

УДК 532.516

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ СВОЙСТВА РАЗРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ С ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

О. Н. ШАБЛОВСКИЙ

Гомельский государственный технический университет им. П.О.Сухого, Беларусь

Получено 15.11.2000

Построен новый класс двумерных нестационарных течений вязкой жидкости с сильными разрывами. Приближенным методом Бубнова-Галеркина задача сводится к анализу эволюционных свойств нелинейной динамической системы с двумя существенными степенями свободы. Качественное исследование выполнено для вязкой ньютоновской жидкости, а также для положительной и знакопеременной турбулентных вязкостей.

Побудовано новий клас двомірних нестационарних течій в'язкої рідини з великими розривами. Наближеним методом Бубнова-Гальоркіна задача зводиться до аналізу еволюційних властивостей нелінійної динамічної системи з двома суттєвими ступенями свободи. Якісне дослідження виконано для в'язкої ньютоновської рідини, а також для позитивної та знакозмінної турбулентних в'язкостей.

A new class of two-dimensional non-stationary flows is build for a viscous fluid with strong ruptures. Approximate Bubnov-Galerkin method reduces the problem to the analysis of evolutionary properties of a nonlinear dynamic system with two essential degrees of freedom. A qualitative research is performed for viscous newtonian fluid and both for positive and for alternating turbulent viscosities.

ВВЕДЕНИЕ

Для нестационарных двумерных течений жидкости характерны три физических явления: стратификация жидкости по плотности, сильный гидродинамический разрыв, знакопеременная турбулентная вязкость. Процессы, обусловленные действием массовых сил в стратифицированной жидкости [1], имеют прямое отношение к задачам использования и охраны природных водоемов и атмосферы. Они также связаны с важными практическими приложениями в энергетике и гидротехнике. Линия сильного разрыва в потоке несжимаемой жидкости является эффективной моделью скачкообразных переходов, имеющих разнообразное физическое содержание: линии раздела либо атмосферные фронты в природных явлениях, а также технологические устройства, при протекании через которые параметры жидкости (плотность, давление, скорость и др.) резко изменяются. Сильный гидродинамический разрыв имеет принципиальное значение в формировании структуры вихревого поля несжимаемой жидкости [2, 3]. Современное состояние проблемы динамики завихренности представлено в [4]. Теоретические исследования гидродинамических задач с отрицательной вязкостью [5 - 9] появились как отклик на результаты натурных наблюдений струйных и вихревых океанических и атмосферных образований, а также на эксперименты с реальными вихрями [10 - 12].

Цель данной работы состоит в исследовании: 1) нестационарных двумерных свойств гидродинамической системы, проявляющихся на фоне эффекта скольжения жидкости вдоль линии разрыва; 2) влияния характера распределения (монотонного либо немонотонного) полных гидродинамических напоров вдоль направления основного течения; 3) нелинейных эволюционных свойств системы для ньютоновской жидкости и жидкости с положительной либо знакопеременной турбулентной вязкостью.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Плоское двумерное неустановившееся течение несжимаемой сплошной среды определяется уравнениями [13]:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}; \quad i, k = 1, 2; \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0. \quad (2)$$

Для линейной вязкой жидкости имеем

$$\tau_{ik} = 2\mu \epsilon_{ik}. \quad (3)$$

При $\mu = \text{const}$ – это классическая модель вязкой ньютоновской жидкости. Здесь приняты обозначения: $x_1 = x$, $x_2 = y$ – декартовы прямоугольные координаты; t – время; v_1, v_2 – компоненты вектора скорости; p – давление; ρ – плотность; τ_{ij}

– компоненты девиатора тензора напряжений; ϵ_{ij} – компоненты тензора скоростей деформации; F – массовая сила; μ – коэффициент динамической вязкости; $d/dt = \partial/\partial t + v_k \partial/\partial x_k$. Коэффициент знакопеременной вязкости, согласно модели Новикова-Яненко [5, 6], имеет вид

$$\mu(S) = \mu_0 + \mu_1 S^{\frac{1}{2}} + \mu_2 S, \quad (4)$$

$$S = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2.$$

Он содержит как кинематическую, так и турбулентную вязкость, которая подсчитывается через компоненты средней местной скорости течения. Отметим, что формула (4) включает в себе как частный случай ($\mu_0 > 0, \mu_1 = 0, \mu_2 > 0; \mu_2/\mu_0$ – малая постоянная) модель вязкости Ладыженской [14]. Эта модель, известная как способ "регуляризации" системы Навье-Стокса, получила недавно физическое обоснование [15].

При рассмотрении движения неоднородной (стратифицированной по плотности) несжимаемой вязкой жидкости в приближении Буссинеска к уравнениям движения (1) следует добавить уравнение неразрывности и условие соленоидальности [16]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, 2.$$

Отсюда следует $d\rho/dt = 0$, т.е. плотности частиц жидкости постоянны и различны. Далее полагаем, что движение жидкости происходит в температурном интервале, для которого динамическую задачу можно рассматривать автономно от тепловой. Будем исследовать решения представленных уравнений в классе течений:

$$\begin{aligned} v_1 &= -b(t), & v_2 &= v(x, t), & (5) \\ p &= p(x, t), & \tau_{12} &= \tau(x, t), \\ F_1 &\equiv 0, & F_2 &= F. \end{aligned}$$

Для ньютоновской жидкости решения вида (5) в работе [17] рассматривались без гидродинамической интерпретации. На основе (5) в [18] исследовались течения реологически сложных жидкостей и, в частности, были указаны необходимые условия возникновения эффекта знакопеременной вязкой диссипации энергии (коэффициент вязкости положителен).

При обезразмеривании возьмем следующие масштабы величин (они отмечены индексом b):

$$(v_1)_b = b_0 > 0, \quad \rho_b = \rho,$$

$$(v_2)_b = v_*, \quad x_b = x_s - x_j > 0,$$

$$\rho_b = \rho_b b_0^2, \quad F_b = v_* b_0 / x_b,$$

$$\zeta_b = 1/(\rho_b b_0), \quad t_b = x_b / b_0.$$

Число Рейнольдса подсчитывается через размерные масштабы параметров и равно $Re = \rho_b x_s b_0 / \mu_b$. В дальнейшем пользуемся только безразмерными величинами.

Рассматриваем течение в трех областях:

область G_* , $x \in (-\infty, x_j]$;

j – область, $x \in [x_j, x_s]$;

область G_{**} , $x \in [x_s, \infty)$,

причем $x_j = 0, x_s = 1, b_0 = 1, v_* = 1, \rho = 1, \mu_0 = 1$. Индексы: j, s соответствуют значениям функций на границах j -области; $*$, $**$ – параметрам течения слева и справа от j -области; точка над символом функции означает дифференцирование по ее аргументу. Уравнения (1), (2), (5) для течения в j -области принимают вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} - b \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial x} + F, \quad b = b_0 + b_1(t),$$

$$p - p_0 = x \rho \dot{b}_1(t), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Здесь нет ограничений на реологическую модель вязкости. В случае ньютоновской жидкости из соотношения (3) имеем

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (7)$$

Модель (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 + \mu_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \mu_2 \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2, \\ \mu_0 &> 0, \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Этот коэффициент вязкости знакопеременный при $\mu_1^2 > 4\mu_0\mu_2$ и является асимптотически положительным [6], так как принимает отрицательные значения в конечной области изменения $\partial v/\partial x$. Если $\mu_1^2 < 4\mu_0\mu_2$, то уравнение (8) дает положительную турбулентную вязкость.

В областях G_* и G_{**} обе компоненты вектора скорости постоянны, а плотность жидкости переменная:

$$G_*: \quad v_{1*} = -b_*, \quad v_{2*} = v_*,$$

$$p_* = p_*(t), \quad \rho_* = \rho_*^0 + \rho_*^1(x + b_*t); \quad (9)$$

$$G_{**}: \quad v_{1**} = -b_{**}, \quad v_{2**} = v_{**},$$

$$p_{**} = p_{**}(t), \quad \rho_{**} = \rho_{**}^0 + \rho_{**}^1(x + b_{**}t). \quad (10)$$

Приближение Буссинеска требует введения ограничения для произвольных функций плотности:

$$|\rho_*^1| \ll \rho_*^0, \quad |\rho_{**}^1| \ll \rho_{**}^0.$$

Если массовая сила отсутствует, то $y \in (-\infty, \infty)$. Если $F \neq 0$, то зависимости (5) характеризуют точное локальное решение на оси $y = 0$.

Границы j -области представляют собой сильные гидродинамические разрывы, протекая через которые, параметры жидкости (плотность, давление, скорость и др.) резко изменяются. Условия динамической совместности [13], т.е. балансы потоков массы жидкости и двух компонент потока импульса, на изотермических разрывах в классе решений (5), (9), (10) имеют вид

$$x = x_j, \quad \rho b_0 = \rho_*^0 b_*, \quad \rho b_1 = \rho_{*j} b_*,$$

$$\tau_j = \rho b (v_* - v_j); \quad (11)$$

$$p_j = p_* + \rho_{*j} b_*^2 - \rho b^2; \quad (12)$$

$$x = x_s, \quad \rho b_0 = \rho_{**}^0 b_{**}, \quad \rho b_1 = \rho_{**s}^1 b_{**},$$

$$\tau_s = \rho b (v_{**} - v_s); \quad (13)$$

$$p_* - p_{**} = \rho b (b_{**} - b_*) - x_s \rho \dot{b}, \quad (14)$$

где $p_j = p(x_j, t)$, $\rho_{*j}^1 = \rho_*^1(x_j + b_* t)$ и т.п. Если произвольная функция $b(t)$ задана априорно либо определяется некоторым дополнительным соотношением, характеризующим динамические процессы в j -области, то в граничные условия (11), (13) входят четыре неизвестные функции τ_j, τ_s, v_j, v_s аргумента t . Допустим, что теоретические зависимости (11), (13) эквивалентны полумпирическим условиям скольжения Бассета, говорящим о том, что скорость скольжения пропорциональна вязкому касательному напряжению:

$$v_j = \zeta_j \tau_j, \quad v_s = \zeta_s \tau_s. \quad (15)$$

Это дает возможность получить в простой, наглядной форме связь $v_j(t)$, $v_s(t)$ с $b(t)$ и проследить на качественном уровне воздействие эффекта прилипания-проскальзывания на гидродинамические свойства течения. Из (11), (13), (15) следует, что

$$\tau_j = \rho b v_* / (1 + \rho b \zeta_j), \quad \tau_s = \rho b v_{**} / (1 + \rho b \zeta_s). \quad (16)$$

Далее для простоты вычислений принимаем коэффициенты скольжения одинаковыми $\zeta_j = \zeta_s = \zeta$ и берем $\zeta \in (0, 1)$. Величина ζ зависит от свойств жидкости и стенки и характеризует модель скольжения вдоль проницаемой границы [19–20]. С помощью уравнений (15), (16) получаем формулу,

показывающую влияние кинематического параметра c_0 на скорости скольжения жидкости на внутренних сторонах разрывов:

$$(v_s - v_j)/v_j = (v_{**} - v_*)/v_* = c_0.$$

Удерживая члены порядка не выше первого по отношению к b_1 , находим

$$v_j \cong a_0 + a_1 b_1, \quad a_0 = \rho \zeta / (1 + \rho \zeta),$$

$$a_1 = \rho \zeta / (1 + \rho \zeta)^2, \quad |b_1(t)/b_0| \ll 1.$$

Представленный нелинейный гидродинамический процесс является многопараметрическим, и его численному моделированию должен предшествовать подробный качественный анализ, который и составляет предмет данной статьи. Это тем более оправдано, что практика численных расчетов разрывных течений представляет, как известно, осциллирующие решения, которые нуждаются в однозначной физической интерпретации. А именно: требуется обнаружить существенные черты исходной задачи, являющиеся причинами нелинейных колебаний в гидродинамической системе. Для исследования краевой задачи (6) – (14) применяем подход, связанный с приближенным описанием течения с помощью конечномерных динамических систем. Воспользуемся методом Бубнова-Галеркина [21], который приводит исходную задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для существенных степеней свободы. Это дает возможность изучить бифуркационные ситуации и установить пороги возникновения автоколебаний.

2. УСЛОВИЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ j -ОБЛАСТИ

Рассмотрим балансы импульсов (12), (14) на разрывах. Неизвестная функция $b_1(t)$ определяется из дифференциального уравнения (14). Учитывая связь (12) между p_j и b , можем утверждать, что три функции p_* , $p_j(t)$, $p_{**}(t)$ связаны одним соотношением. Значит, $p_{**}(t)$ и $p_*(t)$ характеризуют давление жидкости на входе в j -область и на выходе из нее и являются пока что произвольными. Возьмем в качестве условия функционирования j -области следующее уравнение:

$$\frac{1}{x_s} \int_0^{x_s} \Pi(x, t) dx \equiv \langle \Pi \rangle = \alpha (\Pi_{**s} - \Pi_{*j}) + \Pi_{*j}, \quad (17)$$

$$\alpha = \text{const} \neq \frac{1}{2},$$

выражающее линейную связь между полными гидродинамическими напорами, характерными для каждой из трех областей: $\Pi = p + (\rho/2)(v_1^2 + v_2^2)$; $\Pi_{*j} = p_* + (\rho_{*j}/2)(b_*^2 + v_*^2)$; $\Pi_{**s} = p_{**s} + (\rho_{**s}/2)(b_{**}^2 + v_{**}^2)$. В уравнение (17) входят напоры на внешних границах j -области, а также средний по сечению j -области напор. Далее полагаем, что $p_* = \text{const}$ – известное давление на выходе. Уравнение (14) имеет решение $b_1(t) \equiv 0$, которому соответствует основное течение с постоянными плотностями $\rho_*^0, \rho, \rho_{**}^0$ во всех трех областях:

$$\begin{aligned} p_{**}^0 &= p_* + \rho b_0(b_* - b_{**}) > 0, \\ \Pi_*^0 &= p_* + \rho_*^0(b_*^2 + v_*^2)/2, \\ \Pi_{**}^0 &= p_{**}^0 + \rho_{**}^0(b_{**}^2 + v_{**}^2)/2. \end{aligned} \quad (18)$$

Вводим естественное ограничение: числовые значения параметров в соотношениях (18) такие, что как для основного, так и для возмущенного течения с переменной плотностью вид уравнения напоров (17) одинаковый и коэффициент α один и тот же. Отметим еще, что в случае основного течения (18) выполнено равенство

$$\Pi_{**}^0 - \Pi_*^0 = \rho(c_* - c_{**})/2,$$

где $c_* = b_* - (v_*^2/b_*)$; $c_{**} = b_{**} - (v_{**}^2/b_{**})$; $b_* = 1$, $b_{**} > 0$.

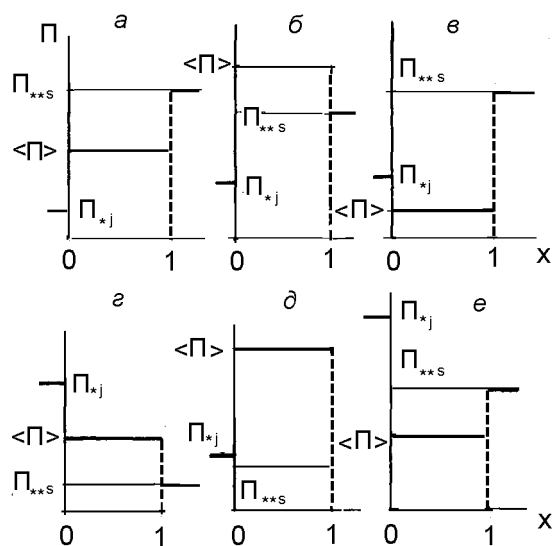


Рис. 1. Возможные варианты распределения полных гидродинамических напоров для различных значений параметра α : а – $\alpha \in (0, 1)$; б – $\alpha > 1$; в – $\alpha < \alpha < 0$; г – $\alpha \in (0, 1)$; д – $\alpha < 0$; е – $1 < \alpha < \alpha_1$

Таким образом, о знаке перепада полных гидродинамических напоров мы можем судить по раз-

ности кинематических параметров $c_* - c_{**}$, характеризующих двумерные свойства течения. Ориентация поперечных компонент скорости, т.е. знаки величин v_* , v_{**} , не влияет на c_* , c_{**} . Если $0 < \Pi_{*j} < \Pi_{**s}$, то при $\alpha \in (0, 1)$ имеем монотонный рост напоров вдоль оси ОХ, (рис. 1, а); в двух других случаях распределение напоров немонотонное, (рис. 1, б, в). Если $0 < \Pi_{**s} < \Pi_{*j}$, то при $\alpha \in (0, 1)$ напоры монотонно убывают вдоль ОХ, (рис. 1, г); имеются также два немонотонных варианта, (рис. 1, д, е); $\alpha_1 = \Pi_{*j}/(\Pi_{*j} - \Pi_{**s})$.

3. ТЕЧЕНИЕ НЬУТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

Для уравнения движения (6), (7) проводим вычисления по реализации процедуры Бубнова-Галеркина на основе разложения низшего порядка:

$$v(x, t) = xc_0v_j + v_j + A(t) \sin \pi x, \quad x \in [0, 1], t \geq 0. \quad (19)$$

Это дает дифференциальное уравнение

$$\frac{dA}{dt} = \frac{4F}{\pi} + \frac{4c_0}{\pi} [a_0 + b_1(a_0 + a_1)] - \frac{\pi^2 A}{Re} - h_1 \frac{db_1}{dt}. \quad (20)$$

Столь простой приближенный метод хорошо рекомендовал себя (вплоть до качественного согласия с результатами экспериментов) при исследовании систем гидродинамического типа [22] и в задачах лазерной термохимии [23]. Отметим также, что в математическом отношении рассматриваемое здесь уравнение (6) по своему типу и структуре аналогично нелинейным уравнениям теплопроводности, изучавшимся в [23] на основе разложения вида (19). Из уравнения напоров (17) получаем выражение для давления на правой границе j -области:

$$p_{**} \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) = \frac{p_*}{2} + D_0 - \rho \left(\frac{A^2}{4} + \frac{Ah_0}{2} \right) + \quad (21)$$

$$+ \rho b_1 \left(D_1 - \frac{Ah_1}{2} \right),$$

$$D_0 = \alpha \left[\frac{\rho_{**}^0}{2} (b_{**}^2 + v_{**}^2) - \Pi_*^0 \right] +$$

$$+ \frac{\rho}{2} \left[\frac{v_*^2}{b_*} + 1 - b_{**} - (1 + c_1) a_0^2 \right];$$

$$D_1 = \frac{\alpha}{2b_{**}} (b_{**}^2 + v_{**}^2) + \frac{1}{2b_*} (b_*^2 + v_*^2) (1 - \alpha) +$$

$$+ 1 - \frac{1}{2} (b_* + b_{**}) - a_0 a_1 (1 + c_1);$$

$$c_1 = c_0 + c_0^2/3, \quad h_0 = 2a_0(c_0 + 2)/\pi,$$

$$h_1 = 2a_1(c_0 + 2)/\pi.$$

В частном случае $\alpha = 1/2$ выбор произвольных функций делается иначе: $p_{**}(t)$ задается априорно, а $p_*(t)$ определяется из выражения (21). Далее принимаем $\alpha \neq 1/2$. С учетом (21) уравнение (14) записывается в виде

$$\frac{db_1}{dt}(1 - 2\alpha) = b_1(D_3 - Ah_1) + D_2 - \frac{A^2}{2} - Ah_0, \quad (22)$$

$$D_2 = B_* - (1 + c_1)a_0^2, \quad D_3 = B_* + 1 - 2a_0a_1(1 + c_1),$$

$$B_* = \alpha(c_* - c_{**}) - c_* + 1.$$

Комплекс B_* несет информацию о двумерных свойствах поля скоростей по обе стороны j -области и о характере распределения напоров. Для дальнейших рассуждений важно еще и то, что B_* не зависит от Re . Таким образом, получили динамическую систему

$$\frac{db_1}{dt} = P(b_1, A), \quad \frac{dA}{dt} = Q(b_1, A), \quad (23)$$

где вид правых частей ясен из уравнений (20), (22): функция $b_1(t)$ входит в них линейно, $A(t)$ – квадратичным образом. Итак, в рамках приближения (19) явно выделены две существенные степени свободы, соответствующие продольной и поперечной компонентам скорости жидкости. Значения функций в точке покоя обозначим $b_1 = \epsilon$, $A = A_\epsilon$. Очевидно, что

$$A_\epsilon = A_0 + \epsilon A_1, \quad A_0 = \frac{4Re}{\pi^3}(F + a_0c_0), \quad (24)$$

$$A_1 = \frac{4Re}{\pi^3}c_0(a_0 + a_1).$$

Бифуркационная диаграмма, связывающая значение параметра B_* с координатой состояния равновесия ϵ , имеет вид

$$B_* = [\epsilon^2 B_2 + \epsilon(B_{11} - 1) + B_{00}](1 + \epsilon)^{-1}, \quad (25)$$

$$B_{00} = A_0 h_0 + (1 + c_1)a_0^2 + A_0^2/2,$$

$$B_2 = A_1(h_1 + A_1/2),$$

$$B_{11} = A_0 h_0 + A_1 h_1 + A_0 A_1 + 2a_0 a_1(1 + c_1).$$

Анализ, проведенный методами теории нелинейных колебаний [24], позволяет сделать выводы: 1) состояние $\epsilon = 0$, которому соответствует основное течение с постоянными плотностями, является точкой покоя, если $\alpha(c_* - c_{**}) = B_{00} + c_* - 1$; 2) $\epsilon \leq 0$ не является точкой бифуркации этой динамической системы; 3) в физически содержательной области изменения параметров прямая $B_* = \text{const}$

может пересекать бифуркационную кривую (25) в одной либо в двух точках; соответственно, имеется одно либо два состояния равновесия системы. Бифуркационное соотношение между B_* и ϵ заключается в условии касания прямой $B_* = \text{const}$ с экстремумом функции (25). При $0 < \epsilon_0 \ll 1$ такой экстремум существует, если параметр A_1 в выражениях (24) принадлежит одному из полубесконечных интервалов: $A_1 \in (-\infty, A_{12})$ либо $A_1 \in (A_{11}, \infty)$ и выполнено неравенство $a_* \equiv 1 - (1 + c_1)(1 - \zeta)a_0 a_1 > 0$; формулы для A_{11} , A_{12} и соответствующего значения A_0 здесь не приводятся. Задание A_0 , A_1 , удовлетворяющих бифуркационным условиям, означает, согласно (24), выбор F , Re . Тогда бифуркационное значение $B_*(\epsilon_0)$ подсчитывается по формуле (25). Бифуркационные изменения в системе могут происходить как при положительных, так и при отрицательных значениях ϵ_0 : $\epsilon_0 > 0$, $A_1 > 0$ либо $\epsilon_0 + 2 < 0$, $A_1 < 0$; каждому из этих двух случаев соответствует одно положительное и одно отрицательное значение A_0 . Отсюда следует: 1) $\epsilon_0 > 0$, т.е. бифуркационные значения плотностей жидкости в областях G_* , G_{**} превышают соответствующие плотности основного течения; 2) взаимная ориентация поперечных (вдоль ОУ) скоростей основного потока, т.е. знаки u_* , u_{**} , не влияет на возникновение бифуркационной ситуации; 3) согласно оценкам величин A_{11} , A_{12} существует нижняя граница значений числа $Re > 0$, при которых может наступить бифуркация; 4) бифуркационное значение массовой силы может быть как положительным, так и отрицательным; 5) если наряду с ζ и c_0 параметры основного течения в области G_* заданы, то после подсчета $B_*(\epsilon_0)$ получим из формулы $B_* = 1 - c_* + 2\alpha(\Pi_{**}^0 - \Pi_*^0)\rho^{-1}$ бифуркационное значение комплекса $\alpha(\Pi_{**}^0 - \Pi_*^0)$, входящего в условие (17), (18) функционирования j -области. В особой точке при $\epsilon = \epsilon_0 > 0$ возможны бифуркации двух типов: 1) сложное состояние равновесия "седло - узел", получающееся при слиянии двух простых особых точек (узла и седла); 2) вырожденный фокус в момент бифуркации, т.е. простой фокус превращается в сложный фокус, а из него рождается предельный цикл.

Изучим характер состояния равновесия при $\epsilon = 0$. В плоскости (c_0, Re) граница седел $\Delta = 0$ имеет две действительные ветви, которые зависят от a_0 , a_1 , ζ , F и не зависят от динамического параметра α . Линия $\sigma = 0$ (граница устойчивости узлов и фокусов) существует при $\alpha < 1/2$ и может иметь две действительные ветви. Если режим функционирования j -области такой, что $1 - 2\alpha < 0$, то $\sigma > \pi^2/Re > 0$. Отметим, что существование ли-

нии $\sigma = 0$ ($\alpha < 1/2$) либо ее отсутствие ($\alpha > 1/2$) зависят от числового значения параметра α , однако каждая из этих ситуаций может быть реализована как при монотонном, так и при немонотонном распределении гидродинамических напоров. На рис. 2 показаны линии $\sigma = 0$, $\Delta = 0$ и размечены области положительных и отрицательных значений функций $\sigma(c_0, Re)$, $\Delta(c_0, Re)$ при фиксированном ζ . Качественный характер этих кривых одинаков при $F = 0$ и $F \neq 0$. Две области устойчивого решения (узел либо фокус) отмечены штриховкой. Дополнительная штриховая линия указывает значения c_0 , Re , при которых особая точка $\epsilon = 0$ является "центром": поведение динамической системы имеет незатухающий периодический характер. Например, при $F = 0$ "центр" существует при $Re \in (0, 1/2)$, $|c_0| > 20$. Для других физически содержательных числовых параметров ситуация аналогичная: незатухающие осцилляции имеются при небольших числах Рейнольдса $Re \in (0, 1)$, когда модули скоростей скольжения на внешних границах j -области значительно отличаются друг от друга, $|v_{x*}/v_x| \gg 1$. Период этих колебаний равен $\Theta_0 = 2\pi/\sqrt{\Delta_0}$, где

$$\Delta_0 = 2(A_0 + h_0) \left[\frac{2}{\pi} c_0 (a_0 + a_1) + \frac{\pi}{Re} (c_0 + 2) a_1 \right] (1 - 2\alpha)^{-1} - (\pi^4 / Re^2) > 0,$$

причем $\alpha < 1/2$ и $c_0 > 0$, $A_0 > 0$ либо $c_0 + 2 < 0$, $A_0 < 0$. Эти оценки наглядно демонстрируют влияние массовой силы, параллельной скорости скольжения, на поведение Θ_0 . Исследование стационарного состояния системы при $\epsilon \neq 0$ дает аналогичные в физическом отношении результаты, если это состояние не является бифуркационным.

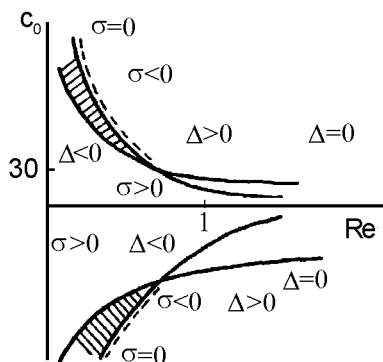


Рис. 2. Поведение функций $\sigma(c_0, Re)$, $\Delta(c_0, Re)$ в окрестности состояния равновесия $\epsilon = 0$

Завершая рассмотрение ньютоновской жидкости, приведем пример автоколебаний. Пусть при

$\epsilon = 0$ состояние системы является стационарным: $B_* = B_{00} > 0$ и коэффициент скольжения ζ - малый параметр. При $1 - 2\alpha > 0$, $F = 0$ единственная точка покоя $b_1 = 0$, $A = A^1$ неустойчивая, причем $A^1 = 4c_0 a_0 Re / \pi^3$, $2D_2 = (A^1)^2$. На фазовой плоскости системы (23) рождается предельный цикл; его фазовый портрет и "осциллограмма" колебаний скорости показаны на рис. 3. Релаксационные колебания происходят при $B_* + 1 > D_3^1 > 0$ в следующих ситуациях:

1) $c_0 > 0$, $0 < Re < Re^1$;

2) $c_0 + 2 < 0$, $Re > Re^1$,

где $D_3^1 \pi h_1 = 4c_0(a_0 + a_1)(1 - 2\alpha)$, $(Re^1)^2 = \pi^5(1 - 2\alpha)/(4c_0 a_0 h_1)$. Если же $-2 < c_0 < 0$, то релаксационные колебания наблюдаются при любых положительных B_* , Re .

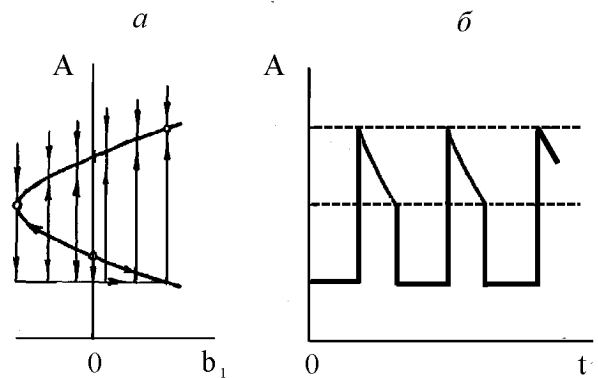


Рис. 3. Релаксационные колебания в потоке ньютоновской жидкости при $\zeta \rightarrow 0$: а - фазовый портрет системы; б - зависимость скорости от времени

4. ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ

Пусть течение в j -области определяется уравнением движения (6) с моделью вязкости (3), (8). Приближенное решение строим на основе разложения низшего порядка (19) методом Бубнова - Галеркина и получаем

$$\frac{dA}{dt} = \frac{4F}{\pi} + \frac{4c_0}{\pi} [a_0 + b_1(a_0 + a_1)] - \quad (26)$$

$$- \frac{A}{Re} (m_0 + b_1 m_1) - \frac{m_2 A^3}{Re} - h_1 \frac{db_1}{dt},$$

$$m_0 = \pi^2(1 + 2\mu_1 a_0 c_0 + 3\mu_2 a_0^2 c_0^2),$$

$$m_1 = \pi^2 a_1 c_0 (2\mu_1 + 6\mu_2 a_0 c_0), \quad m_2 = 3\mu_2 \pi^4 / 4 > 0.$$

При $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$ уравнение (26) дает уже изученный ньютоновский вариант (20). Далее рассматриваем два случая: а) положительная турбу-

лентная вязкость, $\mu_1^2 < 4\mu_0\mu_2$; б) знакопеременная вязкость, $\mu_1^2 > 4\mu_0\mu_2$. В обоих случаях принимаем $m_0 > 0, m_1 > 0$, т. е. $c_0 > 0$ либо $a_0c_0 < -2\mu_1/(3\mu_2)$. Дифференциальное уравнение (22), определяющее функцию $b_1(t)$, не зависит от вида реологической модели жидкости. Следовательно, для двух основных степеней свободы имеем динамическую систему вида (23), где правые части записываются посредством выражений (22), (26). Как и прежде, величины c_0 и ζ фиксированные. Параметры системы в состоянии равновесия здесь удобнее определять обратным способом. А именно: если $b_1 = \epsilon$, $A = A_\epsilon$ (см. формулы (24)) заданы, то нетрудно подсчитать B_*, F , которые линейно входят в уравнения $P = 0, Q = 0$. Каждая нуль-изоклина имеет по две ветви, расположенные по обе стороны асимптот $A = A_P$ и $A = A_Q$. Здесь и далее опускаем запись результатов выкладок, которые легко воспроизвести. Рассмотрим ветви этих изоклин, наиболее интересные в физическом отношении. На рис. 4, а, б изображены типичные примеры, когда система имеет одно и два состояния равновесия. Заслуживает внимания вариант, когда $\zeta/|1 - 2\alpha| \ll 1$, т. е. имеется немонотонное распределение гидродинамических напоров в направлении основного течения. Приведем некоторые важные оценки параметров

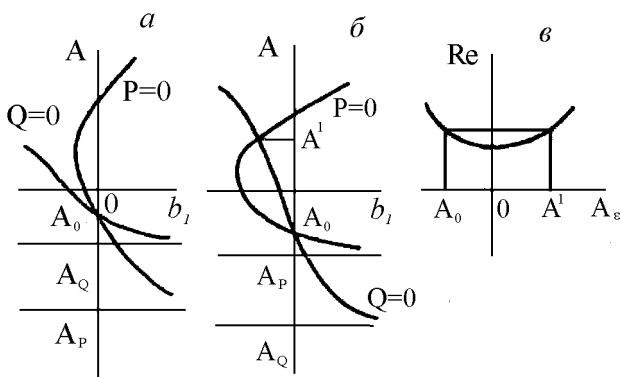


Рис. 4. Система с турбулентной вязкостью: а, б – примеры нуль-изоклин; в – бифуркационная диаграмма

На рис. 4, а показано расположение нуль-изоклин, когда выполнено необходимое условие возникновения автоколебаний: изоклина $P(b_1, A) = 0$ немонотонна, имеет участок с убывающей характеристикой и на этом участке в точке $(0, A_0)$ пересекается с монотонно убывающей изоклиной $Q(b_1, A) = 0$ уравнения движения. Для такого расположения изоклин нужно удовлетворить неравенствам: $a_* > 0, A_0 < 0, c_0 < \min\{-2; -2\mu_1/3\mu_2\}$,

$A_P < A_Q < 0$, т. е. $m_1 D_3/h_1 < 4c_0 Re(a_0 + a_1)/\pi$. Последнее неравенство означает, что для конкретной модели вязкости существует нижняя граница значений $Re = Re^0$ числа Рейнольдса, при которых возможны автоколебания в гидродинамической системе. Отметим еще, что в этом случае $D_3 > 0$, а величина Re^0 растет линейно с ростом $B_* > 0$. Вопрос о существовании двух точек покоя разрешается следующим образом, рис. 4, б. Пусть (ϵ_1, A^1) наперед заданное состояние равновесия, которому соответствуют значения B_*, F , подсчитываемые аналогично первому случаю. Тогда существование второй точки покоя $(0, A_0)$ обеспечивается подходящим выбором Re . Анализ показывает, что координаты этих точек такие:

$$\epsilon_1 < 0, |\epsilon_1| \ll 1; \quad A^1 > 0; \quad \epsilon_0 = 0;$$

$$A_0 = -h_0 - \sqrt{h_0^2 + 2D_2} < 0, \quad A_Q < A_P < A_0,$$

где

$$A^1 \geq -2(h_0 + \epsilon_1 h_1), \quad (27)$$

$$2(c_0 + 2)^2 > -\epsilon_1 \pi^2 (1 + \zeta)^2 / [\zeta^2 (1 + \epsilon_1)^2].$$

При таком выборе A^1 будет $D_3 > D_2 > 0$. В общем случае (при любом α) уравнение бифуркационной кривой, связывающей значения Re с координатой состояния равновесия A_ϵ , имеет вид

$$Re = \frac{(A_\epsilon^4 k_4 + A_\epsilon^3 k_3 + A_\epsilon^2 k_2 + A_\epsilon k_1 + k_0)}{(A_\epsilon^2 l_2 + A_\epsilon l_1 + l_0)}, \quad (28)$$

где $Re(0) = k_0/l_0 > 0$; подробная запись коэффициентов в (28) опущена. При выполнении условий (27) кривая (28) имеет минимум рис. 4 в в точке бифуркации $A_B \in (A_0, A^1)$. Типов бифуркации здесь два, и они такие же, как в ньютоновском случае: седло – узел либо вырожденный фокус. Для изучаемой динамической системы линия $\sigma = 0$ в плоскости (μ_1, Re) является прямой:

$$Re_\sigma = (1 - 2\alpha)(c_0 \mu_1 a_2 + m_3 + 3m_2 A_\epsilon^2) / D_4, \quad \mu_1 \geq 0. \quad (29)$$

$$D_4 = D_3 + h_1(h_0 + \epsilon h_1) > 0, \quad a_2 = 2\pi^2(a_0 + \epsilon a_1) > 0,$$

$$m_3 = \pi^2[1 + 3\mu_2 a_0 c_0^2(a_0 + 2\epsilon a_1)] > 0,$$

где $1 - 2\alpha > 0$, а также $A_\epsilon > 0, c_0 > 0$ либо $A_\epsilon < 0, c_0 + 2 < 0$. Следовательно, прямая линия $Re = Re_\sigma(\mu_1)$ обладает такими свойствами: $Re_\sigma(0) > 0, dRe_\sigma/d\mu_1 > 0$ при $A_\epsilon > 0, c_0 > 0$; $dRe_\sigma/d\mu_1 < 0$ при $A_\epsilon < 0, c_0 + 2 < 0$. Линия $\Delta = 0$ имеет вид:

$$Re_\Delta = (\mu_1 S_1 + S_0) / S_2, \quad (30)$$

$$S_0 = 6\pi^2 \mu_2 a_0 a_1 c_0^2 A_\epsilon h_2 + (D_3 - h_1 A_\epsilon)(3m_2 A_\epsilon^2 + m_3),$$

$$S_1 = 2\pi^2 a_1 c_0 A_\epsilon h_2 + c_0 a_2 (D_3 - h_1 A_\epsilon),$$

$$S_2 = 4c_0(a_0 + a_1)h_2/\pi, \quad h_2 = h_0 + \epsilon h_1 + A_\epsilon,$$

В плоскости (μ_1, Re) – прямая линия, обладающая свойствами: $Re_\Delta(0) > 0$, $dRe_\Delta/d\mu_1 > 0$ при $A_\epsilon > 0$, $c_0 > 0$; $dRe_\Delta/d\mu_1 < 0$ при $A_\epsilon < 0$, $c_0 + 2 < 0$. При $c_0 + 2 < 0$ линии $\sigma = 0$ и $\Delta = 0$ существуют в ограниченном интервале значений μ_1 , а именно там, где $Re_\sigma > 0$, $Re_\Delta > 0$. Дальнейшие рассуждения проведем для случая $A_\epsilon > 0$, $c_0 > 0$, $\mu_1 \geq 0$. Вариант $A_\epsilon < 0$, $c_0 + 2 < 0$ изучается аналогично и принципиальных отличий не имеет.

Если $1 - 2\alpha > 0$, т.е. α близко к $1/2$ слева, то реализуется ситуация, когда прямые (29) и (30) не пересекаются в первом квадранте и расположены так, как это показано на рис. 5, а. Здесь отсутствуют области устойчивого решения, и нет колебательных режимов движения. В этом случае гидродинамические напоры распределены монотонно по длине ОУ

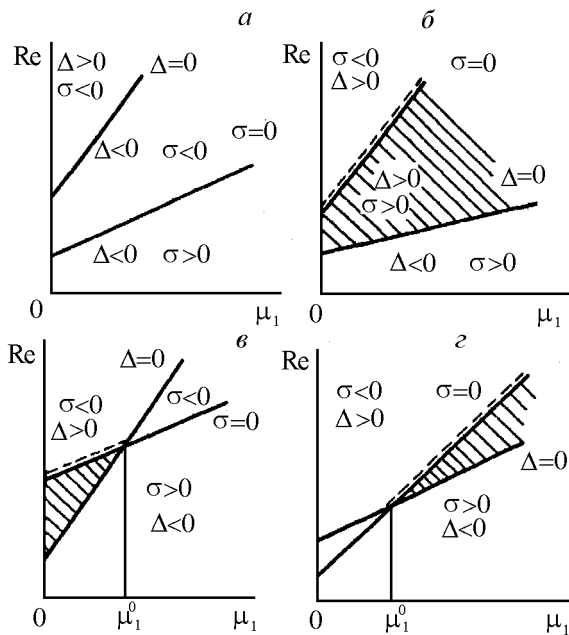


Рис. 5. Система с турбулентной вязкостью. Границы седла, границы устойчивости узлов и фокусов: а - $1 - 2\alpha > 0$; б - $1 - 2\alpha \gg 1$. Область устойчивого решения (заштрихована): в - решение с положительной вязкостью; г - решение с отрицательной вязкостью

Пусть $1 - 2\alpha \gg 1$, тогда осуществляется вариант, показанный на рис. 5, б. Штриховкой отмечена область устойчивого решения (узел, фокус); вспомогательная штриховая линия показывает значения μ_1, Re , для которых существует особая точка "центр" - незатухающее периодическое решение. Значит, при немонотонном распределении напоров могут существовать осцилляторы

решения. Здесь важно то, что эти колебательные процессы происходят при любых неотрицательных $\mu_1 \geq 0$, т.е. при течении ньютоновской жидкости, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, для жидкости Ладыженской ($\mu_1 = 0$), а также для положительной и отрицательной турбулентных вязкостей.

Таким образом, при достаточно отчетливо выраженной немонотонности продольного распределения напоров явление возникновения осцилляторных решений не зависит от реологической модели вязкости: гидродинамический фактор преобладает над реологическим.

Теперь обсудим условия существования точки пересечения прямых (29), (30). Обнаружены два варианта для имеющих физический смысл оценок числа $1 - 2\alpha$. В первом из них точка пересечения существует, если

$$\alpha_2 \equiv \frac{D_4 S_0}{S_2(m_3 + 3m_2 A_\epsilon^2)} < 1 - 2\alpha < \frac{D_4 S_1}{S_2 a_2 c_0} \equiv \alpha_3. \quad (31)$$

Эти неравенства совместны при любом $\mu_2 \geq 0$, если $A_\epsilon^2 > A_2^2 = 4a_0^2 c_0^2 / 3\pi^2$, и тогда расположение прямых линий такое (рис. 5, в):

$$\frac{Re_\sigma(0)}{Re_\Delta(0)} > 1, \quad 0 < \frac{dRe_\sigma/d\mu_1}{dRe_\Delta/d\mu_1} < 1.$$

В этом варианте имеется область устойчивого решения и существуют незатухающие колебания: $\sigma = 0$, $\Delta > 0$, $\mu_1 \in [0, \mu_1^0]$. Расчеты показывают, что осцилляторные решения имеются здесь при положительной вязкости (либо ньютоновская жидкость, $\mu = \mu_0$, либо турбулентная, $\mu_1^2 < 4\mu_2$) для $\alpha < 0$, т.е. при немонотонном распределении напоров. Отсюда вывод: при выполнении условий (31) и $A_\epsilon^2 > A_2^2$ динамическая система с отрицательной турбулентной вязкостью устойчивых решений не имеет.

Второй вариант: точка пересечения существует, если

$$\alpha_2 > 1 - 2\alpha > \alpha_3. \quad (32)$$

Эти неравенства совместны, если

$$A_\epsilon^2 < A_2^2, \mu_2 > \mu_2^0, \quad \mu_2^0 = 4/[9\pi^2(A_2^2 - A_\epsilon^2)]. \quad (33)$$

Тогда расположение линий (29), (30) такое (рис. 5, г):

$$0 < \frac{Re_\sigma(0)}{Re_\Delta(0)} < 1, \quad \frac{dRe_\sigma/d\mu_1}{dRe_\Delta/d\mu_1} > 1.$$

Расчеты показывают, что случай (32), (33) реализуется при $\alpha < 0$ (немонотонное распределение

напоров), а значения $\mu_1 \geq \mu_1^0$ соответствуют модели отрицательной вязкости. Как видим, расположение области устойчивого решения существенно отличается от предыдущего варианта (рис. 5, в). Вывод: при выполнении условий (32), (33) динамическая система не имеет устойчивых решений как для ньютоновской, так и для положительной турбулентной вязкости. Устойчивые решения и незатухающие колебания появляются при отрицательной турбулентной вязкости (заштрихованная клиновидная область на рис. 5, г). Принадлежность гидродинамического процесса к первому либо второму варианту зависит от числового значения A_ϵ , т. е., согласно (24), от выбора параметров c_0 и F .

Отметим свойства периода θ незатухающих колебаний для обоих вариантов: 1) чем больше число $1 - 2\alpha > 1$, т. е. чем сильнее выражена немонотонность продольного распределения напоров, тем период колебаний больше; 2) для варианта (31) в области положительной вязкости имеем $d\theta/d\mu_1 < 0$, $\mu_1 \in [0, \mu_1^0]$, $\mu_2 \geq 0$, т. е. по мере удаления от модели ньютоновской жидкости период колебаний уменьшается; 3) для варианта (32), т. е. для колебаний жидкости с отрицательной вязкостью, имеем $d\theta/d\mu_1 > 0$; значит, чем сильнее проявляется эффект отрицательной вязкости, тем больше период колебаний. Это означает, что между вариантами (31) и (32), кроме уже упомянутых различий (рис. 5, в, г), существует еще одно: по мере роста μ_1 периоды колебаний изменяются для этих процессов в противоположных направлениях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование гидродинамической системы с двумя сильными разрывами показало, что вырожденный случай прилипания ($\zeta = 0$) жидкости на внутренних стенках j -области не содержит интересных качественных явлений. Это означает, что проскальзывание жидкости на разрыве физически содержательно само по себе, вне связи с конкретными реологическими свойствами. Для разных реологических моделей жидкости (ньютоновская, нелинейно-вязкая, вязкоупругая) эффект скольжения проявляет себя многофакторным образом [2, 3, 18–20]. Представленные здесь примеры демонстрируют эволюционные свойства течений с турбулентной вязкостью на фоне эффекта скольжения.

1. Габов С.А. Новые задачи математической теории волн.– М.: Наука, 1998.– 448 с.
2. Шабловский О.Н. Динамические и тепловые свойства вихря скорости на сильном разрыве в пото-

ке вязкой релаксирующей жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./ Рос. акад. наук. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. Новосибирск.– 1995.– Вып. 110: Акустика неоднородных сред.– С. 177–180.

3. Шабловский О.Н. Вихрь скорости и гистерезисные нелинейности в потоке вязкоупругой жидкости // Гидромеханика.– 1997.– N71.– С. 119–125.
4. Салтанов Н.В., Горбань В.А. Вихревые структуры в жидкости: аналитические и численные решения.– Киев: Наук. думка, 1993.– 244 с.
5. Ларькин Н.Н., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа.– Новосибирск: Наука, 1983.– 270 с.
6. Маслова Н.Н., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Некоторые автомодельные решения для одного класса уравнений гидродинамики со знакопеременной вязкостью // Доклады АН СССР.– 1984.– Т. 277, N 2.– С. 295–299.
7. Sivashinsky G., Yakhot V. Negative viscosity effect in large-scale flows // Phys. Fluids.– 1985.– V. 28, N 4.– P. 1040–1042.
8. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 1.– С.-П.: Гидрометеоиздат, 1992.– 694 с.
9. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред.– М.: Энергоатомиздат, 1990.– 248 с.
10. Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью.– М.: Мир, 1971.– 260 с.
11. Монин А.С., Озмидов Р.В. Океанская турбулентность.– Л.: Гидрометеоиздат, 1981.– 346 с.
12. Незлин М.В., Снежкин Е.Н. Вихри Россби и спиральные структуры.– М.: Наука, 1990.– 240 с.
13. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1.– М.: Наука, 1973.– 536 с.
14. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики несжимаемой жидкости.– М.: Наука, 1970.– 288 с.
15. Бакай А.С., Сигов Ю.С. Многоликая турбулентность // Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур.– М.: Наука, 1996.– 10–94 с.
16. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред.– М.: Наука, 1984.– 520 с.
17. Страхович К.И. Двухразмерное движение вязкой несжимаемой жидкости // Записки Гос. гидрологич. ин-та.– 1932. – Т. 6. – С. 27–46 (Страхович К.И. Гидро- и газодинамика.– М.: Наука, 1980.– С. 29–46).
18. Шабловский О.Н. О знакопеременной диссипации энергии в жидкости с релаксирующими вязкими напряжениями // Инженерно-физич. журнал.– 1997.– Т. 70, N 6.– С. 967–974.
19. Тарунин Е.Л. Течение вязкой жидкости в замкнутой области при наличии эффектов проскальзывания // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.– 1980.– N 1.– С. 10–16.
20. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений.– М.: Наука, 1989.– 320 с.
21. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике.– М.: Наука, 1976.– 512 с.
22. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение.– М.: Наука, 1981.– 366 с.
23. Карлов Н.В., Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С. Лазерная термодинамика.– М.: Наука, 1992.– 296 с.
24. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны.– М.: Наука, 1997.– 496 с.