

УДК 532.528

## ВОЛНОВЫЕ СТРУКТУРЫ В МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

Н. Ф. ПАЦЕГОН, Л. Н. ПОПОВА

Харьковский национальный университет

Получено 12.07.2000

Исследуются условия возникновения и устойчивости нестационарных структур типа волны переключения в магнитной жидкости с изменяющейся микроструктурой. Установлено существование трех типов магнитных жидкостей: жидкости, неустойчивые в любом магнитном поле, и жидкости, для которых в некотором интервале значений напряженности магнитного поля существует одно или два асимптотически устойчивых равновесных состояния соответственно. Для последних двух типов жидкостей обнаружено возникновение волновых структур типа волн переключения, распространение которых приводит к переходу элементов среды из метастабильного состояния в абсолютно устойчивое.

Досліджуються умови виникнення та стійкості нестационарних структур типу хвилі перемикання в магнітній рідині зі змінною микроструктурою. Встановлено існування трьох типів магнітних рідин: рідини, нестійкі в будь-якому магнітному полі, та рідини, для яких в деякому інтервалі значень напруженості магнітного поля існує один або два асимптотично стійких рівноважених стани відповідно. Для останніх двох типів рідин виявлено виникнення хвильових структур типу хвиль перемикання, поширення яких приводить до переходу елементів середовища з метастабільного стану в абсолютно стійкий.

The conditions of appearance and stability of unstable structures in the form of the diversion wave in magnetic fluid with changing microstructure are investigated. The existence of three types of magnetic fluids is established: the fluids which are unstable in any magnetic fields and the fluids, for which exists one or two asymptotically stable balanced states accordingly. For the last two types of fluids the appearance of the wave structures in the form of diversion waves, which propagation results in the transition of the medium elements from the meta stable state to the absolutely stable state is found.

### ВВЕДЕНИЕ

Исследование процессов структурирования магнитной жидкости представляет практический интерес в связи с проблемами, возникающими при эксплуатации магнитожидкостных технических устройств (уплотнений, токосъемников, амортизаторов и др.) Вопросам структурирования магнитной жидкости посвящено немало экспериментальных и теоретических работ [1-10]. Среди публикаций, появившихся на эту тему в последние годы, необходимо выделить работы [6-10]. Авторами статьи [6] решена плоская задача о перераспределении агрегатов в магнитной жидкости, заполняющей сосуд, состоящий из двух резервуаров - верхнего и нижнего, соединенных вертикальным каналом. Показано, что под действием термоманитной силы, возникающей при нагреве стенок канала до разных постоянных температур, происходит перенос агрегатов из нижнего резервуара в верхний. Ранее этот эффект наблюдался экспериментально и описан в работе [5]. В [7] приведены экспериментальные результаты по вязкости и начальной проницаемости магнитных суспензий, приготовленных из частиц кремнезема, взвешенных в феррожидкости. Предложена аналитическая модель, основанная на представлении структуры как ансамбля цилиндров, позволяющая предска-

зывать предел текучести суспензий. В [9-10] исследуется деформация микрокапель концентрированной фазы ферроэмульсии в зависимости от напряженности магнитного поля. Особенностью указанных работ является вносимое авторами предположение о наличии в феррожидкости сформированных агрегатов магнитных частиц. Непосредственно процессы возникновения и динамики агрегатов в них не исследуются.

Простейшая модель, учитывающая возникновение в магнитной жидкости агрегатов, содержащих конечное число магнитных частиц, предложена в работе [11]. Такая жидкость представляет собой триггерную (бистабильную) среду [12], способную к самоорганизации. Изучены стационарные пространственные структуры в покоящейся в однородном магнитном поле жидкости [13]. В предлагаемой работе исследуются условия возникновения и устойчивость нестационарных структур типа волн переключения.

### 1. РАВНОВЕСНЫЕ КРИВЫЕ НАМАГНИЧИВАНИЯ

Рассматривается магнитная жидкость, микроструктура которой может изменяться за счет образования и распада агрегатов из магнитных частиц, входящих в состав жидкости [11]. Для

определения магнитного состояния такой жидкости вводится два дополнительных параметра: параметр эффективного магнитного поля  $\lambda$  и среднее число магнитных частиц в агрегатах  $\nu^{-1}$ , связанные с намагниченностью  $M$  неоднозначной функциональной зависимостью. Если жидкость покоится в постоянном однородном магнитном поле, временная эволюция ее магнитного состояния в одномерном случае описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \tau_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial t} &= D_\lambda \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H), \\ \tau_\nu \frac{\partial \nu}{\partial t} &= D_\nu \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H). \end{aligned} \quad (1)$$

Для жидкости, микроструктура которой изменяется в результате фазового перехода второго рода, функции  $Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H)$  и  $Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H)$  задаются в виде

$$\begin{aligned} Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H) &= \frac{1}{2\rho} [M^2 - M_*^2 - \\ &- 2\beta M_s^2 (\lambda - \lambda_{1*})(\lambda - \lambda_{2*})(\lambda - \lambda_{3*})], \\ Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H) &= \frac{n_1 k T}{\rho} [f(\xi) - f(\xi_*) + \\ &+ \alpha (\nu - \nu_{1*})(\nu - \nu_{2*})(\nu - \nu_{3*})]. \end{aligned}$$

Здесь  $\xi = m_1 H_e / (k T \nu)$ ;  $H_e = H + \lambda M$ ;  $n_1 = c_1 \rho / M$  – объемная плотность феррочастиц;  $c_1$  – массовая концентрация частиц, предполагаемая постоянной;  $M$  – масса одиночной феррочастицы;  $k$  – постоянная Больцмана; намагниченность жидкости определяется уравнением  $M = M_s L(\xi)$ ,  $L(\xi) = \text{cth } \xi - 1/\xi$  – функция Ланжевена;  $M_*$  – намагниченность структурирования жидкости;  $M_* = M_s L(\xi_*) = M_s L_*$ ;  $M_s = m_1 n_1$  – намагниченность насыщения жидкости;  $\lambda_{i*}, \nu_{i*}$  ( $i = \overline{1,3}$ ) – равновесные значения  $\lambda$  и  $\nu$  при  $M = M_*$ , причем  $\lambda_{1*} > \lambda_{3*} > \lambda_{2*}$ ;  $\lambda_{1*} + \lambda_{2*} = 2\lambda_{3*}$ ;  $\nu_{1*} > \nu_{3*} > \nu_{2*}$ ;  $\nu_{i*} - \nu_{j*} = m_1 M_s L_*(\lambda_{i*} - \lambda_{j*}) / (k T \xi_*)$ ;  $\alpha = (k T (m_1 M_s))^3 (\xi_* / L_*)^4 \beta$ ;  $f(\xi) = \ln(\text{sh } \xi / \xi) - \xi L(\xi)$ . Параметры  $\tau_\lambda, \tau_\nu, D_\lambda$  и  $D_\nu$  считаются постоянными.

Однородное равновесное состояние жидкости удовлетворяет условиям:

$$Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H) = 0, \quad Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H) = 0. \quad (2)$$

При  $\lambda_{1*} \neq \lambda_{2*}$  и фиксированном  $H$  функции  $\lambda(M)$  и  $\nu(M)$ , определяемые уравнениями (2), неоднозначны. Функция  $\lambda(M)$  представлена на рис. 1. Аналогичный график имеет функция  $\nu(M)$ . Зависимости  $M(\lambda)$  и  $M(\nu)$ , обратные  $\lambda(M)$  и  $\nu(M)$

соответственно, являются однозначными. Их экстремальные значения  $M'_{(\lambda)}$ ,  $M''_{(\lambda)}$  и соответствующие этим экстремумам точки  $\lambda'_{(\lambda)}$ ,  $\lambda''_{(\lambda)}$  определяются выражениями:

$$M'_{(\lambda)} = \left[ M_*^2 \pm \frac{\beta M_s^2 \langle \lambda \rangle^3}{6\sqrt{3}} \right]^{1/2}, \quad M''_{(\lambda)} = M_s L(\xi'_{(\lambda)}),$$

$$f(\xi'_{(\lambda)}) = f(\xi_*) \mp \frac{\beta \xi_* \langle \lambda \rangle^3}{12\sqrt{3} L_*}; \quad (3)$$

$$\lambda'_{(\lambda)} = \lambda_{3*} \mp \frac{\langle \lambda \rangle}{2\sqrt{3}}, \quad \lambda''_{(\lambda)} = \lambda_{3*} \mp \frac{\langle \lambda \rangle}{2\sqrt{3}},$$

где  $\langle \lambda \rangle \equiv \lambda_{2*} - \lambda_{1*} (< 0)$ ,  $\langle \nu \rangle \equiv \nu_{2*} - \nu_{1*} (< 0)$ .

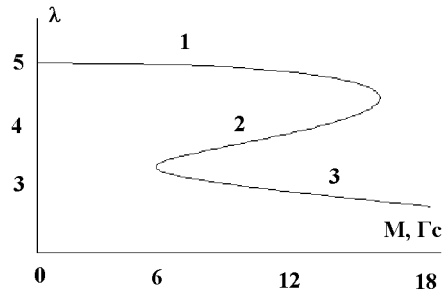


Рис. 1. Зависимость  $\lambda(M)$  ( $m_1 = 10^{-16}$  эрг/Гс,  $M_s = 40$  Гс,  $\xi_* = 1$ ,  $\beta = -0.1$ ,  $\lambda_{3*} = 4$ ,  $\langle \lambda \rangle = -1$ )

При  $0 < -\beta \ll 1$  эти значения с точностью до малых первого порядка совпадают, так как из (3) следует

$$\xi'_{(\lambda)} \approx \xi''_{(\lambda)} \approx \xi_* \pm \frac{\beta \langle \lambda \rangle^3}{12\sqrt{3} L_* L'_*},$$

$$M'_{(\lambda)} \approx M''_{(\lambda)} \approx M_* \pm \frac{\beta M_s \langle \lambda \rangle^3}{12\sqrt{3} L_*}.$$

Кривые намагничивания для этого случая исследованы в работе [14].

При конечных отрицательных  $\beta$   $M'_{(\lambda)} \neq M'_{(\nu)}$ ,  $M''_{(\lambda)} \neq M''_{(\nu)}$ , и функция  $M(H)$ , как видно из равенства

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dH} &= m_1 M_s L' M_\lambda M_\nu / (k T \nu - \\ &- m_1 M_s \lambda L') M_\lambda M_\nu + M_s L' (k T \xi M_\lambda - m_1 M M_\nu)^{-1}, \end{aligned}$$

имеет четыре максимума, один из которых соответствует большему из значений  $M'_{(\lambda)}$  и  $M'_{(\nu)}$ , а три – меньшему значению; и четыре минимума, один из которых соответствует меньшему из значений  $M''_{(\lambda)}$  и  $M''_{(\nu)}$ , а три – большему значению. В этом равенстве  $M_\lambda \equiv dM/d\lambda$ ,  $M_\nu \equiv dM/d\nu$ .

Рассматриваемая жидкость обладает гладкой самопересекающейся кривой намагничивания, которую можно представить в виде объединения девяти однозначных ветвей функции  $H(M)$  :

$$H^{(ij)}(M) = \frac{kT}{m_1} \nu^{(j)}(M) L^{-1} \left( \frac{M}{M_s} \right) - \lambda^{(i)}(M) M \quad (i, j = \overline{1, 3}). \quad (4)$$

Здесь через  $\lambda^{(i)}(M)$  и  $\nu^{(j)}(M)$  обозначены однозначные ветви равновесных зависимостей  $\lambda(M)$  и  $\nu(M)$  (см. рис. 1), а для  $H(M)$  принята двойная нумерация: первая цифра указывает на номер ветви функции  $\lambda(M)$ , а вторая - на номер ветви функции  $\nu(M)$ ;  $L^{-1}$  - функция, обратная функции Ланжевена.

Три ветви  $H^{(ij)}$  из девяти пересекаются в точке  $(H_*, M_*)$ . Две ветви пересекаются в точке с координатами  $H = kT\nu_{3*}\xi_*/m_1 - \lambda_{1*}M_*$ ,  $M = M_*$  и еще две ветви пересекаются в точке с координатами  $H = kT\nu_{3*}\xi_*/m_1 - \lambda_{2*}M_*$ ,  $M = M_*$ .

При исследовании устойчивости однородных равновесных состояний жидкости кривую намагничивания удобнее представлять в виде объединения однозначных ветвей функции  $M(H)$ . Концами этих ветвей служат начало координат, точки с вертикальной касательной (в них  $dH/dM = 0$ ) и бесконечно удаленная точка  $H \rightarrow \infty$ ,  $M \rightarrow M_s$ . Каждая ветвь функции  $M(H)$  совпадает с одной из ветвей функции  $H(M)$  всюду, за исключением некоторой окрестности точки с вертикальной касательной. В дальнейшем для ветвей  $M(H)$  используются те же номера, что для соответствующих ветвей  $H(M)$ , но подчеркнутые сверху.

В силу ограниченности параметра  $\nu$

$$(0 < \nu \leq 1)$$

точки кривой, описываемой уравнениями (4), имеют физический смысл только при  $0 \leq M \leq \overline{M}$  ( $< M_s$ ) и, соответственно, на конечном интервале изменения  $H$  :  $0 \leq H \leq \overline{H}$ . Значение  $\overline{M}$  определяется из равенств  $f(\overline{\xi}) = f(\xi_*) + \alpha\nu_1\nu_2\nu_{3*}$ ,  $\overline{M} = M_s L(\overline{\xi})$ . Кроме того, предполагается выполненным условие парамагнитности среды  $3kT\nu > m_1 M_s \lambda$ , что накладывает дополнительные ограничения на интервал допустимых значений  $H$ .

Расчеты проводились для жидкостей с различными значениями параметров  $m_1$ ,  $M_s$ ,  $\xi_*$ ,  $\beta$ ,  $\lambda_{3*}$ ,  $\langle \lambda \rangle$  и  $\nu_{3*}$ . На рис. 2 представлена кривая намагничивания, полученная при  $\nu_{3*} = 0.25$  (значения остальных параметров указаны в подписи к рис. 1). В этом случае  $M_* = 12.5$  Гс,  $H_* = 50.99$  Э, а

петли кривой намагничивания расположены в прямоугольнике  $10.99 \text{ Э} < H < 104.55 \text{ Э}$ ,  $5.54 \text{ Гс} < M < 16.73 \text{ Гс}$ .

При возрастании  $\xi_*$  и фиксированных остальных параметрах жидкости точка  $(H_*, M_*)$ , а вместе с ней и все петли, смещаются вверх по кривой намагничивания. При увеличении  $\beta$  и  $\langle \lambda \rangle$  растет высота и ширина петель кривой намагничивания. Увеличение параметра  $\nu_{3*}$  приводит к некоторому повороту петель относительно точки  $(H_*, M_*)$ . Так, при  $\nu_{3*} = 0.25$  области определения ветвей  $\overline{21}$  и  $\overline{23}$  имеют общий отрезок  $30.99 \text{ Э} \leq H \leq 46.86 \text{ Э}$ , а при  $\nu_{3*} = 0.2$  эти области не пересекаются.

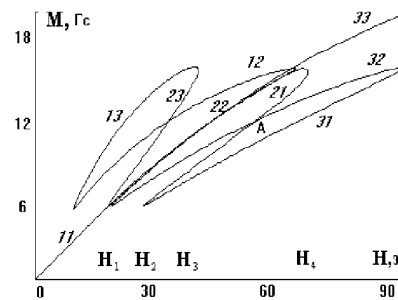


Рис. 2. Кривая намагничивания жидкости с изменяющейся микроструктурой

При  $0 < -\beta \ll 1$  две точки максимума функции  $M(H)$  сливаются в одну, совпадают также две точки минимума, а одноименные ветви зависимостей  $\lambda(M)$  и  $\nu(M)$  дают кривую намагничивания, показанную на рис. 2 работы [14].

## 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОРОДНЫХ СОСТОЯНИЙ

Предположим, что рассматриваемая жидкость заполняет зазор между двумя параллельными немагнитными пластинами, расстояние между которыми равно  $l$ . Ось  $Ox$  перпендикулярна пластинам, а начало координат находится на одной из них. Если магнитное поле направлено вдоль  $Ox$ , то изменение среднего числа магнитных частиц в агрегатах  $\nu^{-1}(x, t)$  и параметра эффективного магнитного поля  $\lambda(x, t)$  в слое жидкости удовлетворяет уравнениям (1) и крайевым условиям

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \lambda}{\partial x}(l, t) = 0, \quad \frac{\partial \nu}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \nu}{\partial x}(l, t) = 0.$$

Исследуем устойчивость однородного стационарного состояния жидкости  $\lambda = \lambda_e$ ,  $\nu = \nu_e$ . Для этого линеаризуем уравнения (1) в окрестности этого состояния, а возмущения  $\delta \lambda$  и  $\delta \nu$  представим

в виде  $\exp(\omega t) \cos(m\pi x/l)$  ( $m = 0, 1, \dots$ ). Подставляя выражения для  $\delta\lambda$  и  $\delta\nu$  в линеаризованную систему и решая характеристическое уравнение относительно  $\omega$ , получаем:

$$\omega_m^\pm = \frac{1}{2} \left[ a_m - b_m \pm \sqrt{(a_m + b_m)^2 + 4(Q_\nu^{(\lambda)})^2 / (\tau_\lambda \tau_\nu)} \right] \quad (5)$$

где введены обозначения:

$$a_m = \frac{1}{\tau_\lambda} (Q_\lambda^{(\lambda)} - D_\lambda \gamma_m^2), \quad b_m = \frac{1}{\tau_\nu} (D_\nu \gamma_m^2 - Q_\nu^{(\nu)}),$$

$$Q_\lambda^{(\lambda)} = \frac{\partial Q^{(\lambda)}}{\partial \lambda}(\lambda_\epsilon, \nu_\epsilon; H), \quad Q_\nu^{(\nu)} = \frac{\partial Q^{(\nu)}}{\partial \nu}(\lambda_\epsilon, \nu_\epsilon; H),$$

$$\gamma_m = \frac{m\pi}{l}.$$

Выпишем выражения для производных от  $Q^{(\lambda)}$  и  $Q^{(\nu)}$  по  $\lambda$  и  $\nu$ :

$$Q_\lambda^{(\lambda)} = \frac{M_s}{\rho} \left( \frac{m_1 M^2}{\psi} - 3\beta M_s (\lambda - \lambda') (\lambda - \lambda'') \right),$$

$$Q_\nu^{(\lambda)} = Q_\lambda^{(\nu)} = -\frac{k T M_s \xi M}{\rho \psi}, \quad (6)$$

$$Q_\nu^{(\nu)} = \frac{n_1 k T}{\rho} \left( \frac{k T \xi^2}{\psi} + 3\alpha (\nu - \nu') (\nu - \nu'') \right).$$

Здесь  $\psi = \psi(\lambda, \nu, \xi) \equiv k T \nu / L' - m_1 M_s \lambda$ .

Мы рассматриваем среду, удовлетворяющую условию парамагнитности, поэтому  $\psi > k T \nu / 3 - m_1 M_s \lambda > 0$ , следовательно  $Q_\nu^{(\lambda)} < 0$ .

Из соотношения (5) следует, что все значения  $\omega_m^\pm$  являются вещественными, а при  $m \rightarrow \infty$

$$\omega_m^\pm \sim -\gamma_m^2 < 0,$$

т.е. моды, соответствующие  $m \rightarrow \infty$ , стремятся стабилизировать жидкость. Кроме того, из (5) получаются условия асимптотической устойчивости:

$$Q_\lambda^{(\lambda)} < 0, \quad Q_\nu^{(\nu)} < 0, \quad \Delta \equiv Q_\lambda^{(\lambda)} Q_\nu^{(\nu)} - [Q_\nu^{(\lambda)}]^2 > 0.$$

Посмотрим, каким ветвям кривой намагничивания принадлежат устойчивые однородные равновесные состояния жидкости. Из выражения (6) видно, что при  $\lambda \geq \lambda'$  или  $\lambda \leq \lambda''$ , т.е. на ветвях 1 и 3, зависимости  $\lambda(M)$ ,  $Q_\lambda^{(\lambda)} > 0$ , а при  $\nu'' \leq \nu \leq \nu'$ , т.е. на ветви 2, зависимости  $\nu(M)$ ,  $Q_\nu^{(\nu)} > 0$ , т.е. устойчивые состояния могут находиться только на ветвях 21 и 23 функции  $H(M)$ . Справедливо соотношение:

$$\Delta = \frac{n_1 k T \xi M}{\rho^2 M_s \psi} [M_s (m_1 M M_\nu - k T \xi M_\lambda) - \psi M_\lambda M_\nu] =$$

$$= -\frac{k T \xi M_s M M_\lambda M_\nu}{\rho^2 \psi} \frac{dH}{dM},$$

из которого следует, что величина  $\Delta$  обращается в нуль только в точках с вертикальной касательной (они не совпадают с точками экстремума функций  $M(\lambda)$  и  $M(\nu)$ ), т.е. на концах ветвей функции  $M(H)$ , а во внутренних точках этих ветвей  $\Delta$  знакопостоянна.

Значение  $\Delta$  в точке А ветви  $\overline{21}$

$$\Delta = \frac{3}{4} \beta \left( \frac{n_1 k T \xi_* \langle \lambda \rangle}{\rho L_*} \right)^2 \left[ \frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi(\lambda_{3*}, \nu_{1*}, \xi_*)} + \frac{\beta \langle \lambda \rangle^2}{6} \right]$$

положительно при

$$-\frac{\beta \langle \lambda \rangle^2}{6} > \frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi(\lambda_{3*}, \nu_{1*}, \xi_*)} \quad (7)$$

и отрицательно в противном случае. Если условие (7) выполнено, то значения  $Q_\lambda^{(\lambda)}$  и  $Q_\nu^{(\nu)}$  в точке А отрицательны:

$$Q_\lambda^{(\lambda)} = \frac{M_s^2}{\rho} \left( \frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi(\lambda_{3*}, \nu_{1*}, \xi_*)} + \frac{\beta \langle \lambda \rangle^2}{4} \right) < 0,$$

$$Q_\nu^{(\nu)} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{k T \xi_*}{m_1 L_*} \right)^2 \left( \frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi(\lambda_{3*}, \nu_{1*}, \xi_*)} + \frac{\beta \langle \lambda \rangle^2}{2} \right) < 0,$$

и  $Q_\lambda^{(\lambda)}$ ,  $Q_\nu^{(\nu)}$  отрицательны на всей ветви  $\overline{21}$ . Действительно,  $Q_\lambda^{(\lambda)}$  и  $Q_\nu^{(\nu)}$  не могут обращаться в 0 во внутренних точках ветви, так как в этом случае значение  $\Delta$  поменяло бы знак. Таким образом, неравенство (7) обеспечивает асимптотическую устойчивость всех однородных равновесных состояний, соответствующих внутренним точкам ветви  $\overline{21}$ .

Аналогичное условие устойчивости можно получить для точек ветви  $\overline{23}$ :

$$-\frac{\beta \langle \lambda \rangle^2}{6} > \frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi(\lambda_{3*}, \nu_{2*}, \xi_*)}, \quad (8)$$

которое в силу соотношения  $\nu_{1*} > \nu_{2*}$  является более сильным, чем условие (7).

Итак, если параметры жидкости удовлетворяют неравенству (8), то ветви  $\overline{21}$  и  $\overline{23}$  кривой намагничивания содержат асимптотически устойчивые однородные равновесные состояния жидкости; если выполнено неравенство

$$\frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi(\lambda_{3*}, \nu_{1*}, \xi_*)} < -\frac{\beta \langle \lambda \rangle^2}{6} < \frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi(\lambda_{3*}, \nu_{2*}, \xi_*)}, \quad (9)$$

то устойчивым состояниям отвечают только внутренние точки ветви  $\overline{21}$ , а при

$$-\frac{\beta \langle \lambda \rangle^2}{6} < \frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi(\lambda_{3*}, \nu_{1*}, \xi_*)} \quad (10)$$

устойчивых однородных равновесных состояний не существует. При этом на ветвях, соответствующих устойчивым состояниям, с ростом магнитного поля значение  $\nu$  убывает, т.е. число частиц в агрегатах увеличивается. Действительно, на указанных ветвях  $dM/dH > 0$ , а функция  $\nu(M)$  монотонно убывает, следовательно, монотонно убывающей является также функция  $\nu(H)$ .

Заметим, что для рассматриваемой жидкости  $Q_\nu^{(\lambda)} = Q_\lambda^{(\nu)}$ , поэтому при  $\Delta > 0$  величины  $Q_\lambda^{(\lambda)}$  и  $Q_\nu^{(\nu)}$  должны иметь одинаковые знаки и неравенство  $\Delta > 0$  несовместимо с условиями  $Q_\lambda^{(\lambda)} > 0$ ,  $Q_\nu^{(\nu)} < 0$  или  $Q_\lambda^{(\lambda)} < 0$ ,  $Q_\nu^{(\nu)} > 0$ , для которых авторы книги [15] построили общую теорию автосолиитонов. Неоднородные стационарные решения  $\lambda(x)$ ,  $\nu(x)$  системы (1), соответствующие пространственным структурам, наблюдаемым в магнитной жидкости экспериментально [3, 4], найдены в работе [13].

Рассмотрим выражение для  $\omega_m^+$ . Справедливо соотношение

$$\omega_o^+ - \omega_m^+ = \frac{\gamma_m^2}{2} \left[ (1 + \eta) \frac{D_\lambda}{\tau_\lambda} + (1 - \eta) \frac{D_\nu}{\tau_\nu} \right],$$

в котором

$$\eta \equiv (a_m + b_m + a_o + b_o) / ((a_m + b_m)^2 + 4(Q_\nu^{(\lambda)})^2 / (\tau_\lambda \tau_\nu))^{1/2} + ((a_o + b_o)^2 + 4(Q_\lambda^{(\nu)})^2 / (\tau_\lambda \tau_\nu))^{1/2},$$

причем  $-1 < \eta < 1$ .

Следовательно  $\omega_m^+ < \omega_o^+$  для всех  $m = 1, 2, \dots$  и наиболее опасными с точки зрения потери устойчивости являются однородные возмущения  $\delta\lambda$ ,  $\delta\nu \sim \exp(\omega_o^+ t)$ . В этом случае условия устойчивости жидкости в зазоре между пластинами не зависят от расстояния  $l$  между ними и совпадают с условиями устойчивости неограниченного объема жидкости в однородном магнитном поле.

Безразмерное значение параметра  $\omega_o^+$  запишем в виде

$$\sqrt{\tau_\lambda \tau_\nu} \omega_o^+ = \frac{1}{2} (\Theta + \sqrt{\Theta^2 - 4\Delta}),$$

где  $\Theta \equiv \sqrt{\tau_\nu / \tau_\lambda} Q_\lambda^{(\lambda)} + \sqrt{\tau_\lambda / \tau_\nu} Q_\nu^{(\nu)}$ .

В том случае, когда однородное состояние жидкости асимптотически устойчиво ( $\omega_o^+ < 0$ ), с помощью параметра  $\omega_o^+$  можно оценить время релаксации жидкости к этому состоянию:

$$\tau \sim -\frac{1}{\omega_o^+}.$$

Если состояние жидкости неустойчиво, но напряженность магнитного поля принадлежит области определения другой ветви  $M(H)$ , содержащей

устойчивые равновесные состояния, например, ветви  $\overline{21}$  или  $\overline{23}$ , то величина

$$\tau \sim \frac{1}{\omega_o^+}$$

дает приближенное значение времени перехода жидкости в устойчивое состояние.

Величина  $\tau$  изменяется в широких пределах и при определенных значениях напряженности магнитного поля может существенно превосходить характерные времена  $\tau_\lambda$  и  $\tau_\nu$ . Так, если на концах ветви функции  $M(H)$ , в точке с вертикальной касательной,  $\Theta < 0$ , то в малой окрестности этой точки  $\sqrt{\tau_\lambda \tau_\nu} \omega_o^+ \approx \Delta / \Theta$  и  $\tau \sim |\omega_o^+|^{-1} \approx \sqrt{\tau_\lambda \tau_\nu} |\Theta / \Delta| \gg \sqrt{\tau_\lambda \tau_\nu}$ .

Значение  $\Theta$  отрицательно в точке  $H_1$  (общей для ветвей  $\overline{23}$  и  $\overline{33}$ ), в точке  $H_2$  ( $\overline{21}$  и  $\overline{31}$ ), в точке  $H_3$  ( $\overline{13}$  и  $\overline{23}$ ) и в точке  $H_4$  ( $\overline{21}$  и  $\overline{22}$ ). Рассмотрим, к примеру, точку  $H_1$ . Учитывая, что в этой точке  $M_\lambda > 0$ , а  $M_\nu < 0$ , из равенства  $-\psi M_\lambda M_\nu = M_s (kT\xi M_\lambda - m_1 M M_\nu)$  получаем  $\xi M_\nu / M_s < -kT\xi^2 / \psi$ ,  $-M M_\lambda / M_s < -m_1 M^2 / \psi$ . Следовательно,  $Q_\lambda^{(\lambda)} < 0$ ,  $Q_\nu^{(\nu)} < 0$  и  $\Theta < 0$ . Аналогичные соотношения имеют место в точках  $H_2$ ,  $H_3$  и  $H_4$ . Вблизи этих точек на ветвях  $\overline{13}$ ,  $\overline{33}$ ,  $\overline{22}$ ,  $\overline{31}$ ,  $\overline{21}$  и  $\overline{23}$  имеем:  $\tau \gg \sqrt{\tau_\lambda \tau_\nu}$ .

При  $\omega_o^+ > 0$  параметр  $\tau$  характеризует "время жизни" равновесного состояния жидкости и при  $\tau \gg \sqrt{\tau_\lambda \tau_\nu}$  даже неустойчивые состояния могут существовать длительное время и наблюдаться в экспериментах. Что касается четырех других точек с вертикальной касательной, то в них, а также всюду на ветвях  $\overline{11}$ ,  $\overline{12}$  и  $\overline{32}$  значение  $\Theta$  положительно, а величина  $\tau$  конечна.

Зависимость безразмерного параметра  $S = \tau / \sqrt{\tau_\lambda \tau_\nu}$  от  $H$  на ветвях  $\overline{21}$  и  $\overline{23}$  кривой намагничивания показана на рис. 3. В представленном на рисунке случае условие (8) выполнено; кроме того,  $H_3 > H_2$  и на отрезке  $(H_2, H_3)$  существует два устойчивых однородных равновесных состояния жидкости. При этом, если  $H_2 < H < H'$  ( $H'$  – абсцисса точки пересечения кривых на рис. 3), то состояние, соответствующее точкам ветви  $\overline{21}$ , является метастабильным, а при  $H' < H < H_3$  метастабильные состояния отвечают точкам ветви  $\overline{23}$ .

В рамках рассматриваемой модели можно выделить три типа магнитных жидкостей. К одному типу отнесем жидкости, удовлетворяющие условию (10); однородные состояния таких жидкостей неустойчивы в любом магнитном поле. Для жидкостей другого типа существует один или два интервала значений напряженности магнитного поля, каждому из которых соответствует одно асимптотически устойчивое однородное состояние. Эти

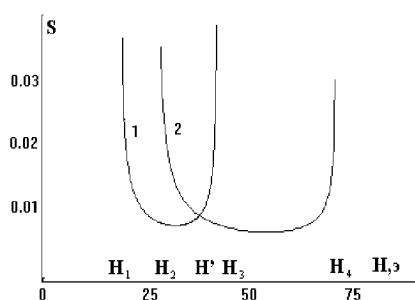


Рис. 3. Зависимость безразмерного времени релаксации жидкости от напряженности магнитного поля (1 - ветвь  $\overline{23}$ , 2 - ветвь  $\overline{21}$ ). Значения параметров жидкости такие же, как для рис. 1 и 2

жидкости удовлетворяют условию (9) или условию (8) и неравенству  $H_2 > H_3$ . Для жидкостей третьего типа существует интервал значений напряженности магнитного поля ( $H_2, H_3$ ), каждому из которых отвечает два асимптотически устойчивых однородных состояния. Этому типу принадлежит жидкость, кривая намагничивания которой показана на рис. 2. На начальном участке кривой намагничивания (при  $H < H_1$ ) и в достаточно сильном магнитном поле (при  $H > H_4$ ) однородные состояния такой жидкости неустойчивы. Асимптотически устойчивые однородные состояния существуют при  $H_1 < H < H_4$ . При уменьшении напряженности магнитного поля в точке  $H = H_2$  или ее увеличении в точке  $H = H_3$  происходит скачкообразное изменение параметров  $\lambda$ ,  $\nu$  и намагниченности  $M$  с переходом на ветвь  $\overline{23}$  или  $\overline{21}$  соответственно. Кроме того, из состояний на ветви  $\overline{21}$  возможны резкие переходы на ветвь  $\overline{23}$  (и наоборот) во всем диапазоне  $H_2 < H < H_3$  при конечных возмущениях параметров  $\lambda$  и  $\nu$ . Таким образом, для жидкостей третьего типа характерны гистерезисные явления.

Результаты работы вполне согласуются с экспериментальными данными, полученными для образцов магнитной жидкости, агрегирующей в однородном магнитном поле [16,17]. Однако при сопоставлении теории с экспериментом следует принимать во внимание, что по сравнению с указанными работами, с точки зрения рассматриваемой нами модели к устойчивым относится более широкий класс сред, в частности среды, содержащие агрегаты, но сохраняющие однородность в течение длительного (теоретически - бесконечно большого) промежутка времени, а признаком проявления неустойчивости считается неоднородность и полное расслоение среды (образование в

ней осадка). С учетом этого замечания нетрудно установить сходство между тремя типами жидкостей, определенными авторами работ [16,17], и перечисленными выше. Жидкости первого типа неустойчивы в любом магнитном поле, а также в его отсутствии. По поводу жидкостей второго типа заметим, что при определенных  $M_s$ ,  $\xi_*$ ,  $\beta$  и  $\langle \lambda \rangle$  область определения ветви кривой намагничивания, содержащей устойчивые однородные состояния, может перекрывать диапазон экспериментальных значений  $H$ , а при  $\nu_{3*} \sim 1$  и малых  $\langle \nu \rangle$  среда практически не содержит агрегатов и воспринимается в экспериментах как агрегативно устойчивая. Для жидкостей третьего типа перечислим основные результаты, общие для теории и эксперимента: пороговый характер возникновения агрегации (при  $H = H_1$  - в теории, при  $H = H_p$  - в экспериментах [16]), усиление агрегации (увеличение числа частиц в агрегатах) с ростом магнитного поля и гистерезис намагничивания. Кроме того, точка перехода с одной ветви на другую при изменении напряженности магнитного поля может восприниматься в экспериментах как угловая точка на кривой намагничивания.

Отклонение теоретической кривой намагничивания от экспериментальной может быть связано, с одной стороны, несовершенством модели, ограниченной предположением о постоянстве массовой концентрации магнитных частиц и условием парамагнитности, существенно уменьшающим область рассматриваемых значений параметров жидкости, а с другой, - непродолжительностью экспериментов, не позволяющих практически проверить существование устойчивых однородных состояний, расположенных вблизи концов ветвей  $\overline{21}$  и  $\overline{23}$ , т.е. именно там, где расхождение теории с экспериментом наиболее значительно.

### 3. ВОЛНЫ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

При определенных условиях магнитные жидкости с изменяющейся микроструктурой представляют собой триггерные (бистабильные) среды, способные к самоорганизации, т.е. к спонтанному образованию и развитию волновых и стационарных пространственных структур.

Рассмотрим наиболее характерный для триггерных сред тип волновых структур - волны переключения (триггерные волны), при распространении которых элементы среды переходят из метастабильного состояния в абсолютно устойчивое.

Пусть  $\tau_\nu \gg \tau_\lambda$  и  $D_\nu \gg D_\lambda$ . Тогда в области диаметром  $\sim (D_\lambda D_\nu)^{1/4}$  с точностью до  $\varepsilon =$

$\max((D_\lambda D_\nu)^{1/2}, \tau_\lambda/\tau_\nu)$  можно считать  $\lambda = \lambda_e = \text{const}$  [15], а изменение магнитного состояния жидкости описывать системой уравнений

$$\tau_\nu \frac{\partial \nu}{\partial t} = D_\nu \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + Q^{(\nu)}(\lambda_e, \nu; H), \quad Q^{(\lambda)}(\lambda_e, \nu; H) = 0. \quad (11)$$

Для магнитной жидкости, параметры которой удовлетворяют неравенству (8), функция  $Q^{(\nu)}(\lambda_e, \nu; H)$  при заданной объемной плотности частиц, температуре и напряженности магнитного поля  $H$  ( $H_2 < H < H_3$ ) имеет три корня  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ , соответствующих однородным равновесным состояниям жидкости (рис. 4). Два из них -  $\nu_1$  и  $\nu_3$  - устойчивы, а  $\nu_2$  - неустойчиво.

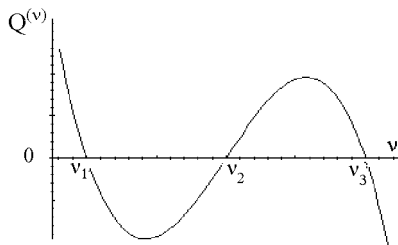


Рис. 4. Зависимость  $Q^{(\nu)}$  от  $\nu$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{\nu_1}^{\nu_3} Q^{(\nu)}(\lambda_e, \nu; H) d\nu.$$

Предположим, что  $I > 0$ , а  $\nu(x, 0)$  – неубывающая функция  $x$ , причем  $\nu(x, 0) = \nu_1$  при  $x < x_1 \leq x_2$ ,  $\nu(x, 0) = \nu_3$  при  $x > x_2$ . Тогда решение уравнений (11) при  $t \rightarrow \infty$  сходится равномерно по  $x$  к бегущей волне  $\nu = \nu(x + vt)$ , которая распространяется справа налево с постоянной скоростью, не зависящей от начальных условий [18]. Форма этой волны описывается уравнением

$$D_\nu \frac{d^2 \nu}{dx^2} - \tau_\nu v \frac{d\nu}{dx} + Q^{(\nu)}(\lambda_e, \nu; H) = 0.$$

В случае  $I > 0$  состояние  $\nu_1$  является метастабильным, и вдали за фронтом волны жидкость находится в состоянии  $\nu_3$ .

Если  $I < 0$ , то метастабильным является состояние  $\nu_3$ . Уравнения (11) и в этом случае имеют решение в виде волны, распространяющейся справа налево с постоянной скоростью, но для других начальных условий:  $\nu(x, 0) = \nu_3$  при  $x < x_1 \leq x_2$ ,  $\nu(x, 0) = \nu_1$  при  $x > x_2$ . Вдали за фронтом такой волны устанавливается равновесное состояние  $\nu_1$ .

В общем случае нет аналитических методов, позволяющих определить скорость волны переключения  $v$ . Однако, если аппроксимировать зависимость  $Q^{(\nu)}$  от  $\nu$  кубическим полиномом:

$$Q^{(\nu)}(\lambda_e, \nu; H) \sim Q(\nu) = -A(\nu - \nu_1)(\nu - \nu_2)(\nu - \nu_3),$$

положив, например,  $\sum_{i=1}^3 [Q^{(\nu)}(\lambda_e, \nu_i; H) - Q(\nu_i)] = 0$ , то можно найти приближенное значение  $v$  [12]:

$$v \approx \sqrt{\frac{AD_\nu}{2\tau_\nu}}(\nu_1 + \nu_3 - 2\nu_2).$$

Величина  $v$  монотонно зависит от напряженности магнитного поля. Она резко возрастает при  $H = H'$  и  $H = H''$ , принимая значения

$$v|_{H=H'} \approx \sqrt{\frac{D_\nu Q_\nu^{(\nu)}(\nu_3)}{2\tau_\nu}},$$

$$v|_{H=H''} \approx -\sqrt{\frac{D_\nu Q_\nu^{(\nu)}(\nu_1)}{2\tau_\nu}},$$

а при  $H \sim (H' + H'')/2$  в жидкости существует стоячая волна ( $v = 0$ ).

Вопрос о существовании в магнитной жидкости волн переключения тесно связан с вопросом об эволюции в ней неоднородных начальных распределений  $\nu_o(x)$ .

Однородные состояния  $\nu_1$  и  $\nu_3$  асимптотически устойчивы. Следовательно, малые неоднородные возмущения этих состояний затухают с течением времени и в жидкости устанавливается однородное равновесное состояние.

Эволюцию во времени сильно неоднородных распределений  $\nu_o(x)$  удобно исследовать, представив первое уравнение (11) в виде [12]

$$\tau_\nu \frac{\partial \nu}{\partial t} = -\frac{\delta F[\nu]}{\delta \nu(x, t)}, \quad (12)$$

где справа выписана вариационная производная от функционала

$$F = \int [-U(\nu) + \frac{1}{2}D_\nu(\nabla \nu)^2] dx, \quad (13)$$

а функция  $U(\nu)$  задается выражением

$$U(\nu) = \int_{\nu_1}^{\nu} Q^{(\nu)}(\lambda_e, \nu; H) d\nu.$$

Из уравнения (12) следует, что каково бы ни было начальное распределение  $\nu_o(x)$ , функционал  $F$

не возрастает с течением времени. Действительно, производную от  $F$  по времени можно представить в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int_0^l \frac{\delta F[\nu]}{\delta \nu(x, t)} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial t} dx,$$

откуда, учитывая (12), получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_\nu} \int_0^l \left( \frac{\delta F[\nu]}{\delta \nu(x, t)} \right)^2 dx.$$

При  $\nu = \nu_1$  и  $\nu = \nu_3$  функционал  $F$  принимает минимальные значения. Поэтому, если начальное распределение  $\nu_0(x)$  на всем интервале  $0 \leq x \leq l$  меньше  $\nu_2$  (или больше  $\nu_2$ ), то жидкость релаксирует к устойчивому однородному состоянию, так как приближение  $\nu$  к  $\nu_1$  (или  $\nu_3$ ) уменьшает каждый член подинтегрального выражения в (13), а, следовательно, и величину функционала  $F$ .

Начальное распределение

$$\nu_0(x) = \begin{cases} \nu_1, & 0 \leq x < x_1 \\ g(x), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \nu_3, & x_2 < x \leq l, \end{cases}$$

где  $g(x)$  — монотонная функция ( $\nu_1 \leq g(x) \leq \nu_3$ ), также неустойчиво, так как всегда можно понизить значение функционала  $F$ , сдвинув переходный слой  $x_1 \leq x \leq x_2$  к границе  $x = 0$  или  $x = l$ .

Поскольку произвольное начальное распределение можно разбить на участки двух рассмотренных выше типов, то жидкость всегда релаксирует к устойчивому однородному состоянию. Отсюда, в частности, следует, что две столкнувшиеся волны переключения гасят друг друга.

Для практики определенным интересом представляет вопрос о форме критического зародыша устойчивого состояния  $\nu_3$ , который дает начало двум разбегающимся волнам переключения, переводящим жидкость из метастабильного состояния  $\nu_1$  в абсолютно устойчивое состояние  $\nu_3$ . Форма критического зародыша (рис. 5) с центром в точке  $x = l/2$  является решением дифференциального уравнения

$$D_\nu \frac{d^2 \nu}{dx^2} + Q^{(\nu)}(\lambda_\epsilon, \nu; H) = 0$$

с граничными условиями

$$\frac{d\nu}{dx} = 0 \text{ при } x = l/2, \quad \nu \rightarrow \nu_1 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l.$$

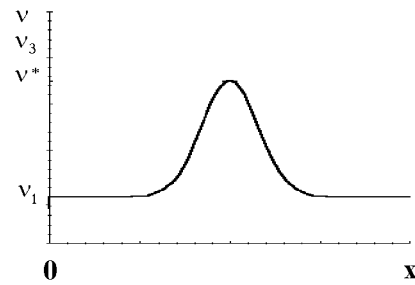


Рис. 5. Форма критического зародыша устойчивого состояния  $\nu_3$

Значение  $\nu = \nu^*$  в центре зародыша определяется уравнением

$$\int_{\nu_1}^{\nu^*} Q^{(\nu)}(\lambda_\epsilon, \nu; H) d\nu = 0$$

и совпадает с величиной  $\nu_s$ , характеризующей величину "всплеска" контрастной структуры в магнитной жидкости [13]. Расчеты показывают, что для состояний жидкости, соответствующих точкам ветвей  $\overline{23}$  ( $\overline{21}$ ), величина  $\Delta\nu = \nu^* - \nu_1$  положительна (отрицательна), при этом абсолютно устойчивым является более (менее) агрегированное состояние жидкости. Заметим, что величина  $\nu^*$  всегда меньше значения  $\nu_3$ , соответствующего абсолютно устойчивому состоянию жидкости.

Если  $I = 0$ , т.е. при выполнении условия

$$\int_{\nu_1}^{\nu_3} Q^{(\nu)}(\lambda_\epsilon, \nu; H) d\nu = 0, \quad (14)$$

в жидкости возможно стационарное сосуществование двух областей однородного состояния среды  $\nu_1$  и  $\nu_3$ , разделенных плоским переходным слоем. Если характерный размер  $l$  сравним с шириной переходного слоя, такое неоднородное состояние неустойчиво. При этом переходный слой выталкивается к границе области  $x = 0$  или  $x = l$  и в жидкости устанавливается однородное равновесное состояние. Когда ширина переходного слоя пренебрежимо мала по сравнению с величиной  $l$ , объем жидкости можно считать бесконечным. В этом случае он разбивается на произвольное число областей (страт), отвечающим двум состояниям  $\nu_1$  и  $\nu_3$ . При выполнении условия (14) такое неоднородное состояние жидкости является нейтрально устойчивым.



## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование однородных стационарных состояний магнитной жидкости с изменяющейся микроструктурой показало, что существует три типа жидкостей. Жидкости первого типа неустойчивы в любом магнитном поле. Для жидкостей второго типа существует интервал значений напряженности магнитного поля  $H$ , каждому из которых соответствует одно асимптотически устойчивое однородное равновесное состояние. Жидкости третьего типа в некотором интервале значений  $H$  имеют два асимптотически устойчивых однородных равновесных состояния и являются триггерными средами, способными к самоорганизации. В указанном интервале при определенных условиях в жидкостях возникают волновые структуры типа волн переключения, распространение которых приводит к переходу элементов среды из метастабильного состояния в абсолютно устойчивое. При значениях  $H$ , для которых уравнения, описывающие эволюцию магнитного состояния жидкости, не имеют устойчивых однородных стационарных решений, но при этом существует устойчивое неоднородное решение  $\lambda(x)$ ,  $\nu(x)$ , возможно неоднородное распределение намагниченности  $M(x)$  типа пространственных структур, наблюдаемых экспериментально. В том случае, когда стационарных решений нет или они есть, но неустойчивы, развитие возмущений может приводить к нарушению условия парамагнитности и переходу жидкости в ферромагнитное состояние или к значениям параметра  $\nu$ , соответствующим полному расслоению жидкости ( $\nu = 0$ ) и распаду всех агрегатов ( $\nu = 1$ ), за пределами которых жидкость нельзя считать однофазной сплошной средой.

Авторы благодарят Государственный фонд фундаментальных исследований Украины за финансовую поддержку работы.

1. Chantrell R.W., Bradbury A., Popplewell J., Charles S.W. Particle cluster configuration in magnetic fluids // J. Phys. D: Appl. Phys.– 1980.– Vol. 13.– P. 119-122.
2. Chantrell R.W., Bradbury A., Popplewell J., Charles S.W. Agglomerate formation in a magnetic fluid // J. Phys. D: Appl. Phys.– 1982.– Vol. 15.– P. 2742-2744.
3. Горобец Ю.И., Ильчишин О.В., Макляк И.М. Особенности процесса структурообразования в пленках ферромагнитной жидкости // Магнитная гидродинамика.– 1988.– N 4.– С. 44-48.
4. Hayes C.F. Observation of association in a ferromagnetic colloid // J. Colloid Interf. sci.– 1975.– Vol. 52.– P. N 2.239-243
5. Lukashovich M.V., Naletova V.A. Redistribution of ferromagnetic particle concentration in magnetic fluid // J. Magn. and Magn. Mater.– 1990.– V. 85, N 1-3.– P. 216-218.
6. Лушников М.А. Перераспределение агрегатов в магнитной жидкости под действием термомагнитной силы // Известия РАН. МЖГ.– 1999.– N 1.– С. 120-125.
7. Волкова О., Лемар Е., Боссис Ж., Баштовой В., Магусевич Н., Рекс А. Магнитоареология в сильно структурированной среде // Магнитная гидродинамика.– 1996.– N 4.– С. 402-408.
8. Provata A., Trohidou K.N. Spatial distribution and fractal properties of aggregating magnetic and non-magnetic particles // Fractals.– 1998.– Vol. 6, N 3.– P. 219-230.
9. Цеберс А. Трансформация концентрационных доменных структур жидких магнетиков в плоских слоях. 1. Энергетический подход // Магнитная гидродинамика.– 1995.– N 1-2.– С. 61-68.
10. Bossis G., Cebers A. On the deformation of an aggregate of magnetorheological suspension in magnetic fluid // Магнитная гидродинамика.– 1997.– т. 33, N 1.– С. 75-80.
11. Пацегон Н.Ф. Некоторые процессы самоорганизации в намагничивающихся средах // Магнитная гидродинамика.– 1993.– N 1.– С. 13-23.
12. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику.– М.: Наука, 1990.– 275 с.
13. Patsegon N., Popova L.N. Space structures in magnetic Fluid // Eighth Intern. Conf. on Magnetic Fluids, June 29 - July 3, 1998. Timisoara, Romania. Abstracts. - p. 273-274.
14. Пацегон Н.Ф., Попова Л.Н. О равновесной намагниченности магнитной жидкости // Магнитная гидродинамика.– 1996.– т. 32, N 3.– С. 323-330.
15. Кернер Б.С., Осипов В.В. Автосолитоны.– М.: Наука, 1991.– 198 с.
16. Чеканов В.В., Дроздова В.И., Нуцубидзе П.В., Скроботова Т.В., Черемушкина А.В. Изменение намагниченности магнитной жидкости при образовании агрегатов // Магнитная гидродинамика.– 1984.– N 1.– С. 3-9.
17. Полунин В.М., Рослякова Л.Н. О зависимости скорости звука в магнитной жидкости от напряженности магнитного поля и частоты колебаний // Магнитная гидродинамика.– 1985.– N 4.– С. 59-65.
18. Канель Я.И. О стабилизации решений задачи Коши для уравнений, встречающихся в теории горения // Мат. сборник.– 1962.– т. 59(101).– С. 245-288.