k\delta_2 l_x)}{k\delta_2 l_x} - 1 \right] \sin[\omega_n(k)\delta_1^{-1}t] T \times \\ &\times \exp[i\pi(n_{1x} + n_{2z})], \end{aligned} \quad (36)$$

де

$$n_1, n_2 = 0, 1, 2 \dots N; \quad m_2 \neq n_2;$$

$$\phi = \frac{1}{\pi l_x^2 l_z} \left(\frac{n_2 - m_2}{l_z} \right)^4 (m_1 n_2 - n_1 m_2) m_1.$$

Початкове значення $T(n_1, n_2, 0)$ знаходиться підстановкою у початкову умову (32) представлення (34) та відповідного виразу для $b_0(x, z, 0)$. Початкове збурення плавучості задається у вигляді

$$b_0(x, z) = f_1(x)f_2(z). \quad (37)$$

Якщо вибрати

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 16a_x^4 \left(x - \frac{a_x}{2}\right)^4 \quad \text{при } |x| < \frac{a_x}{2}, \\ f_1(x) &= 0 \quad \text{при } x \in \left[-l_x, -\frac{a_x}{2}\right] \cup \left[\frac{a_x}{2}, l_x\right], \\ f_2(z) &= C(z - a_z)^4 z \quad \text{при } |z| < a_z, \\ f_2(z) &= 0 \quad \text{при } z \in \left[-l_z, -\frac{a_z}{2}\right] \cup \left[\frac{a_z}{2}, l_z\right], \end{aligned} \quad (38)$$

де $a_x(t)$ та $a_z(t)$ – відповідно змінні в часі горизонтальний та вертикальний розміри плями та розподіл b_0 узгоджуються з рівнянням для Q_0 ; всі похідні від Q , що знаходяться у рівнянні, є неперервними функціями.

Представимо у початковий момент розподіл плавучості $b_0(x, z, 0)$ у вигляді

$$\begin{aligned} b(x, z, 0) &= \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N [a_1(n_1) \cos(\pi n_{1x} x) + \\ &+ b_1(n_1) \sin(\pi n_{1x} x)] [a_2(n_2) \cos(\pi n_{2z} z) + \\ &+ b_2(n_2) \sin(\pi n_{2z} z)] = \\ &= \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N B_1(n_1) B_2(n_2) \exp[i\pi(n_{1x} x + n_{2z} z)], \end{aligned} \quad (39)$$

де $a_1(n_1), b_1(n_1), a_2(n_2), b_2(n_2)$ – коефіцієнти рядів Фур'є для функцій $f_1(x)$ та $f_2(z)$, а

$$\begin{aligned} B_1(n_1) &= \frac{1}{2}[a_1(n_1) - ib_1(n_1)], \quad n_1 \geq 0, \\ B_1(n_1) &= \frac{1}{2}[a_1(n_1) + ib_1(n_1)], \quad n_1 < 0, \\ B_2(n_2) &= \frac{1}{2}[a_2(n_2) - ib_2(n_2)], \quad n_2 \geq 0, \\ B_2(n_2) &= \frac{1}{2}[a_2(n_2) + ib_2(n_2)], \quad n_2 < 0. \end{aligned}$$

Тоді

$$Q(x, z, 0) = \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N, n_2 \neq 0}^N (\pi n_{2z})^{-4} B_1(n_1) \times \\ \times B_2(n_2) \exp[i\pi(n_{1x} x + n_{2z} z)]$$

Позначивши $B(n_1, n_2, 0) = B_1(n_1) B_2(n_2)$, загальний розв'язок задачі для довільного моменту часу t можна представити у вигляді

$$Q(x, z, t) = \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N, n_2 \neq 0}^N (\pi n_{2z})^{-4} \times \\ \times B(n_1, n_2, t) \exp[i\pi(n_{1x} x + n_{2z} z)], \quad (40)$$

$$b(x, z, t) = \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N, n_2 \neq 0}^N B(n_1, n_2, t) \times \\ \times \exp[i\pi(n_{1x} x + n_{2z} z)], \quad (41)$$

$$u(x, z, t) = \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N, n_2 \neq 0}^N i\pi n_{1x} (i\pi n_{2z})^{-3} \times \\ \times B(n_1, n_2, t) \exp[i\pi(n_{1x} x + n_{2z} z)], \quad (42)$$

$$w(x, z, t) = \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N, n_2 \neq 0}^N (\pi n_{1x})^3 (\pi n_{2z})^{-4} \times \\ \times B(n_1, n_2, t) \exp[i\pi(n_{1x} x + n_{2z} z)], \quad (43)$$

$$P(x, z, t) = -i \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N, n_2 \neq 0}^N (\pi n_{2z})^{-1} \times \\ \times B(n_1, n_2, t) \exp[i\pi(n_{1x} x + n_{2z} z)]. \quad (44)$$

З порівняння Q у виразах (39) та (40) видно, що

$$B(n_1, n_2, t) = (\pi n_{2z})^{-4} T(n_1, n_2, t). \quad (45)$$

Отже, коли знайдено $B(n_1, n_2, 0)$, то відомо

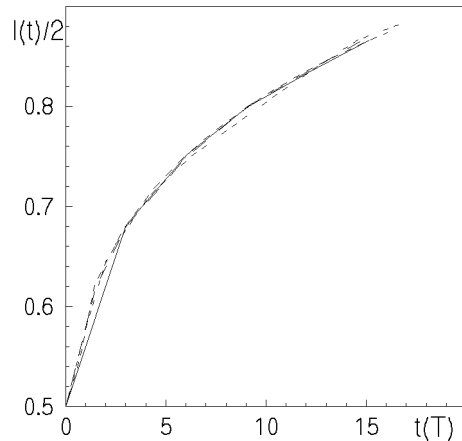


Рис. 1. Горизонтальний розмір плями в полі ВХ:
 - - - - - $n = 2; k = 3$; - - - - - $n = 2$;
 $k = 2$; — — — — $n = 3; k = 2$; — — — — без
 ВХ: $z_0 = -25$ м; $H = 100$ м; $l_v = 10\sqrt{10}$ см.

і $T(n_1, n_2, 0)$, а, отже, з рівняння (36) – і $T(n_1, n_2, t)$. Далі з (45) визначається $B(n_1, n_2, t)$ і з виразів (40) – (44) – загальний розв'язок задачі.

Для моделювання еволюції власне області плями необхідно відстежувати її геометрію. Це виконується за допомогою введення маркерів – мічених частинок рідини. В результаті розв'язання задачі знаходиться ейлерове поле швидкості $\vec{V} = \vec{V}(x, z, t)$. В кожний момент часу до кожної частинки границі плями додається елементарний приріст шляху, обумовлений вказаним по-

лем швидкості, який визначається виразами

$$\begin{aligned} x_T(t + \Delta t) &= x_T(t) + u(x_T, z_T)\Delta t, \\ z_T(t + \Delta t) &= z_T(t) + w(x_T, z_T)\Delta t. \end{aligned}$$

3. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЕВОЛЮЦІЇ ПЛЯМИ

Чисельне моделювання еволюції перемішаної плями в полі ВХ виконувалося для шару лінійно-стратифікованої рідини товщиною 100 м із значенням частоти В'айсяля-Брента $N = 10^{-2}$ с. Амплітуда ВХ задавалася рівною 5 м. Геометричні характеристики плями в початковий момент відповідають $l_v = 10$ см та $l_h = 10\sqrt{10}$ см при $l_H = 10$ м. На рис. 1 представлена зміна в часі половини горизонтального розміру плями для випадків відсутності ВХ (суцільна лінія) та при її наявності для різних номерів мод ВХ та значень хвильового числа. Як видно, в цілому вплив ВХ на геометрію плями незначний і знаходиться в наведених прикладах в межах відсотків; характерно, що при наявності ВХ горизонтальний розмір плями в різні моменти часу може бути як більшим, так і меншим відповідного розміру без наявності ВХ, тобто, має характер періодичних відхилень як в більший, так і в менший бік від того значення,

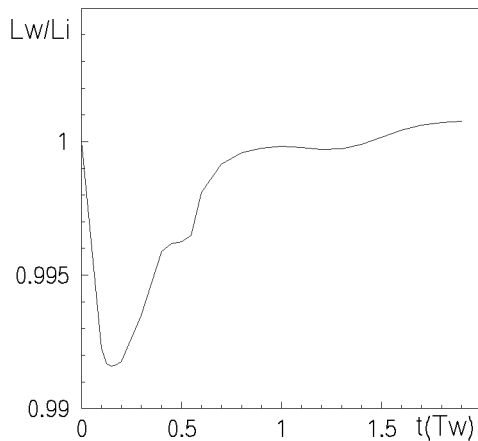


Рис. 2. Еволюція горизонтального розміру плями протягом перших двох періодів ВХ: $n = 3; k = 2; z_0 = -25\text{м}; H = 100\text{м}; l_v = 10\sqrt{10}\text{см}$

яке має місце за відсутності ВХ. Однак цей процес має характерну особливість, обумовлену періодичністю впливу ВХ. Як видно з рис. 2 та 3, де для тих же умов представлена відносна (по відношенню до значення розміру плями при відсутності ВХ) зміна горизонтального розміру плями

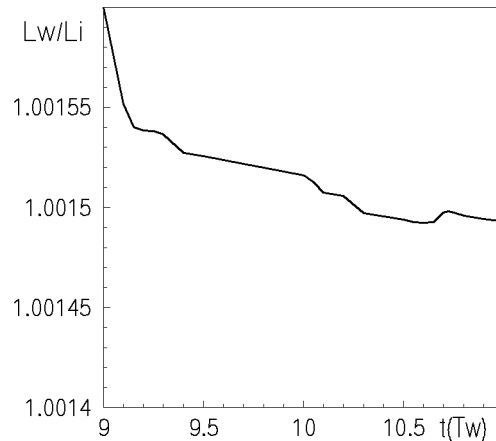


Рис. 3. Еволюція горизонтального розміру плями протягом проміжку часу $9T_w \leq t < 10T_w$; $n = 3; k = 2; z_0 = -25\text{м}; H = 100\text{м}; l_v = 10\sqrt{10}\text{см}$

на протязі перших двох періодів ВХ та проміжку часу від дев'ятого до одинадцятого періоду ВХ, зміна розміру плями має хоч і незначний за абсолютною величиною, але періодичний характер навколо деякого "середнього" значення, яке повільно змінюється. На рис. 2 та 3 масштаб ча-

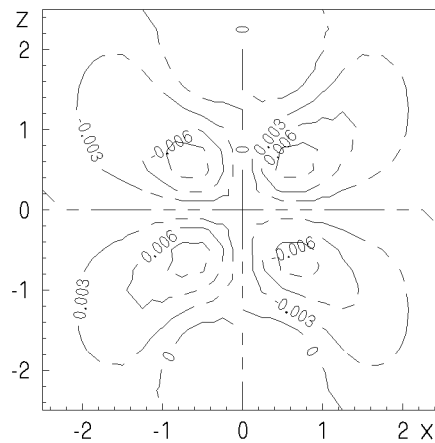


Рис. 4. Ізоліїї функції течії при $t = 10T_w$: $n = 3; k = 2; z_0 = -25\text{м}; H = 100\text{м}; l_v = 10\text{см}$

су дорівнює періоду хвилі. Характер течії всередині плями та в її околі практично не змінюється. Про це можна судити з розподілу функції течії $\psi = \partial Q / \partial x$ ($u = \partial \psi / \partial z, w = -\partial \psi / \partial x$) для різних моментів часу та горизонтів розташування плями. В околі плями спочатку формується чотири вихори (рис. 4), з часом формуються ще чотири (рис. 5), що подібно до випадку колапса переміша-

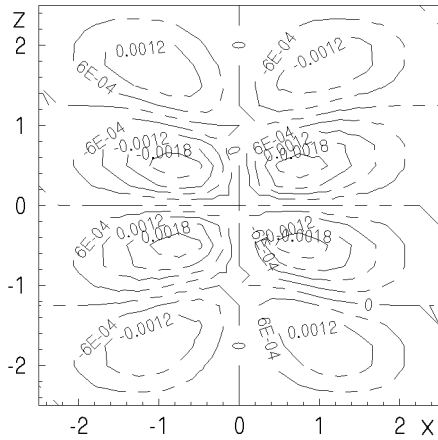


Рис. 5. Ізолінії функції течії при $t = 50T_w$: $n = 3$; $k = 2$; $z_0 = -25\text{м}$; $H = 100\text{м}$; $l_v = 10\text{см}$

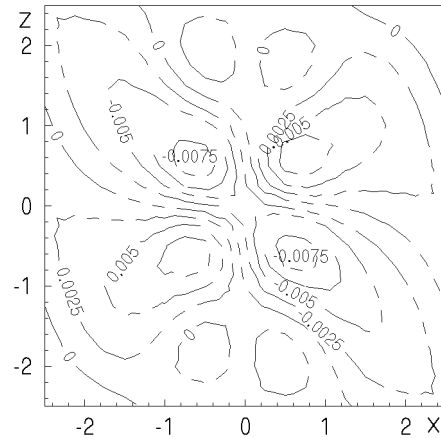


Рис. 7. Ізолінії функції течії при $t = 50T_w$: $n = 3$; $k = 2$; $z_0 = -25\text{м}$; $H = 100\text{м}$; $l_v = 10\text{см}$.

ної області ідеальної стратифікованої рідини [14]. Дослідження можливого впливу початкової фази ВХ на еволюцію плями показало, що конфігурація й орієнтація плями залишається незмінною, а от утворені в околі плями вихори відповідно з проходженням ВХ періодично перекошуються (як за, так і проти годинникової стрілки, як це видно з рис. 6 та 7) з наступним відновленням. Останнє обумовлене характером дії на рух середовища в околі плями поля швидкості ВХ. Про характер ево-

су. Порівняння початкового розподілу плавучості в плямі (рис. 8) для різних значень координати x з відповідним розподілом при $t = 5T_w$ (рис. 9) та $t = 20T_w$ (рис. 10) демонструє наявність процесу рестратифікації (відновлення первісного незбуреного профілю густини) на досліджуваній стадії еволюції плями. Характерною особливістю пред-

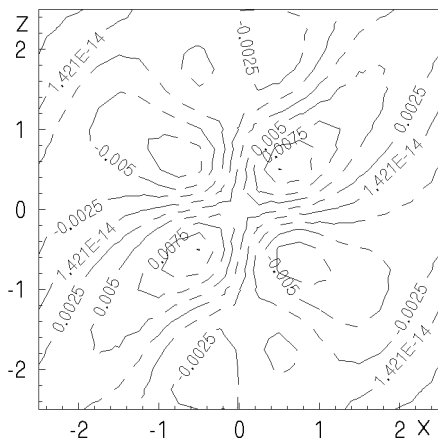


Рис. 6. Ізолінії функції течії при $t = 10.5T_w$: $n = 3$; $k = 2$; $z_0 = -50\text{м}$; $H = 100\text{м}$; $l_v = 10\text{см}$.

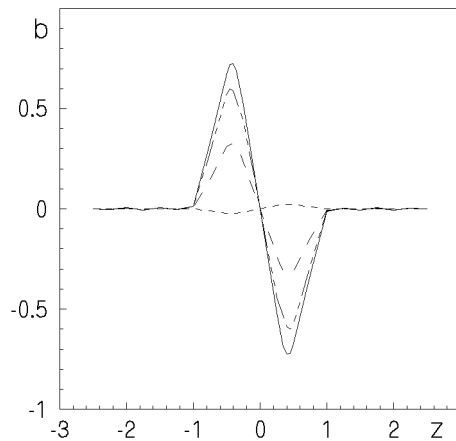


Рис. 8. Плавучість всередині плями при $t = 0$: $n = 2$; $k = 2$; $H = 100\text{м}$; $z_0 = -25\text{м}$; $l_v = 10\text{см}$.
 — $x = 0$; - - - $x = 0.25$;
 ···· $x = 0.5$; - · - · $x = 0.75$

люції розподілу плавучості всередині плями можна судити з рис. 8 – 10, де представлені результати відповідних розрахунків для різних моментів ча-

ставлених профілів є їх подібність в основній зоні плями. Це обумовлено дією в рамках даної моделі задачі лише механізму вертикальної дифузії. Таке наближення якраз і справедливе на в'язко-дифузійній стадії еволюції плями.

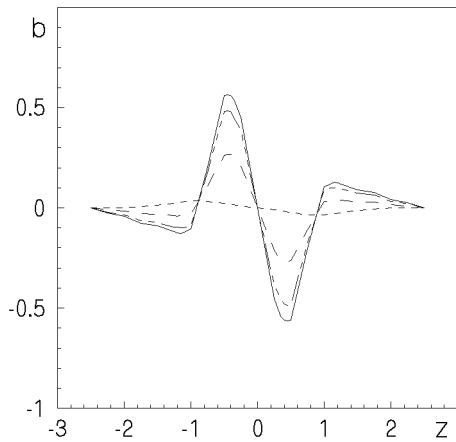


Рис. 9. Плавучість всередині плями при $t = 5T_w$:
 $n = 2; k = 2; H = 100\text{м.}; z_0 = -25\text{м.}; l_v = 10\text{см.}$
 — $x = 0$; - - - $x = 0.25$;
 — · — $x = 0.5$; · · · · · $x = 0.75$

На рис. 11 та 12 наведено характер зміни в часі відносних значень (по відношенню до їх значень за відсутності ВХ) потенціальної та кінетичної енергії рідини, яка знаходиться всередині плями протягом перших двох періодів проходження ВХ (за

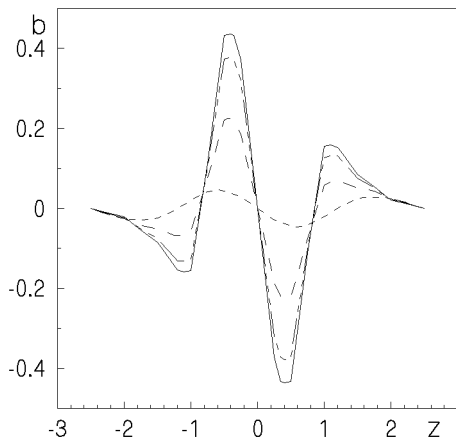


Рис. 10. Плавучість всередині плями при $t = 20T_w$: $n = 2; k = 2; H = 100\text{м.}; z_0 = -25\text{ м.}; l_v = 10\text{см.}$ — $x = 0$; - - - $x = 0.25$;
 — · — $x = 0.5$; · · · · · $x = 0.75$

масштаб часу взято період ВХ). При цьому величина кінетичної енергії визначалась з виразу

$$E_{ik} = \frac{1}{2} \iiint_{D(t_1)} \bar{\rho}(u_i^2 + w_i^2) ds,$$

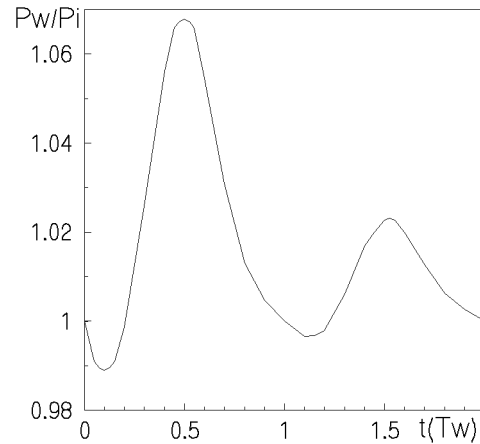


Рис. 11. Зміна потенціальної енергії області плями протягом проміжку часу $0 \leq t \leq 2T_w$:
 $n = 3; k = 2; H = 100\text{м.}; z_0 = -25\text{м.}; l_v = 10\sqrt{10}\text{см.}$

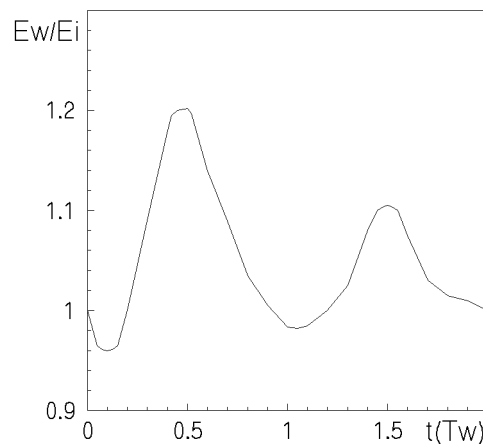


Рис. 12. Зміна кінетичної енергії області плями протягом проміжку часу $0 \leq t \leq 2T_w$:
 $n = 3; k = 2; H = 100\text{м.}; z_0 = -25\text{м.}; l_v = 10\sqrt{10}\text{см.}$

а потенціальна енергія – відповідно з виразу

$$E_{ip} = -\frac{g}{2} \iiint_{D(t_1)} \frac{(\rho - \bar{\rho})^2}{\bar{\rho}} ds.$$

Тут $D(t_1)$ – область плями. Слід відмітити, що наведений вираз для E_{ip} справедливий лише для випадку лінійної стратифікації, яка розглядалась в даних дослідженнях. Як видно, зміна величин потенціальної та кінетичної енергій якісно подібна до зміни геометрії плями, але кількісно значно більш суттєва. Протягом періоду ВХ відбувається помітна (особливо кінетичної енергії) зміна цих величин з поверненням у кінці періоду хвилі до величини, яка має місце за відсутності хвилі. Але

якщо геометрія плями змінюється в межах відсотків, то максимум потенціальної енергії в наведеному прикладі зростає більше ніж на п'ять відсотків, а максимум кінетичної енергії – більше ніж на двадцять відсотків. З часом інтенсивність обміну енергією між плямою і ВХ слабшає. Як видно з наведених на рис. 13 і 14 даних, в період $9T_w \leq t \leq 11T_w$ максимальна зміна потенціальної енергії складає менше половини відсотка, а кінетичної – відповідно трохи більше одного відсотка. Достатньо помітний енергетичний обмін між хвилею і плямою слабо відбивається, однак, на геометрії плями. Це обумовлене знакозмінним періодичним характером енергетичної взаємодії та малим значенням параметра δ_1 . За таких умов "залишкові" ефекти взаємодії не встигають дати необхідний інтегральний ефект і в кінці періоду проходження хвилі геометрія і структура плями немовби "забувають" про дію на них внутрішньої хвилі. З часом, у процесі відновлення профілю стратифікації всередині плями (рестратифікація), взаємодія плями з ВХ зменшується.

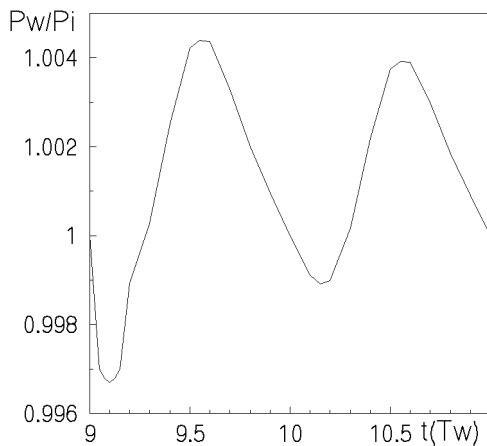


Рис. 13. Зміна потенціальної енергії області плями протягом проміжку часу $9 \leq t \leq 11T_w$; $n = 3$; $k = 2$; $H = 100\text{м}$; $z_0 = -25\text{м}$; $\bar{l}_v = 10\sqrt{10}\text{см}$.

ЗАКЛЮЧЕННЯ

Виконані дослідження дозволяють встановити особливості дії монохроматичних лінійних внутрішніх хвиль на еволюцію двовимірної плями протягом найбільш тривалого періоду її еволюції – в'язко-дифузійного. Це періодичність (з періодом ВХ) зміни геометрії та енергетики плями, причому якщо геометрія плями змінюється досить слабо, то енергетика плями, особливо на почат-

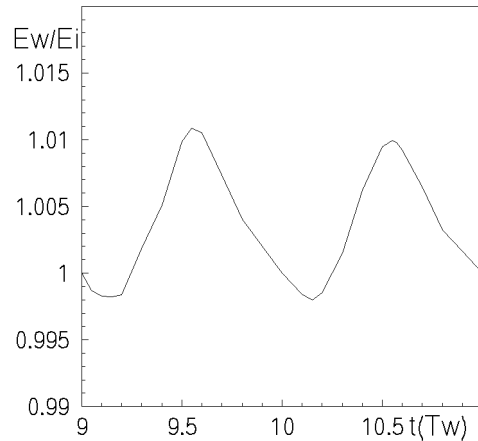


Рис. 14. Зміна кінетичної енергії області плями протягом проміжку часу $9 \leq t \leq 11T_w$; $n = 3$; $k = 2$; $H = 100\text{м}$; $z_0 = -25\text{м}$; $\bar{l}_v = 10\sqrt{10}\text{см}$.

ку процесу, достатньо чутлива до проходження ВХ протягом кожного періоду хвилі. Але в кінці періоду хвилі як потенціальна, так і кінетична енергії практично повертаються до того значення, яке має місце за відсутності ВХ. Так само має місце періодичний перекосяк картини ліній течій в околі плями. В цілому вплив ВХ на динаміку середніх за період ВХ характеристик еволюції плями знаходиться в межах відсотків. Це дозволяє зробити висновок, що впливом збурень середовища, викликаних проходженням лінійних монохроматичних хвиль, на еволюцію перемішаних областей (плям) навіть на в'язко-дифузійній стадії еволюції з достатнім ступенем точності можна знехтувати. Одержані результати мають принципове значення для коректної постановки задач про розсіяння ВХ на перемішаних плямах, оскільки на їх підставі відпадає необхідність враховувати вплив ВХ на еволюцію таких плям.

1. *Океанология. Физика океана, т. 1. Гидрофизика океана.* – М.: Наука, 1978. – 455 с.
2. *Океанология. Физика океана, т. 2. Гидрофизика океана.* – М.: Наука, 1978. – 455 с.
3. *Мадерич В.С., Никишов В.И., Стеценко А.Г. Динамика внутреннего перемешивания в стратифицированной среде.* – К.: Наук. думка, 1988. – 239 с.
4. *Буданов Л.А., Тибилев А.С., Яковлев В.А. Борновское приближенное решение задачи рассеяния внутренних волн // ПМТФ.* – 1984. 4. 2С. 82-94.
5. *Бунимович Л.А., Жмур В.В. Рассеяние внутренних волн на ансамбле пятен перемешанной жидкости // Изв. АН СССР, ФАО.* 1985. – 21, N 3. – С. 311-318.
6. *Григорьев П.Л., Тибилев А.С., Яковлев В.А. Приближение однократного рассеяния внутренних волн на неоднородности поля плотности // Изв. АН СССР, ФАО.* – 1985. – 21, N 3. – 321-324.

7. Григорьев П.Л., Тиболов А.С., Яковлев В.А. Рассеяние внутренней волны на слабонеоднородном возмущении поля плотности жидкости с учетом формы свободной поверхности и дна // Изв. АН СССР, ФАО.– 1986.– 22, N 9.– С. 948-962.
8. Григорьев П.Л., Тиболов А.С., Яковлев В.А. Задача рассеяния внутренней волны на слабонеоднородном возмущении поля плотности в трехслойной модели океана // Изв. АН СССР, ФАО.– 1987.– 23, N 11.– С. 1193-1197.
9. Жмур В.В. Рефракция внутренних волн на пятнах перемешанной жидкости в двухслойном океане // Изв. АН СССР, ФАО.– 1984.– 20, N 1.– С. 108-111.
10. Lukyanov P.V., Maderith V.S. Restratification processes in the final stage of turbulence decay in a stably stratified medium // Доповіді НАН України.– 1995.– N 5.– Р. 46-48.
11. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях.– М.: Мир, 1977.– 431 с.
12. Лук'янов П.В. Интрузійна взаємодія на дифузійно-в'язкій стадії виродження турбулентності стійко стратифікованої рідини // Праці Другої всеукр. конф. молодих вчених, Київ.– 1995. – Математика. – С. 215.
13. Абрамян Т.О., Кудин А.М. Лабораторные исследования взаимодействия пятен перемешанной жидкости при растекании в стратифицированной среде // Изв. АН СССР, ФАО.– 1983.– 19, N 8.– С. 888-891.
14. Никишов В.И., Стценко А.Г. Образование внутренних волн, порождаемых схлопыванием однородного пятна в стратифицированной жидкости // Гидромеханика.– 1975.– 32.– С. 14-20.