

УДК 532.59

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ОКЕАНА ПО ЕГО ВОЛНОВОМУ СПЕКТРУ

Э. Н. ПОТЕТЮНКО*, Л. В. ЧЕРКЕСОВ**, Д. С. ШУБИН*

* Ростовский государственный университет, Ростов-на-Дону

** Морской гидрофизический институт НАН Украины, Севастополь

Получено 20.06.99

В данной работе предложен один из методов решения "обратной задачи" – задачи восстановления характера стратификации океана на основе известных дисперсионных уравнений и дисперсионных кривых для внутренних гравитационных волн. Задавая значения частот колебаний и волновых чисел с разной степенью точности и моделируя характер стратификации некоторым образом (кусочно-линейная аппроксимация), показано с какой точностью возможно произвести его восстановление и тем самым обозначены границы чувствительности для измерительной аппаратуры.

В представленій роботі запропоновано один із методів розв'язування "оберненої задачі" – задачі відновлення характеру стратифікації океана на основі відомих дисперсійних рівнянь та дисперсійних кривих для внутрішніх гравітаційних хвиль. Задаючи значення частот коливань і хвильових чисел з різною мірою точності та моделюючи характер стратифікації деяким чином (кусочно-лінійна апроксимація), показано з якою точністю можливо здійснювати його відновлення і тим самим визначені межі чутливості для виміральної апаратури.

In this article one of the methods for solution of the "inverse problem", that is the problem for reconstruction of the character of ocean stratification on the basis of known dispersion equations and dispersion curves for internal gravity waves is proposed. Specifying the values of vibration frequencies and wave numbers with different degree of accuracy and modelling the character of stratification by a certain way (piecewise – linear approximation) the possible accuracy for reconstruction of the character of ocean stratification is shown and thus the boundaries of sensitivity for measuring instrument are established.

ВВЕДЕНИЕ

Исследования в области стратифицированных жидкостей занимают одно из центральных мест в океанологии. Задача о распространении внутренних волн в океане принадлежит к этому классу исследований. Основной интерес к ней вызван тем, что внутренние волны играют большую, а возможно и основную, роль в процессах, обуславливающих горизонтальный и вертикальный обмен в океане. Поскольку главным фактором, определяющим существование внутренних волн в океане, является устойчивая стратификация, которая соответствует увеличению плотности воды по направлению силы тяжести, т.е. от поверхности океана ко дну, то характер и поведение внутренних гравитационных волн тесно связаны с распределением поля плотности океана. Именно эта связь позволяет использовать теорию внутренних волн (волновой спектр) для решения задачи об определении плотности океана.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для исследования задачи о распространении внутренних гравитационных волн в океане пользуются моделью [4, 6] идеальной несжимаемой нетепло-

проводной жидкости. Такой подход объясняется тем, что во многих случаях при изучении гидродинамических процессов в океане диссипативными явлениями (вязкостью, трением, теплопроводностью и диффузией) можно пренебречь. Такое бездиссипативное приближение будет справедливым только для движений достаточно большого масштаба на ограниченном интервале изменения времени. Его называют равновесным. В [7] приведены оценки, из которых следует, что диссипативные явления практически не сказываются на распространении внутренних волн в океане. Дополнительно будем рассматривать теорию внутренних волн в приближении несжимаемости. В таком случае будут справедливы следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} + \rho \vec{G} &= -\text{grad} p, \\ \text{div} \vec{V} &= 0, \\ \frac{d\rho}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где \vec{V} – вектор абсолютной скорости частиц жидкости, \vec{G} – вектор массовой (гравитационной) силы, ρ – плотность жидкости, p – гидродинамическое давление в жидкости.

Система уравнений (1) описывает абсолютное движение идеальной несжимаемой жидкости в не-

подвижной системе координат. Будем считать, что эта система координат декартова, её центр находится в центре тяжести Земли, а одна из её осей направлена по оси вращения Земли. Рассмотрим наряду с неподвижной подвижную декартову систему координат $Oxyz$, связанную с поверхностью Земли, оси которой выбраны следующим образом: ось Oz направлена против силы тяжести, ось Ox на восток, ось Oy на север, точка O находится на невозмущенном уровне океана. Предполагая, что Земля движется равномерно, пренебрегая геоцентрическим склонением и опуская обозначения относительности движения, получаем следующий вид системы (1):

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\bar{V}}{dt} + \bar{F} &= -\text{grad}p - \rho g \bar{k}, \\ \text{div} \bar{V} &= 0, \\ \frac{d\rho}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где \bar{V} – вектор скорости в декартовой системе координат $Oxyz$, связанной с поверхностью Земли; g – ускорение свободного падения; $\bar{F} = 2\rho(\bar{\Omega} \times \bar{V})$ – сила Кориолиса; $\bar{\Omega}$ – вектор угловой скорости вращения Земли; \bar{k} – единичный орт, направленный по оси z (противоположно силе тяжести).

К системе уравнений (2) необходимо добавить граничные условия и условия по времени. По переменным $\{t, x, y\}$ поставим условия периодичности, а по координате z сформулируем условия на дне океана и на его поверхности. Если H – глубина океана ($H = \text{const}$), а ξ – возвышение свободной поверхности океана ($\xi = \xi(x, y, t)$), то условия имеют следующий вид:

$$V_z|_{z=-H} = 0, V_n|_{z=\xi} = \frac{d\xi}{dt}, p(x, y, z, t)|_{z=\xi} = 0. \quad (3)$$

Основная система уравнений (2) и граничных условий (3) при малых амплитудах может быть линеаризована относительно какого-либо квазистационарного состояния. Пусть в отсутствии волн океан находится в состоянии покоя, причем плотность ρ_0 невозмущенного океана зависит только от глубины, т.е. $\rho_0 = \rho_0(z)$. Тогда решение системы уравнений (2) представим в виде суммы известного решения \bar{V}_0 ($\bar{V}_0 = 0$), ρ_0 , $\rho_0(z)$ уравнений гидростатики и нового (“возмущенного”) решения \hat{V} , \hat{p} , $\hat{\rho}$. Используя “традиционное” приближение для силы Кориолиса [7] и выполняя процесс линеаризации, выводим, что однородность полученных после линеаризации уравнений и краевых

условий по переменным $\{x, y, t\}$ позволяет искать элементарные волновые решения в виде *бегущих волн*:

$$\{\hat{V}_x, \hat{V}_y, \hat{V}_z, \hat{p}, \hat{\rho}, \xi\} =$$

$$= \{U(z), V(z), W(z), P(z), Z\} \cdot e^{i(k_1x + k_2y - \omega t)},$$

где k_1 и k_2 – волновые числа; ω – частота колебаний.

После подстановки и преобразований получим, что неизвестные функции $U(z)$, $V(z)$, $P(z)$, $R(z)$, Z выразятся через амплитудную функцию $W(z)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} i\omega k^2 U(z) &= -(k_1\omega + ik_2f) W'(z), \\ i\omega k^2 V(z) &= -(k_2\omega - ik_1f) W'(z), \\ i\omega k^2 P(z) &= -\rho_0(z)(\omega^2 - f^2) W'(z), \\ i\omega R(z) &= -\frac{\rho_0(z)\mu(z)}{g} W(z), \\ i\omega Z &= -W(0), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\mu(z) \equiv N^2(z) = -\frac{\rho'_0(z)g}{\rho_0(z)}, k^2 = k_1^2 + k_2^2. \quad (5)$$

Сама функция $W(z)$ в случае приближения Буссинеска определяется как решение следующей краевой задачи:

$$\frac{d^2W}{dz^2} + \frac{\mu(z) - \omega^2}{\omega^2 - f^2} k^2 W(z) = 0,$$

$$A: W(-H) = 0, \quad \frac{dW(0)}{dz} - \frac{gk^2}{\omega^2 - f^2} W(0) = 0,$$

$$B: W(-H) = 0, \quad W(0) = 0. \quad (6)$$

Величина f носит название параметра Кориолиса. Функция $\mu(z)$, определяемая формулой (5), называется функцией квадрата частоты плавучести [3, 7, 8] или частоты Вайсяля-Брента.

Условия (A) в (6) являются полными краевыми условиями и не отделяют поверхностные волны от внутренних. Условия (B) соответствуют приближению “твердой крышки” [7, 10] и, значит, осуществляют фильтрацию внутренних волн от поверхностных.

Итак, после всего сказанного, мы получили, что поставленная задача о свободных колебаниях вертикально стратифицированной жидкости свелась к задаче Штурма-Лиувилля относительно амплитудной функции $W(z)$ вертикальной компоненты

скорости частиц жидкости с коэффициентами, зависящими от функции $\mu(z)$ квадрата частоты плавучести. И, таким образом, при сделанных предположениях частота плавучести является единственной характеристикой стратификации океана, определяющей поведение внутренних волн.

Для удобства рассмотрения преобразуем задачу (6) к безразмерным величинам, сделав замену переменного по формуле $z = -H\zeta$ и введя обозначения

$$\begin{aligned} W(\zeta) &= H\tilde{W}(\zeta), \quad \mu(\zeta) = \tilde{\mu}(\zeta) f^2/\tilde{f}^2, \\ \omega^2 &= \tilde{\omega}^2 f^2/\tilde{f}^2, \quad g = \tilde{g}Hf^2/\tilde{f}^2, \\ k^2 H^2 &= \tilde{k}^2, \quad \tilde{f}^2 = 10^{-2}. \end{aligned}$$

Значение величины \tilde{f}^2 является масштабирующим множителем.

После всех подстановок и преобразований, опуская обозначение безразмерности “” и меняя ζ на z , получим, что краевая задача (6) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W}{dz^2} + \frac{\mu(z) - \omega^2}{\omega^2 - f^2} k^2 W(z) &= 0, \\ A: \quad W(1) = 0, \quad \frac{dW(0)}{dz} + \frac{gk^2}{\omega^2 - f^2} W(0) &= 0, \\ B: \quad W(1) = 0, \quad W(0) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что в каждой точке z^* , лежащей внутри интервала изменения z , должны быть непрерывны [4, 6] нормальные скорости и давления. При непрерывной функции $\rho_0(z)$ первое условие дает непрерывность функции $W(z)$, а второе – непрерывность $W'(z)$ в точке z^* . Последнее следует из третьей строки формулы (4), в которой амплитудная функция давления записана через $W'(z)$.

Знание распределения функции $\mu(z)$ позволяет на его основе определять плотность океана при известных волновых числах k и частотах колебаний ω . Результаты построения функции $\mu(z)$ по натурным данным приведены в [10, 11]. Аппроксимация функции $\mu(z)$ дельтаобразными функциями и решение задачи (7) методом сращиваемых асимптотических разложений выполнена в [9]. В данной же работе за основу взят метод кусочно-линейной аппроксимации функции квадрата частоты плавучести.

2. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КВАДРАТА ЧАСТОТЫ ПЛАВУЧЕСТИ

Суть метода кусочно-линейной аппроксимации состоит в том, что отрезок $[0, 1]$ разбивается на

интервалы, и внутри каждого интервала функция $\mu(z)$ аппроксимируется линейными функциями, параметры которых меняются при переходе с одного интервала на другой. Выполнение граничных условий и “сшивание” решений и их производных на границах интервалов приводит к дисперсионному уравнению.

Рассмотрим краевую задачу (7). Если $\mu(z) = \mu^0 + \mu^1 z$, то дифференциальное уравнение (7) принимает следующий вид:

$$W''(z) + (az + b)W(z) = 0, \quad (8)$$

$$a = \mu^1 \gamma^2 / g, \quad b = (\mu^0 - \omega^2) \gamma^2 / g, \quad \gamma^2 = \frac{gk^2}{\omega^2 - f^2}. \quad (9)$$

При построении решения уравнения (8) важно знать, будет ли коэффициент при $W(z)$ знакопостоянен. Поэтому построим решение уравнения (8), рассмотрев два случая: а) $az + b > 0$ и б) $az + b < 0$.

а) Пусть $az + b > 0$. Сделав в уравнении (8) замену независимого переменного и неизвестной функции по формулам

$$\xi = a^{\frac{2}{3}}(az + b), \quad Y(\xi) = W(\xi) \xi^{-\frac{1}{2}},$$

получим

$$\xi^2 Y''(\xi) + \xi Y'(\xi) + \left(\xi^3 - \frac{1}{4}\right) Y(\xi) = 0.$$

После проведения замены $x = 2\xi^{2/3}/3$ получаем уравнение Бесселя

$$x^2 Y''(x) + x Y'(x) + (x^2 - \nu^2) Y(x) = 0, \quad \nu = \frac{1}{3}.$$

Его решение выражается через функции Бесселя. Возвращаясь к переменной z и функции $W(z)$, получаем

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{\sqrt{az+b}}{\sqrt[3]{|a|}} \left[AJ_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3|a|} \sqrt{(az+b)^3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + BJ_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3|a|} \sqrt{(az+b)^3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

б) Пусть $az + b < 0$. Сделав в уравнении (8) замену независимого переменного и неизвестной функции по формулам

$$\xi = -a^{\frac{2}{3}}(az + b), \quad Y(\xi) = W(\xi) \xi^{-\frac{1}{2}},$$

получим

$$\xi^2 Y''(\xi) + \xi Y'(\xi) - \left(\xi^3 + \frac{1}{4}\right) Y(\xi) = 0.$$

После замены $x = 2\xi^{2/3}/3$ получаем модифицированное уравнение Бесселя

$$x^2 Y''(x) + x Y'(x) - (x^2 + \nu^2) Y(x) = 0, \nu = \frac{1}{3}.$$

Его решение выражается через модифицированные функции Бесселя. Для функции $W(z)$ и переменной z имеем

$$W(z) = \frac{\sqrt{-(az+b)}}{\sqrt[3]{|a|}} \left[AI_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3|a|} \sqrt{-(az+b)^3} \right) + BI_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3|a|} \sqrt{-(az+b)^3} \right) \right]. \quad (11)$$

Таким образом, объединяя (10) и (11), выписываем решение уравнения (8) в следующей форме:

$$W(z) = A \cdot S(z) + B \cdot P(z).$$

При этом A и B – произвольные постоянные, а функции $S(z)$ и $P(z)$ определяются формулами следующего вида:

$$S(z) = \frac{1}{\sqrt[3]{|a|}} \begin{cases} \sqrt{az+b} \cdot J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3|a|} \sqrt{(az+b)^3} \right), & \text{если } az+b > 0, \\ \sqrt{-(az+b)} \cdot I_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3|a|} \sqrt{-(az+b)^3} \right), & \text{если } az+b < 0; \end{cases}$$

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt[3]{|a|}} \begin{cases} \sqrt{az+b} \cdot J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3|a|} \sqrt{(az+b)^3} \right), & \text{если } az+b > 0, \\ \sqrt{-(az+b)} \cdot I_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3|a|} \sqrt{-(az+b)^3} \right), & \text{если } az+b < 0. \end{cases}$$

Используя представление (9) для величин a и b , получаем

$$\frac{2}{3|a|} \sqrt{\pm(az+b)^3} = \frac{2}{3|\mu^1|} \sqrt{\pm \frac{\gamma^2}{g} (\mu^1 z + \mu^0 - \omega^2)^3},$$

$$\sqrt{\pm(az+b)} = \sqrt{\pm \frac{\gamma^2}{g} (\mu^1 z + \mu^0 - \omega^2)}.$$

После подстановки последних формул в полученный вид решения окончательно выводим

$$W(z) = C_1 S(z) + C_2 P(z), \quad (12)$$

$$S(z) = \begin{cases} \sqrt{\eta(z)} \cdot J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3|\mu^1|} \sqrt{\frac{\gamma^2}{g} \eta^3(z)} \right), & \text{если } \eta(z) > 0, \\ \sqrt{-\eta(z)} \cdot I_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3|\mu^1|} \sqrt{-\frac{\gamma^2}{g} \eta^3(z)} \right), & \text{если } \eta(z) < 0; \end{cases} \quad (13)$$

$$P(z) = \begin{cases} \sqrt{\eta(z)} \cdot J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3|\mu^1|} \sqrt{\frac{\gamma^2}{g} \eta^3(z)} \right), & \text{если } \eta(z) > 0, \\ \sqrt{-\eta(z)} \cdot I_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3|\mu^1|} \sqrt{-\frac{\gamma^2}{g} \eta^3(z)} \right), & \text{если } \eta(z) < 0. \end{cases}$$

Для дальнейшего понадобится знание производных от функций $S(z)$ и $P(z)$. Они имеют следующий вид:

$$S'(z) = \begin{cases} \frac{\mu^1}{2\sqrt{\eta(z)}} \cdot \alpha_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3|\mu^1|} \sqrt{\frac{\gamma^2}{g} \eta^3(z)} \right), & \text{если } \eta(z) > 0, \\ \frac{-\mu^1}{2\sqrt{-\eta(z)}} \cdot \beta_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3|\mu^1|} \sqrt{-\frac{\gamma^2}{g} \eta^3(z)} \right), & \text{если } \eta(z) < 0; \end{cases} \quad (14)$$

$$P'(z) = \begin{cases} \frac{\mu^1}{2\sqrt{\eta(z)}} \cdot \alpha_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3|\mu^1|} \sqrt{\frac{\gamma^2}{g} \eta^3(z)} \right), & \text{если } \eta(z) > 0, \\ \frac{-\mu^1}{2\sqrt{-\eta(z)}} \cdot \beta_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3|\mu^1|} \sqrt{-\frac{\gamma^2}{g} \eta^3(z)} \right), & \text{если } \eta(z) < 0, \end{cases}$$

где

$$\alpha_{\nu}(x) = J_{\nu}(x) + 3xJ'_{\nu}(x),$$

$$\beta_{\nu}(x) = I_{\nu}(x) + 3xI'_{\nu}(x),$$

или

$$\alpha_{\nu}(x) = (1+3\nu)J_{\nu}(x) - 3xJ_{\nu+1}(x), \quad \beta_{\nu}(x) = (1+3\nu)I_{\nu}(x) + 3xI_{\nu+1}(x). \quad (15)$$

Из граничных условий следует, что одно из них (при $z = 0$) позволяет выразить константу C_2 через C_1 :

$$C_2 = T_A C_1, \quad T_A = -\frac{S'(0) + \gamma^2 S(0)}{P'(0) + \gamma^2 P(0)}, \quad \text{для усл. (A)},$$

$$C_2 = T_B C_1, \quad T_B = -\frac{S(0)}{P(0)}, \quad \text{для усл. (B)}, \quad (16)$$

а второе (при $z = 1$) после подстановки в него (16) приводит к дисперсионным уравнениям

$$g_1^{(A)} = S(1) [P'(0) + \gamma^2 P(0)] - P(1) [S'(0) + \gamma^2 S(0)] = 0 \quad \text{для усл. (A)}, \quad (17)$$

$$g_1^{(B)} = S(1) P(0) - P(1) S(0) = 0 \quad \text{для усл. (B)}.$$

Обозначая постоянную C_1 через C_A в случае краевых условий типа (A) и через C_B в случае краевых условий типа (B), выводим, подставляя (16) в (12), следующий вид решения:

$$W^{(A,B)}(z) = C_{(A,B)} [S(z) + T_{(A,B)} P(z)].$$

Функции $S(z)$ и $P(z)$ определены в выражениях (13), а величины T_A и T_B в (16).

Обобщим рассмотренную задачу, разбив интервал изменения z на участки, на которых функция $\mu(z)$ приближается непрерывно отрезками наклонных прямых. В точках соединения двух участков используем условия сохранения непрерывности функции $W(z)$ и её первой производной.

Будем считать, что интервал изменения переменной z состоит из M отрезков длины

$$h_m \left(\sum_{i=1}^M h_i = 1 \right),$$

и на каждом из них $\mu(z)$ является линейной функцией координаты z . Тогда мы имеем $(M + 1)$ точку z_m , причём $z_m = z_{m-1} + h_m$, ($z_0 = 0$, $z_M = 1$), и

$$\mu_m(z) = \mu_m^0 + \mu_m^1 z, \quad \mu_m^0, \mu_m^1 = \text{const}, z \in [z_{m-1}, z_m], \quad m = 1..M. \quad (18)$$

Если известны значения функции $\mu(z)$ в каждой точке разбиения z_m ($m = 0..M$), то коэффициенты μ_m^0 и μ_m^1 можно определить из условия непрерывности функции $\mu(z)$ при переходе с одного слоя на другой. В этом случае имеем следующие формулы для вычислений:

$$\begin{cases} \mu_m^0 = 1/h_m [\mu(z_{m-1}) z_m - \mu(z_m) z_{m-1}] \\ m = 1..M \\ \mu_m^1 = 1/h_m [\mu(z_m) - \mu(z_{m-1})] \end{cases} \quad (19)$$

После подстановки представления (18) функции квадрата частоты плавучести в (7), получим в каждом из слоёв аналогичное (8) дифференциальное уравнение

$$W_m''(z) + (a_m z + b_m) W_m(z) = 0, \quad (20)$$

$$a_m = \frac{\mu_m^1 \gamma^2}{g}, b_m = \frac{(\mu_m^0 - \omega^2) \gamma^2}{g}, \gamma^2 = \frac{gk^2}{\omega^2 - f^2}$$

и граничные условия для $W_1(z)$ и $W_M(z)$:

$$W_1'(0) + \gamma^2 W(0) = 0, W_M(1) = 0 \quad \text{для усл. (A)}, \quad (21)$$

$$W(0) = 0, \quad W_M(1) = 0 \quad \text{для усл. (B)}, \quad (22)$$

где $W_m(z)$ – амплитудная функция вертикальной компоненты скорости в m -м слое ($m = 1..M$).

Решение уравнения (20) нами уже было построено ранее для случая одного слоя. Оно имеет вид (12). Относя это решение к введённым в рассмотрение слоям, получаем

$$W_m(z) = C_1^m S_m(z) + C_2^m P_m(z), \quad (23)$$

$$S_m(z) = \begin{cases} \sqrt{\eta_m(z)} \cdot J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3 |\mu_m^1|} \sqrt{\frac{\gamma^2}{g}} \eta_m^3(z) \right), & \text{если } \eta(z) > 0, \\ \sqrt{-\eta_m(z)} \cdot I_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3 |\mu_m^1|} \sqrt{\frac{\gamma^2}{g}} \eta_m^3(z) \right), & \text{если } \eta(z) < 0; \end{cases} \quad (24)$$

$$P_m(z) = \begin{cases} \sqrt{\eta_m(z)} \cdot J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3 |\mu_m^1|} \sqrt{\frac{\gamma^2}{g}} \eta_m^3(z) \right), & \text{если } \eta(z) > 0, \\ \sqrt{-\eta_m(z)} \cdot I_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3 |\mu_m^1|} \sqrt{\frac{\gamma^2}{g}} \eta_m^3(z) \right), & \text{если } \eta(z) < 0; \end{cases}$$

$$\eta_m(z) = \mu_m^1 z + \mu_m^0 - \omega^2.$$

Производные функций $S_m(z)$ и $P_m(z)$ вычисляются по формулам, аналогичным выражениям (14).

Для определения постоянных интегрирования C_1^m и C_2^m ($m = 1..M$) используем условия равенства вертикальных скоростей и давлений на границах рассматриваемых слоёв. Для функций $W_m(z)$ эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} W_m(z_m) &= W_{m+1}(z_m), \\ W'_m(z_m) &= W'_{m+1}(z_m) \quad m = 1..(M-1). \end{aligned} \quad (25)$$

После подстановки (23) в условия (25) получим линейную однородную систему уравнений относительно постоянных C_1^m, C_2^m и C_1^{m+1}, C_2^{m+1} :

$$\left\{ \begin{aligned} &C_1^m S_m(z_m) + C_2^m P_m(z_m) - \\ &-C_1^{m+1} S_{m+1}(z_m) - C_2^{m+1} P_{m+1}(z_m) = 0, \\ &C_1^m S'_m(z_m) + C_2^m P'_m(z_m) - \\ &-C_1^{m+1} S'_{m+1}(z_m) - C_2^{m+1} P'_{m+1}(z_m) = 0, \\ & \quad m = 1..(M-1). \end{aligned} \right.$$

Из этой системы выразим постоянные на $(m+1)$ слое через постоянные на слое m :

$$\left\{ \begin{aligned} C_1^{m+1} &= \delta_m^{-1} (C_1^m A_m + C_2^m B_m), \\ C_2^{m+1} &= \delta_m^{-1} (C_1^m D_m + C_2^m E_m), \end{aligned} \quad m = 1..(M-1), \right. \quad (26)$$

$$\begin{aligned} A_m &= S_m(z_m) P'_{m+1}(z_m) - S'_m(z_m) P_{m+1}(z_m), \\ D_m &= S'_m(z_m) S_{m+1}(z_m) - S_m(z_m) S'_{m+1}(z_m), \\ \delta_m &= S_{m+1}(z_m) P'_{m+1}(z_m) - S'_{m+1}(z_m) P_{m+1}(z_m), \\ B_m &= P_m(z_m) P'_{m+1}(z_m) - P'_m(z_m) P_{m+1}(z_m), \\ E_m &= P'_m(z_m) S_{m+1}(z_m) - P_m(z_m) S'_{m+1}(z_m). \end{aligned} \quad (27)$$

Первые условия формул (21) и (22) (граничное условие при $z = 0$) дают выражение для постоянной C_2^1 через постоянную C_1^1 :

$$C_2^1 = T_A C_1^1, \quad T_A = -\frac{S_1'(0) + \gamma^2 S_1(0)}{P_1'(0) + \gamma^2 P_1(0)}, \quad \text{для усл. (A)}$$

$$C_2^1 = T_B C_1^1, \quad T_B = -\frac{S_1(0)}{P_1(0)}, \quad \text{для усл. (B)} \quad (28)$$

Используя соотношения (26), выразим все постоянные C_1^m и C_2^m ($m = 2..M$) через одну постоянную C_1^1 , которую обозначим через C_A в случае

краевых условий типа (A) и через C_B в случае краевых условий типа (B). Тогда решение (23) для обоих типов краевых условий запишется в виде

$$W_m^{(A,B)}(z) = \frac{C^{(A,B)}}{\Delta_m} \left[R_m^{(A,B)} S_m(z) + Q_m^{(A,B)} P_m(z) \right], \quad (29)$$

$$R_m^{(A,B)} = R_{m-1}^{(A,B)} A_{m-1} + Q_{m-1}^{(A,B)} B_m, \quad m = 2..M, \quad (30)$$

$$Q_m^{(A,B)} = R_{m-1}^{(A,B)} D_{m-1} + Q_{m-1}^{(A,B)} E_m, \quad m = 2..M, \quad (31)$$

$$R_1^{(A,B)} = 1, Q_1^{(A,B)} = T_{(A,B)}, \quad (32)$$

$$\Delta_{n+1} = \delta_n \Delta_n, \Delta_1 = 1, n = 1..(M-1).$$

Коэффициенты $A_m, B_m, D_m, E_m, \delta_m$ и T_A, T_B задаются формулами (27) и (28) соответственно и от вида краевых условий не зависят. Вид функций $S_m(z)$ и $P_m(z)$ ($m = 1..M$) определён в (24).

Вторые условия формул (21) и (22) (граничное условие при $z = 1$) приводят к дисперсионным уравнениям следующего вида:

$$g_M^{(A,B)} = R_M^{(A,B)} S_M(1) + Q_M^{(A,B)} P_M(1) = 0. \quad (33)$$

В уравнении (33) под $R_M^{(A,B)}$ и $Q_M^{(A,B)}$ понимается последнее выражение, которое получится по завершении итерационных процессов (30) и (31) при начальных условиях (32). Верхний индекс (A, B) означает, что вычисления выполняются единообразно для краевых условий обоих типов. Различными являются только начальные значения для Q_1 в (32). Для заданных значений частот колебаний и волновых чисел, удовлетворяющих дисперсионным уравнениям (33), решение задачи на каждом слое имеет вид (29).

Если функция $\mu(z)$ имеет в своём распределении ярковыраженный пикноклин, то её можно аппроксимировать тремя наклонными прямыми и записать в следующем кусочно-линейном виде:

$$\mu(z) = \begin{cases} \mu_1^0 + \mu_1^1 z, & \text{если } z \in [0, z_1], \\ \mu_2^0 + \mu_2^1 z, & \text{если } z \in [z_1, z_2], \\ \mu_3^0 + \mu_3^1 z, & \text{если } z \in [z_2, 1]. \end{cases} \quad (34)$$

Коэффициенты μ_i^0 и μ_i^1 вычисляются через значения функции $\mu(z)$ в точках разбиения $(0, z_1, z_2,$

1) по формулам (19). Знание этой зависимости позволяет при решении обратной задачи сократить количество параметров, определяющих распределение функции $\mu(z)$.

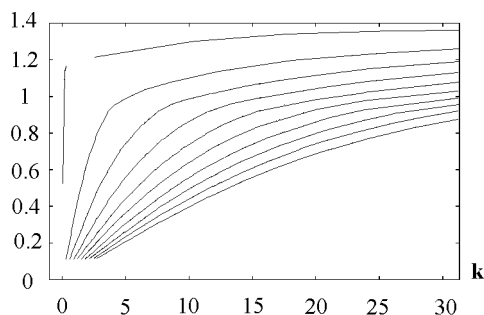


Рис. 1. Графики дисперсионных кривых для случая краевых условий (A)

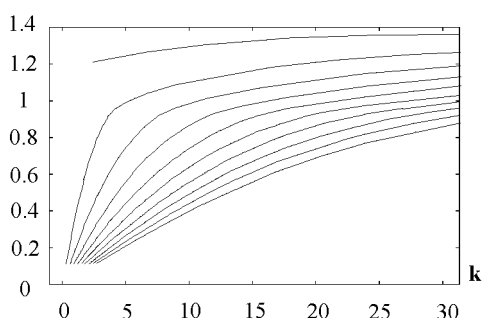


Рис. 2. Графики дисперсионных кривых для случая краевых условий (B)

В случае линейного распределения функции $\mu(z)$ ($\mu(z) = \mu^0 + \mu^1 z$) графики дисперсионных кривых для обоих типов краевых условий изображены на рис. 1 и 2. Для трёхслойного распределения функции $\mu(z)$ дисперсионные кривые имеют аналогичный вид. Следует отметить, что в случае краевых условий (A), т.е. при наличии свободной поверхности, появляется соответствующая ее дисперсионная кривая, характер которой существенно отличается от поведения остальных дисперсионных кривых (см. рис. 1). В области

$$\omega^2 > \min_{z \in [0,1]} \mu(z)$$

имеет место одна дисперсионная кривая (см. рис. 1 и рис. 2). Целого пакета дисперсионных кривых в этом случае не наблюдается. Как показал сравнительный анализ дисперсионных кривых, по-

строенных для обоих типов краевых условий, расхождение между ними, т.е. влияние приближения “твёрдой крышки”, тем меньше, чем больше значение k и номер дисперсионной кривой (моды). При этом нумерация дисперсионных кривых выполняется слева направо.

Подобность графиков, изображенных на рис. 1 и 2, объясняется единым физическим началом, тогда как отличия, наиболее хорошо видимые при сравнении числовых значений, лежащих на дисперсионных кривых, объясняются различной математической трактовкой физического процесса, т.е. различными краевыми условиями для $W(z)$ на поверхности (при $z = 0$).

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КВАДРАТА ЧАСТОТЫ ПЛАВУЧЕСТИ

Для рассматриваемой краевой задачи необходимо [1, 2, 9, 10] на основе известных значений $\{\omega, k\}$, лежащих на дисперсионных кривых, восстановить характер распределения функции $\mu(z)$ квадрата частоты Вайсяля-Брента. Один из методов решения этой задачи заключается в использовании дисперсионных уравнений, которые содержат в себе не только частоты колебаний ω и волновые числа k , но и параметры, характеризующие аппроксимацию функции $\mu(z)$. Знание этих параметров позволяет изучать характер стратификации жидкости и определять распределение плотности $\rho_0(z)$.

Следует отметить, что решение обратной задачи в общем случае неединственно [2, 5]. Уравнения, из которых необходимо определять параметры стратификации, нелинейны. Для однозначного определения функции $\mu(z)$ необходимо привлекать дополнительную информацию, например, другие дисперсионные уравнения и соответствующие значения $\{\omega, k\}$, полученные при других краевых условиях, или же известные значения фазовой скорости распространения волны. Если остановиться на первом варианте, то представляется возможным при решении обратной задачи использовать специальным образом построенные функции, имеющие минимум на точных значениях параметров стратификации. Это свойство использовалось при решении обратной задачи в данной работе.

Для случая, когда $\mu(z) = \mu^0 + \mu^1 z$, определение параметров функции $\mu(z)$ по известным значениям частот колебаний и волновых чисел сводится к минимизации функции двух переменных следующего вида:

$$\Phi_1(\mu^1, \mu^0) = \frac{1}{N_A + N_B} \left(\sum_{i=1}^{N_A} |g_1^{(A)}(\omega_i, k_i)| + \sum_{i=1}^{N_B} |g_1^{(B)}(\omega_i, k_i)| \right).$$

Функции $g_1^{(A)}$ и $g_1^{(B)}$ являются левыми частями дисперсионных уравнений и заданы в (17). Очевидно, что минимум построенной функции достигается на точных значениях μ^1 и μ^0 .

Для исследования влияния точности задания значений ω и k на точность и возможность восстановления функции $\mu(z)$ минимизация функции $\Phi_1(\mu^1, \mu^0)$ выполнялась при разном количестве значащих цифр в значениях $\{\omega, k\}$. Степень отклонения восстановленной функции $\tilde{\mu}(z)$ от точной $\mu(z)$ определялась по формуле

$$\frac{\|\tilde{\mu}(z) - \mu(z)\|}{\|\mu(z)\|} \cdot 100\%,$$

где $\|f(x)\|$ – норма функции $f(x)$, которая бралась в пространствах C , L_1 и L_2 . Из результатов проведённого исследования (табл.1) следует, что восстановление линейного распределения функции $\mu(z)$ с удовлетворительной погрешностью возможно, если значения ω и k заданы с двумя и более значащими цифрами.

В случае трёхслойного распределения (34) функции $\mu(z)$ все действия проводятся по аналогичной схеме. Увеличивается только объём и сложность вычислений. Сформируем функцию следующего вида:

$$\Phi_3(z_1, z_2, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = \frac{1}{N_A + N_B} \times \left(\sum_{i=1}^{N_A} |g_3^{(A)}(\omega_i, k_i)| + \sum_{i=1}^{N_B} |g_3^{(B)}(\omega_i, k_i)| \right),$$

где функции $g_3^{(A)}$ и $g_3^{(B)}$ являются левыми частями дисперсионных уравнений и заданы в (33), z_1 и z_2 – внутренние точки разбиения, μ_i – значения функции $\mu(z)$ в точках разбиения ($i = 0, 1, 2, 3$). Итог минимизации функции $\Phi_3(\dots)$ при различной точности значений ω и k продемонстрирован в табл. 2.

Как видно из приведённых результатов (см. табл. 2) удовлетворительной точности восстановления параметров функции $\mu(z)$ можно добиться при двух и более значащих цифрах в значениях ω

Табл. 1. Точность восстановления функции $\mu(z) = \mu^0 + \mu^1 z$ по норме в пространствах C , L_1 , L_2 .

Погрешность восстановления	Количество значащих цифр в значениях ω и k , в %			
	1	2	3	4
в пространстве C	16.84	0.53	0.14	0.01
в пространстве L_1	22.85	0.30	0.08	0.00
в пространстве L_2	26.99	0.36	0.10	0.00

Табл. 2. Точность восстановления функции $\mu(z) = \mu^0 + \mu^1 z$ по норме в пространствах C , L_1 , L_2 .

Погрешность восстановления	Количество значащих цифр в значениях ω и k , в %			
	1	2	3	4
в пространстве C	14.19	2.83	0.32	0.19
в пространстве L_1	104.09	1.79	0.23	0.04
в пространстве L_2	103.18	3.53	0.33	0.08

и k . При одной же значащей цифре восстановление возможно, но получаемый при этом результат очень далёк от искомого распределения функции $\mu(z)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере задачи о распространении внутренних гравитационных волн решена обратная спектральная задача – задача восстановления переменного коэффициента дифференциального уравнения второго порядка по известному спектру. В качестве основы выбрана кусочно-линейная аппроксимация функции квадрата частоты плавучести, входящей в переменный коэффициент исходного дифференциального уравнения. Исследовано влияние точности входной информации на возможность и точность восстановления характера стратификации жидкости (см. табл. 1 и 2). Показано, что при двух и более значащих цифрах в значениях ω и k восстановление функции квадрата частоты плавучести можно считать удовлетворительным. При одной же значащей цифре имеет место значительная погрешность восстановления (табл. 1 и 2).

1. Гродский С.А., Кудрявцев В.Н. Восстановление профиля плотности по натурным дисперсион-

- ным соотношениям короткопериодных внутренних волн // Методы обработки океанологической информации.– Севастополь.– 1983.– С. 59-66.
2. Гродский С.А., Кудрявцев В.Н. Описание гидрологической структуры океана по дисперсионному соотношению внутренних волн // Дистанционное зондирование океана.– Севастополь, МГИ АН УССР.– 1982.– С. 97-108.
 3. Каменкович В.М. Основы динамики океана.– Л.: Гидрометеоиздат, 1973.– 240 с.
 4. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1,2.– М.: Физматгиз, 1963.– 728 с.
 5. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля.– М.: Наука, 1984.– 240 с.
 6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1971.– 1108 с.
 7. Миропольский Ю.Э. Динамика внутренних гравитационных волн в океане.– Л.: Гидрометеоиздат, 1981.– 301 с.
 8. Монин А.С., Каменкович В.М., Корт В.Г. Изменчивость Мирового океана.– Л.: Гидрометеоиздат, 1974.– 301 с.
 9. Шубин Д.С. Определение параметров стратификации океана на основе асимптотического закона дисперсии внутренних волн // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки.– 1999.– N 1.– С. 28-36.
 10. Щербак Е.Н. Определение свободных колебаний одного из районов Мирового океана. // Деп. в ВИНИТИ, – 15.07.98, – N 2203-В98, – 39 с.
 11. Щербак Е.Н. Экспериментальное определение частоты плавучести // Труды II Международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды”, Ростов н/Д.– 1996.– Т. 2.– С. 196-200.