

УДК 533.6.011.5÷541.123

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА ПОДАТЛИВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Г. А. ВОРОПАЕВ, Н. В. РОЗУМНЮК

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 25.03.2000

Получена замкнутая система уравнений, описывающих гидродинамическое взаимодействие турбулентного пограничного слоя с деформирующейся вязкоупругой поверхностью, моделирующей кожные покровы китообразных. Разработаны обобщения гипотез замыкания для механизмов перераспределения и турбулентной диффузии (третьи моменты) в уравнениях переноса для вторых моментов. Предложенные аппроксимации граничных условий отражают энергетический обмен через деформированную поверхность между турбулентным пограничным слоем и вязкоупругим слоем. Определен диапазон изменения механических и геометрических параметров вязкоупругих покрытий как функции скорости потока, в котором возможно снижение сопротивления трения. Получены численные результаты, позволяющие объяснить эффект снижения сопротивления трения у гидробионтов.

Одержано замкнуту систему рівнянь, які описують гідродинамічну взаємодію турбулентного пограничного шару з в'язкопружною поверхнею, що деформується, яка моделює шкіру китоподібних. Розроблено узагальнення гіпотез замыкання для механізмів перерозподілу турбулентної дифузії (треті моменти) в рівняннях переносу для других моментів. Запропоновані апроксимації граничних умов відображають енергетичний обмін через деформовану поверхню між турбулентним пограничним шаром та в'язкопружним шаром. Визначено діапазон зміни механічних та геометричних параметрів в'язкопружних покриттів як функцію швидкості потоку, в якому можливо знижувати опір тертя. Одержано чисельні результати, які дозволяють пояснити ефект зниження опору тертя у гідробіонтів.

The system of equations has been obtained that governs hydrodynamical interaction of TBL and a deformable viscoelastic surface simulating cetacean skin. The closure hypothesis have been generalized for the redistribution and turbulent diffusion in the transport equations for the second correlation moments. The boundary condition approximations reflect energy transfer between TBL and viscoelastic layer through the deformed surface. The range of mechanical and geometrical parameters of viscoelastic coatings has been determined as a function of flow speed where friction drag could be reduced. The numerical results obtained allow to explain friction drag reduction that aquatic life can attain.

ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени, после опубликованной Крамером работы [27], выполнено достаточно большое количество экспериментальных и теоретических работ по изучению обратного воздействия деформирующейся под действием пульсаций потока поверхности на структуру ламинарного и турбулентного пограничных слоев. Первые экспериментальные работы [1, 27] изучали, как правило, изменение интегральных характеристик тел, имеющих полимерные покрытия, по сравнению с жесткими телами аналогичной формы, а феноменологическое объяснение эффекта снижения сопротивления трения было основано на предположении затягивании перехода от ламинарного пограничного слоя к турбулентному.

Проблеме устойчивости ламинарного пограничного слоя на деформируемой поверхности посвящены и первые теоретические работы Benjamin [13], Landahl [28], Nonweiler [34], Короткина [9]. Однако результаты этих работ скорее поставили новые вопросы, чем ответили на вопрос о возможном механизме взаимодействия деформирующейся поверхности с возмущениями потока. В этих работах было показано, что затягивание перехода

на деформирующейся поверхности возможно, но параметры покрытий полностью не соответствовали идеологии Крамеровского покрытия.

Вместе с тем экспериментальные работы Козлова, Бабенко [7] по исследованию перехода ламинарного пограничного на вязкоупругих покрытиях, аналогичных крамеровским, подтвердили смещение точки начала перехода в сторону больших чисел Рейнольдса, и самое главное, показали уменьшение скорости нарастания амплитуды возмущений по сравнению с ламинарным пограничным слоем на жесткой гладкой поверхности. Однако даже качественное подтверждение незначительного затягивания перехода не могло объяснить количественное уменьшение сопротивления трения при больших числах Рейнольдса.

В последующих экспериментальных работах Блика [14], Лиссамена [32], Хенсена и Ханстона [23], Бабенко [2], Семенова [11], наряду с определением сопротивления трения, исследуется внутренняя структура турбулентного пограничного слоя. В различных сечениях пограничного слоя на податливой поверхности измерены профили продольной скорости U и напряжения Рейнольдса $-\overline{uv}$, $\overline{u^2}$. В исследованиях Лиссамена, Бабенко, Семенова получено уменьшение коэффициента сопротивления трения, которое коррелиру-

ет с уменьшением интенсивности турбулентных пульсаций и увеличением толщины вязкого подслоя. Профили средней скорости в логарифмической шкале при обтекании различных поверхностей в логарифмической области имеют равный наклон, что говорит о неизменности постоянной Кармана k для различных пограничных слоев. Заметного изменения анизотропии турбулентности в пристенной области пограничного слоя не обнаружено. Некоторое аномальное поведение u_* , $-\overline{uv}$, $\overline{u^2}$, полученное в работе Блика, было подкорректировано в работе Лиссамена. Однако в этих работах нет информации о поведении деформирующейся поверхности в процессе взаимодействия ее с потоком, следовательно, выводы этих работ не могли содержать рекомендации для априорного выбора материала покрытия, кроме тех параметров, которые предложил Крамер.

И только в работах Бушнела, Хефнера, Аша (ВНА) [15], Гад-эль-Хака [21, 22], Ли, Фишера, Шварца (LFS) [31], наряду с исследованием характеристик турбулентного потока, зафиксированы пространственные и временные количественные характеристики амплитуд смещения обтекаемой поверхности. Материал для покрытия выбирался на основании теоретических оценок поведения покрытия под действием пульсационных нагрузок, эквивалентных возмущениям турбулентного пограничного слоя, приведенных в работах Данкана [19, 20] и Бакингама, Холла, Чана [16]. В СССР аналогичные оценки были сделаны независимо Воропаевым [3].

Вместе с тем выводы экспериментальных работ ВНА и Гад-эль-Хака существенно отличаются от выводов работы LFS. Гад-эль-Хак, на основании результатов проведенных исследований, поддерживает гипотезу, предложенную Бушнелом. Суть гипотезы механизма взаимодействия заключается в следующем: покрытие способно уменьшать сопротивление трения, если на его поверхности возникают короткие бегущие волны с большой амплитудой, то есть происходит кинематическое взаимодействие возмущений пограничного слоя с деформирующейся поверхностью покрытия. Это возможно только для низкодиссипативных материалов покрытия при модулях сдвига $G < \rho_s U_0^2$ (где ρ – плотность материала покрытия, U_0 – скорость потока), то есть при параметрах покрытия, которые соответствуют проявлению собственных колебаний покрытия.

Однако в работе LFS получено уменьшение сопротивления трения при $G > \rho_s U_0^2$ и при малых амплитудах колебаний поверхности покрытия, существенно меньших толщины вязкого подслоя,

что говорит о поглощающем механизме взаимодействия.

Теоретические работы последних 10-15 лет (Карпентер [17, 18], Кирейко [6], Йео [39, 40], Томас [37]) продолжают исследовать устойчивость пограничного слоя и начальную стадию развития возмущений в ламинарном пограничном слое при вариации граничных условий как в линейной, так и квазинелинейной постановке.

В работе [8] предложена теоретическая оценка возможного диссипативного механизма взаимодействия турбулентного пограничного слоя с поглощающей поверхностью покрытия при $G > \rho_s U_0^2$ на основании потоковых граничных условий на границе раздела двух сред и $k - \epsilon$ модели турбулентного пограничного слоя.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Изучение характеристик турбулентных потоков, которые достаточно условно можно разделить на осредненные и пульсационные, связано не только с прямыми физическими измерениями этих величин, но и моделированием этих течений на основании разработки и решения замкнутых систем уравнений при соответствующих граничных условиях.

Определение зависимости турбулентных характеристик от безразмерных параметров потока (чисел Re , Fr , Pr , Gr), а также вида и качества обтекаемой поверхности позволяет не только систематизировать имеющиеся экспериментальные данные, но и формулировать закономерности изменения этих характеристик или их совокупности, что в свою очередь дает возможность планировать новый эксперимент.

Этот процесс часто называют численным экспериментом. Результаты этого эксперимента часто конкурируют с прямым дорогостоящим физическим экспериментом, если модель адекватно описывает турбулентное течение при изменении условий течения.

Постановка задачи взаимодействия турбулентного потока с деформирующейся поверхностью (ДП) вязкоупругой среды включает систему дифференциальных уравнений для параметров, описывающих движение жидкости и колебания вязкоупругой среды под действием возмущений потока относительно деформирующейся возмущенной поверхности, а также граничные условия для перемещений или скоростей и сил на поверхности раздела двух сред.

Для описания движения вязкой, однородной и

несжимаемой жидкости применяются следующие уравнения:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \text{grad}) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} P - \nu \cdot \text{rot} \cdot \text{rot} \vec{U};$$

$$\text{div} \vec{U} = 0,$$

а для вязкоупругой среды:

$$\frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = L(\vec{\xi}),$$

где $L(\vec{\xi})$ - некоторый обобщенный вязкоупругий оператор.

Однако получить решение этой классической системы уравнений при больших числах Re , превышающих некоторые пороговые значения Re , практически невозможно даже при простейших граничных условиях. Этот факт определяет необходимость построения модели турбулентности, т. е. системы уравнений, адекватно описывающей турбулентные течения при фиксированном наборе параметров, характеризующих данное течение.

В настоящее время наиболее информативной моделью турбулентности является модель переноса напряжений Рейнольдса, получившая название модели Лаундера-Рисса-Роди [29], позволяющая получать не только профили средней скорости, но и компоненты напряжений Рейнольдса, а также судить о составляющих энергетического баланса в каждой точке потока. Применение этой модели к задачам пограничного слоя потребовало введения пристенных функций и модификации модельного уравнения для скорости диссипации, что дало возможность реализовать условие прилипания для компонент напряжений Рейнольдса.

В приближении пограничного слоя система уравнений модели принимает вид [5, 38]

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'};$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\overline{u'^2}}{2} \right) + V \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{u'^2}}{2} \right) = \frac{1}{2} P_{11} - \Pi_{11} f_n +$$

$$+ \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\overline{u'^2}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\varepsilon_\tau \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{u'^2}}{2} \right) \right) - \varepsilon_{11};$$

$$U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\overline{v'^2}}{2} \right) + V \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{v'^2}}{2} \right) = \frac{1}{2} P_{22} - \Pi_{22} f_n +$$

$$+ \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\overline{v'^2}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(6\varepsilon_\tau \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{v'^2}}{2} \right) \right) - \varepsilon_{22};$$

$$U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\overline{w'^2}}{2} \right) + V \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{w'^2}}{2} \right) = \frac{1}{2} P_{33} - \Pi_{33} f_n +$$

$$+ \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\overline{w'^2}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\varepsilon_\tau \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{w'^2}}{2} \right) \right) - \varepsilon_{33};$$

$$U \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'v'}) + V \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) = P_{12} - \Pi_{12} f_n +$$

$$+ \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial y} \left(4\varepsilon_\tau \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) \right) - \varepsilon_{12};$$

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\varepsilon}{k} P_\Sigma - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon}{k};$$

$$\left[\varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\varepsilon_\tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2},$$

где P_{ij} компоненты тензора порождения, Π_{ij} - компоненты тензора перераспределения энергии:

$$P_{11} = -2\overline{u'^2} \frac{\partial U}{\partial x} - 2\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} \approx -2\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$P_{22} = -2\overline{u'v'} \frac{\partial V}{\partial x} - 2\overline{v'^2} \frac{\partial V}{\partial y} \approx 0;$$

$$P_{33} = 0;$$

$$P_{12} = -\overline{u'^2} \frac{\partial V}{\partial x} - \overline{v'^2} \frac{\partial U}{\partial y} \approx -\overline{v'^2} \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$P_\Sigma = \frac{1}{2} (P_{11} + P_{22} + P_{33}) = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$D_{11} = -2\overline{u'^2} \frac{\partial U}{\partial x} - 2\overline{u'v'} \frac{\partial V}{\partial x} \approx 0;$$

$$D_{22} = -2\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} - 2\overline{v'^2} \frac{\partial V}{\partial y} \approx -2\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$D_{33} = 0;$$

$$D_{12} = -\overline{u'^2} \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{v'^2} \frac{\partial V}{\partial x} \approx -\overline{u'^2} \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}).$$

$$\Pi_{ii} = C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\frac{\overline{u_i'^2}}{2} - \frac{1}{3} k \right) + C_2 \left(\frac{1}{2} P_{ii} - \frac{1}{3} P_\Sigma \right) +$$

$$+ \pi'_{ii,1} + \pi'_{ii,2} + \pi'_{ii,3};$$

$$\Pi_{12} = C_1 \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'v'} + C_2 P_{12} + \pi'_{12,1} + \pi'_{12,2} + \pi'_{12,3};$$

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon;$$

$$\Pi_{11} + \Pi_{22} + \Pi_{33} = 0;$$

$$\begin{aligned} \pi'_{ij,1} &= -C'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{v'^2} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \left(\overline{v' u'_i} \delta_{j2} + \overline{v' u'_j} \delta_{i2} \right) \right) \times \\ &\quad \times f \left(\frac{\ell}{y} \right); \\ \pi'_{ij,2} &= -C'_2 \left(\frac{P_{ij}}{2} - \frac{1}{3} P_{\Sigma} \delta_{ij} \right) f \left(\frac{\ell}{y} \right); \\ \pi'_{ij,3} &= -C'_3 \left(\frac{1}{2} D_{ij} \frac{1}{3} P_{\Sigma} \delta_{ij} \right) f \left(\frac{\ell}{y} \right), \end{aligned}$$

где $\pi'_{ij,1}, \pi'_{ij,2}, \pi'_{ij,3}$ – дополнительные тензоры перераспределения [29] за счет влияния стенки, удовлетворяющие условию: $\pi'_{ij,j} = 0$ (суммирование по одинаковым индексам).

Нормированная функция влияния стенки записывается в виде

$$f \left(\frac{\ell}{y} \right) = \frac{R_t}{R_k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{A_\tau}{R_t}} \right).$$

Пристенные функции f_n, f_1, f_2 имеют вид:

$$\begin{aligned} f_n &= [1 - \exp(a_\mu R_k)] \sqrt{1 + \frac{A_\tau}{R_t}}; \\ f_1 &= 1 + 0.8 \exp(-R_t); \\ f_2 &= 1 - 0.2 \exp(-R_t^2), \end{aligned}$$

где $R_k = k^{1/2} y / \nu$; $R_t = k^2 / (\nu \varepsilon)$.

Кинематический коэффициент турбулентной диффузии принимается равным: $\varepsilon_\tau = C_t \overline{v'^2} k / \varepsilon$; ($C_t = 0.12$, а в уравнении для скорости диссипации $C_\varepsilon = 0.15$).

Компоненты тензора скорости диссипации записывается в следующем виде [30]:

$$\varepsilon_{ij} = f_s \frac{\overline{u_i u_j}}{2k} \varepsilon + (1 - f_s) \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon,$$

где $f_s = 1 / (1 + 0.06 R_t)$.

Предположив, что турбулентный поток и на деформирующейся поверхности остается статистически однородным (без резонансных поверхностных эффектов собственных частот вязкоупругого слоя), осреднение Рейнольдса для задачи обтекания деформирующейся поверхности дает аналогичную систему уравнений с граничными условиями на деформируемой поверхности для напряжений Рейнольдса и компонент турбулентной диффузии:

$$-\overline{u_i u_j} \Big|_s = f_{ij}; \quad -\overline{u_i p} \Big|_s = Y_i,$$

и обычными условиями невозмущенного потока вдали от обтекаемой поверхности.

Колебания несжимаемой вязкоупругой среды описываются системой линеаризованных уравнений сохранения количества движения:

$$\rho_s \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j} \quad (2)$$

с динамическими граничными условиями, несенными на невозмущенную границу раздела двух сред:

$$\sigma_{22}|_0 = -p'; \quad \sigma_{21}|_0 = \tau,$$

где p, τ – пульсации давления и касательного напряжения на поверхности соответственно.

Для изотропных несжимаемых вязкоупругих сред модуль сдвига определяется функцией релаксации, которая моделируется экспоненциальной функцией

$$\mu(t) = \sum_{j=0}^N \mu_j e^{-t/\tau_j},$$

где μ_j – значения амплитуд, соответствующих временам релаксации τ_j .

Для гармонических законов нагружения можно получить частотную зависимость для модуля сдвига:

$$\mu(\omega) = \mu_r(\omega) + i \mu_i(\omega) =$$

$$= \mu_0 + \sum_{j=1}^N \mu_j \left[\frac{(\omega \tau_j)^2}{1 + (\omega \tau_j)^2} + i \frac{\omega \tau_j}{1 + (\omega \tau_j)^2} \right].$$

Предполагая, что объемный модуль K не зависит от времени ($K = \lambda + 2/3 \mu$), можно также получить выражение для $\lambda(\omega)$. Таким образом, мы можем использовать стандартное выражение для напряжений σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \tilde{\lambda}(\omega) \theta \delta_{ij} + 2 \tilde{\mu}(\omega) \varepsilon_{ij},$$

где

$$\theta = \varepsilon_{ii}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right).$$

Анализ собственных частот вязкоупругого покрытия [8] позволил выделить область фазовых скоростей перемещения нагрузки, при которых не проявляются собственные частоты и отклик покрытия на возмущения пограничного слоя равен мерен на всем диапазоне частот. Исходя из этих условий, сформулирован принцип безрезонансного взаимодействия пограничного слоя и вязкоупругого покрытия. Определив амплитуды смещения поверхности и скорость диссипации внутри покрытия для единичной нагрузки, можно

сформулировать граничные условия для характеристик пристенной турбулентности при произвольном числе Рейнольдса.

При отсутствии резонансов ($U_0 < \sqrt{\mu_0/\rho}$) осреднение по всем волновым числам в единицу времени не вызывает проблем, и можно получить линейризованные значения напряжений Рейнольдса, снесенные на невозмущенную поверхность:

$$\begin{aligned}\overline{u_1 u_2} &= -\frac{1}{2} \omega_e^2 |\xi_2| |\xi_1| \cos(\varphi_2 - \varphi_1); \\ \overline{u_1^2} &= \frac{1}{2} \omega_e^2 \left(|\xi_1|^2 + 2 \frac{U'}{\omega_e} |\xi_1| |\xi_2| \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \omega_e^2 \frac{U'^2}{\omega_e^2} |\xi_2|^2; \\ \overline{u_2^2} &= \frac{1}{2} \omega_e^2 |\xi_2|^2; \\ \overline{u_3^2} &= \frac{1}{2} \omega_e^2 |\xi_1|^2 \tan^2 \theta,\end{aligned}$$

где $\omega_e = U_0/\delta$; $U' = u_*^2/\nu$; $\theta = \arctan u_{3max}/u_{1max}$, а амплитуда смещений поверхности определяется через вычисленные значения функции $|\xi_i|$ (нормированные амплитуды для единичной нагрузки) и по интенсивности пульсаций давления на поверхности покрытия:

$$\xi_i = H \beta_i(\omega) \frac{p'}{|\mu|} = H \beta_i(\omega) \frac{\rho K_p U_0^2}{|\mu|} \tilde{u}_*^2,$$

где H - толщина покрытия, u_* - динамическая скорость.

Тогда

$$\begin{aligned}\overline{u_1 u_2} &= 0; \\ \overline{u_1^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\delta} \right)^2 (C_{k1} + \tilde{u}_* Re_* C_{k2})^2 \tilde{u}_*^4; \\ \overline{u_2^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\delta} \right)^2 C_{k2}^2 \tilde{u}_*^4; \\ \overline{u_3^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\delta} \right)^2 C_{k1}^2 \tilde{u}_*^4 \tan^2 \theta,\end{aligned} \quad (3)$$

где $C_{k1} = K_p \beta_i(\omega) \rho U_\infty^2 / |\mu|$, $Re_* = u_* \delta / \nu$, K_p - параметр Крейчнана, δ - местная толщина пограничного слоя.

Таким образом, рейнольдсовы напряжения на поверхности определяются энергонесущей частотой $\omega_e = U_0/\delta$ и динамической частотой потока $\omega_b = u_*^2/\nu$, а также амплитудами ξ_1 и ξ_2 и не зависят от сдвига фаз между продольными и поперечными смещениями поверхности, так как для изотропных материалов вязкоупругого слоя $\varphi_2 - \varphi_1 \approx \pi/2$. Поэтому регулярно колеблющаяся поверхность либо не генерирует касательные

напряжения Рейнольдса на поверхности, то есть $-\overline{u_1 u_2} = 0$, либо генерированные касательные напряжения становятся отрицательными при затухающих колебаниях во времени.

Таким образом, предположив регулярность колебания поверхности вязкоупругого слоя, мы уменьшаем возможный положительный эффект снижения сопротивления трения. Нулевое значение касательных напряжений позволяет предположить неизменность коэффициента турбулентной вязкости в пристенном слое на деформирующейся поверхности по сравнению с жесткой гладкой.

Совершая колебание, вязкоупругое покрытие поглощает пульсационную энергию потока. Скорость диссипации энергии колебательного движения слоя равна диффузионному потоку пульсационной энергии через границу, который равен вектору Умова-Пойтинга $p' u_2$ на границе раздела сред. На поверхности поглощающего слоя $p' u_2 \neq 0$, в то время как на идеально упругой или жесткой поверхности $p' u_2 = 0$, что принципиально отличает поглощающую поверхность от непоглощающей. Следовательно, в турбулентном пограничном слое на поглощающей поверхности коэффициент турбулентной диффузии отличен от нуля:

$$\begin{aligned}\overline{p' u_2} &= -\frac{\overline{p' u_2}}{\rho U_\infty^3} = \frac{1}{4} \frac{H}{\delta} \frac{\beta_2(\omega) \rho U_\infty^2}{|\mu(\omega)|} K_p^2 \gamma(\omega) \tilde{u}_*^4 = \\ &= \frac{1}{4} \frac{H}{\delta} C_{k3} \tilde{u}_*^4;\end{aligned}$$

$$\tilde{\varepsilon}_q = -\frac{\overline{p' u_2}}{\frac{\partial k}{\partial n}} = \frac{1}{4} C_{k3} \frac{\tilde{u}_*^3 \Delta_{max}}{k_{max} - k_q},$$

где $C_{k3} = K_p C_{k2} \gamma(\omega)$, $\Delta_{max} = y_{max}^+ / Re_*$, $y^+ y u_* / \nu$, k_q - кинетическая энергия колеблющейся поверхности. Следовательно, скорость диссипации на границе принимает следующее значение:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \tilde{n}} \left[\left(\frac{1}{Re} + \tilde{\varepsilon}_q \right) \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{n}} \right].$$

Таким образом, граничные условия можно характеризовать тремя параметрами: C_{k1} и C_{k2} отвечают за дополнительное порождение турбулентной энергии за счет ненулевых напряжений Рейнольдса на границе; C_{k3} - за дополнительный сток пульсационной энергии из турбулентного пограничного слоя в покрытие. В расчетах удобнее применять обобщенный коэффициент $C_{di} = C_{ki} H / \delta \tilde{u}_*$, связывающий динамическую скорость потока с генерируемыми напряжениями.

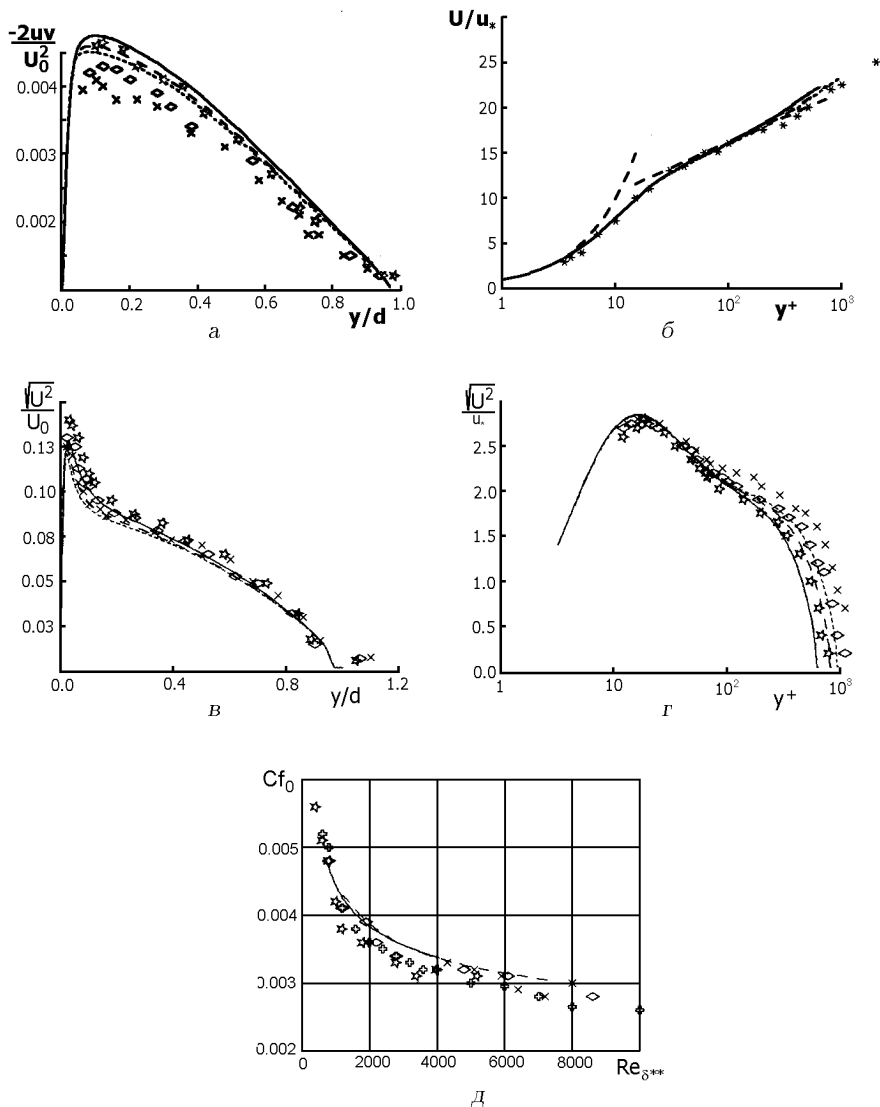


Рис. 1. Локальные и интегральные характеристики турбулентного пограничного слоя на жесткой гладкой поверхности

2. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Граничная задача (1)–(5) решалась численно конечно-разностным методом на шеститочечном шаблоне неравномерной сетки с использованием промежуточных точек [10].

Результаты тестовых расчетов локальных и интегральных характеристик турбулентного пограничного слоя на жесткой гладкой поверхности показаны на (рис. 1) в сравнении с результатами LFS при соответствующих числах Рейнольдса, вычисленных по толщине потери импульса (* - $Re_{**} = 1349$, \diamond - $Re_{**} = 1952$, \times - $Re_{**} = 2347$). На рис. 1, д приведены значения интегрального коэф-

фициента сопротивления, вычисленного по длине пластины в сравнении с различными экспериментальными данными, приведенными в работе [31]. Результаты получены при значениях констант модели, которые при численном эксперименте не меняются.

Результаты численного эксперимента при расчете обтекания деформирующейся пластины при фиксированном числе Re приведены на рис. 2-9. Варьировался параметр Cd_2 , характеризующий дополнительную генерацию турбулентных напряжений за счет нормальной и продольной амплитуд колебания поверхности, и Cd_3 - характеризующий интенсивность поглощения пульсационной энергии. Параметры изменяются в пределах

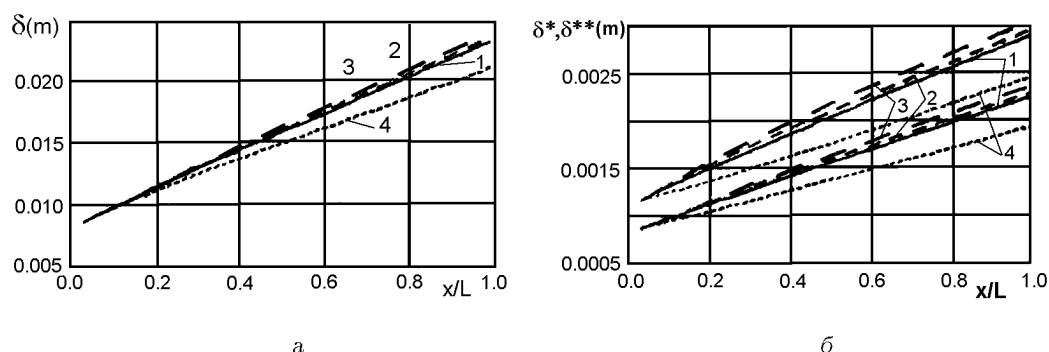


Рис. 2. Размерные значения толщины пограничного слоя, толщины вытеснения и потери импульса на жесткой гладкой поверхности (кривые 1), упругой поверхности (кривые 2,3), поглощающей поверхности при $Cd_3=5/Re_\delta$ (кривые 4): а - толщина пограничного слоя, б - толщины вытеснения и потери импульса

$$Cd_2 \sim 0 \div 3 \cdot 10^{-3} \text{ и } Cd_3 \sim 0 \div 0.1.$$

На рис. 2 приведены результаты расчета толщины пограничного слоя, толщины вытеснения и потери импульса вдоль пластины. На колеблющейся поверхности с увеличением интенсивности колебания поверхности рост толщины пограничного слоя происходит более быстро, а на поглощающей более медленно, чем на жесткой гладкой поверхности. На колеблющейся поверхности получено увеличение сопротивления трения пластины по сравнению с жесткой гладкой поверхностью на $\delta^{**}/\delta_0^{**} - 1 = 0.05 (\approx 5\%)$, а на поглощающей получено уменьшение на 11%, что качественно совпадает с результатами [31].

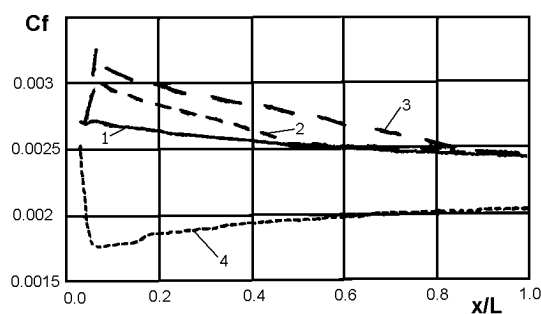


Рис. 3. Коэффициент сопротивления трения

На рис. 3 приведены кривые изменения коэффициента сопротивления вдоль пластины. Коэффициент сопротивления трения повышается при дополнительной генерации турбулентности и уменьшается при отборе турбулентной энергии. Однако при незначительной дополнительной генерации турбулентной энергии ($Cd_2 = 1 \cdot 10^{-3}$) влияние колеблющейся поверхности прослеживается только

на начальном участке пластины, где толщина пограничного слоя мала и вязкий подслой тонкий, с увеличением толщины пограничного слоя (вязкого подслоя) динамическая шероховатость не проявляется в интегральном результате. Дальнейшее развитие пограничного слоя происходит подобно пограничному слою на жесткой гладкой поверхности с несколько завышенной толщиной пограничного слоя, о чем свидетельствуют совпадающие профили скорости (рис. 4), профили кинетической энергии турбулентности (рис. 5) и скорости диссипации (рис. 6) для сечения $x/L = 0.94$.

На рис. 4 кривая 1 соответствует профилю скорости на жесткой гладкой поверхности, 2 - $Cd_2 = 3 \cdot 10^{-3}$, 3 - $Cd_3 = 5/Re_\delta$. Профиль скорости при $Cd_2 = 1 \cdot 10^{-3}$ совпадает с профилем скорости на жесткой гладкой поверхности. Таким образом, если по толщине пограничного слоя существует накопительный эффект, то есть местное увеличение трения в начале пластины приводит к суммарному увеличению сопротивления всей пластины, то по измерениям профиля скорости в динамических переменных на колеблющейся пластине в сечениях, близких к ее концу, эффект может быть не обнаружен. Поэтому по профилю скорости в динамических переменных можно судить только о локальных эффектах, практически не учитывая предысторию. Кривая 4 отражает уменьшение локального сопротивления трения, что сопровождается относительным увеличением вязкого подслоя. Профиль скорости в ядре пограничного слоя $70 < y^+ < 1000$ проходит практически параллельно логарифмическому профилю, что говорит о неизменности константы κ в пограничном слое на демпфирующей поверхности.

Получено некоторое увеличение энергии на колеблющейся поверхности (рис. 5) при $Cd_2 = 3 \cdot 10^{-3}$

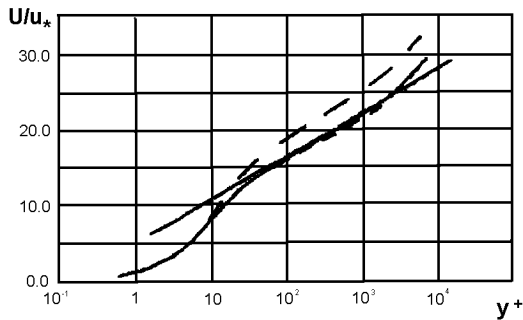


Рис. 4. Профили скорости

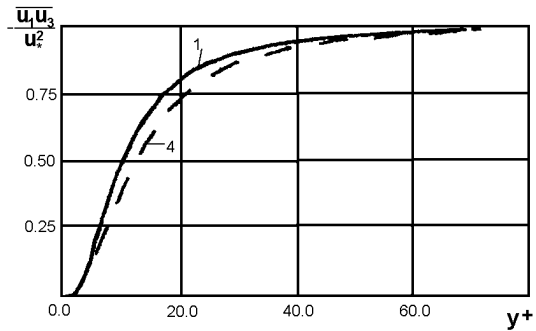


Рис. 6. Напряжения сдвига

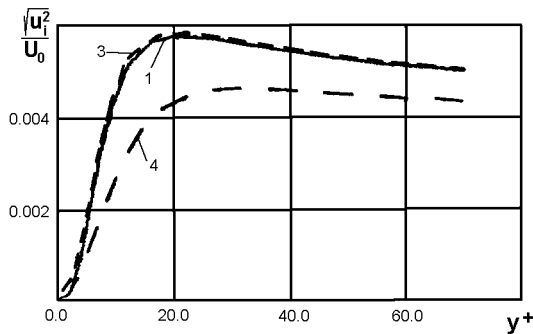


Рис. 5. Компоненты энергии турбулентности

в вязком подслое по сравнению с жесткой поверхностью. Максимумы турбулентной энергии в пограничных слоях практически совпадают и по величине и по расположению относительно поверхности. Турбулентная энергия в пограничном слое на поглощающей поверхности при $Cd_3 = 5/Re_\delta$ значительно меньше практически по всей толщине пограничного слоя. Максимум турбулентной энергии на ДП почти на 20% меньше значения максимума энергии на жесткой гладкой поверхности и смещен от поверхности $\sim y^+ \approx 32$, в то время как максимальное значение k на обычной пластине находится в районе $y^+ \approx 20$.

Совпадение профилей скорости в конечных сечениях пластины соответствует совпадению касательных напряжений $-\overline{u_1 u_3} / u_*^2$ на жесткой гладкой и колеблющихся поверхностях (рис. 6). На поглощающей поверхности касательные напряжения в пристенной области при $y^+ < 80$ меньше, чем соответствующие значения на жесткой гладкой поверхности, и выходят на максимальное значение более плавно. Вдали от стенки касательные напряжения в динамических переменных практически не зависят от вида обтекаемой поверхности.

Наибольшие изменения скорости диссипации турбулентной энергии происходят в районе вязкого подслоя (рис. 7). На колеблющейся поверхности скорость диссипации на поверхности стремится к

нулю, в то время как в пограничном слое на поглощающей поверхности скорость диссипации на стенке принимает абсолютное максимальное значение, а в области $5 < y^+ < 20$ она существенно ниже соответствующих значений скорости диссипации в пограничном слое на жесткой гладкой поверхности. При этом происходит изменение характерного времени (k/ε) существования турбулентных структур в районе поверхности. Так, на поглощающей поверхности происходит вырождение турбулентности более интенсивно, чем на жесткой, а на колеблющейся поверхности характерное время в вязком подслое может принимать конечные значения. Поэтому на колеблющейся поверхности вязкий подслой в обычном понимании может не существовать, что эквивалентно некоторой шероховатой поверхности. При $|\xi_i| > \nu / u_*$ это приводит к увеличению перемешивания в районе поверхности. Величина перемешивающейся области пропорциональна среднеквадратичному значению амплитуды колебания поверхности. В этой области не применима гипотеза градиентной диффузии. Однако при малых амплитудах $|\xi_i| \ll \delta$ не происходит изменения интегральных масштабов и погрешность, вносимая гипотезой градиентной диффузии, может проявляться только в области $y^+ < 2$, где она сопоставима с вязкой диффузией. Экспериментальных результатов в этой области нет, поэтому подтвердить это утверждение или опровергнуть не представляется возможным.

Косвенным подтверждением могут быть результаты расчетов по линеаризованным уравнениям Навье–Стокса на колеблющейся поверхности.

С удалением от стенки при $y^+ > 5$ на поглощающей поверхности коэффициент турбулентной диффузии становится меньше и диффузионный поток турбулентной энергии от стенки уменьшается, что приводит к уменьшению скорости роста толщины пограничного слоя и, как следствие, к уменьшению сопротивления трения.

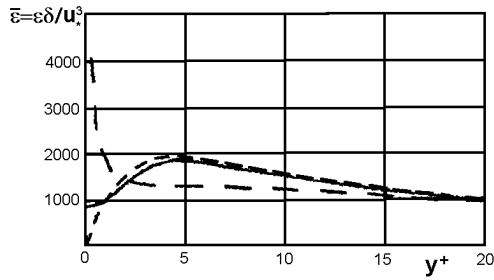


Рис. 7. Скорость диссипации турбулентной энергии

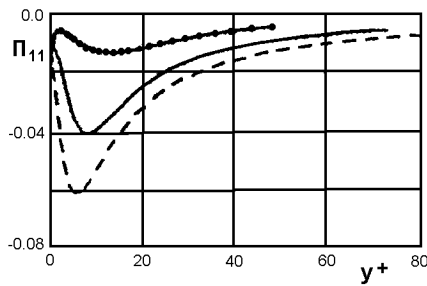


Рис. 8. Член перераспределения в уравнении переноса для продольного компонента тензора напряжений Рейнольдса на жесткой, упругой и поглощающей поверхностях

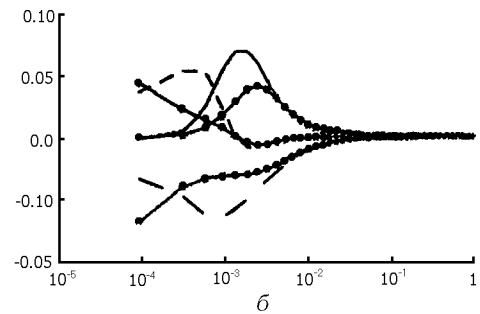
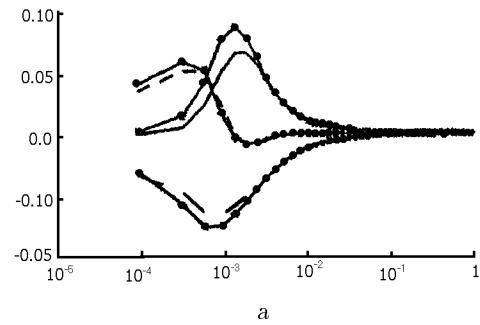


Рис. 9. Компоненты баланса энергии турбулентного потока в трубе:

а – упругая поверхность, б – поглощающая поверхность (кривые без маркеров соответствуют жесткой гладкой поверхности)

Для установившихся потоков, как уже отмечалось, прослеживается практически однозначная связь между динамической скоростью и компонентами энергетического баланса, не только при изменении числа Re , но и условий течения, например, в течениях растворов полимеров. Этот факт говорит об универсальности динамической скорости как масштабного параметра, но не раскрывает физику формирования энергетического равновесия.

В турбулентном пограничном слое на пластине и в турбулентном потоке в трубе энергетическое равновесие на большей части толщины пограничного слоя или радиуса трубы определяется локальным равенством порождения и диссипации. В непосредственной близости от поверхности диссипация турбулентной энергии уравновешивается вязкой диффузией, которая пренебрежимо мала вдали от поверхности. И, наконец, турбулентная диффузия сопоставима с порождением и диссипацией в слое "постоянного напряжения" и на внешней границе пограничного слоя или на оси трубы, где все эти величины малы по сравнению с их максимальными значениями.

Таким течениям при больших числах Рейнольдса, когда поперечный градиент давления пренебре-

жимо мал, всегда соответствует тонкая область пограничного слоя от поверхности до слоя "постоянного напряжения", составляющая доли процента от всей толщины пограничного слоя ($0.005 \div 0.01\delta$), которая ответственна за формирование максимальных значений Рейнольдсовых напряжений (в первую очередь u^2) и скорости диссипации ε . Поэтому изменение турбулентной энергии пограничного слоя на малую величину, но в пристенной области, может приводить к заметным отклонениям в сопротивлении трения. Такое изменение энергии может обеспечить отбор пульсационной энергии вязкоупругим покрытием в нерезонансной области взаимодействия в достаточно широком диапазоне частот.

В области максимальных значений составляющих баланса турбулентной энергии все компоненты этого баланса (порождение, диффузия, диссипация и перераспределение) сопоставимы по величине, что требует соответствующего уровня моделирования. Фиксируя определенное энергетическое равновесие для суммарной турбулентной энергии, можно судить о состоявшейся структуре потока и его интегральных характеристиках, но практически ничего нельзя сказать о причине этого состояния. Как уже было показано в рабо-

те [8], изменение коэффициента диффузии турбулентной энергии может приводить к установлению энергетического равновесия при меньших значениях интенсивности турбулентной энергии и скорости диссипации, а следовательно, и к уменьшению u_* .

Это утверждение, дающее объяснение факту измененного энергетического баланса, достаточно схематично описывает механизм установления его на уровне $(k - \varepsilon)$ модели, связывая этот результат с изменением коэффициента турбулентной вязкости. Так, анизотропия компонент тензора напряжений Рейнольдса в пристенной области турбулентного потока подчеркивает неравнозначное влияние обтекаемой поверхности на компоненты турбулентной энергии, а значит, и на механизм ее перераспределения.

Расчет составляющих компонент турбулентной энергии и касательных напряжений на деформируемой и поглощающих поверхностях показал, что основные изменения происходят с продольной компонентой пульсационной энергии и скоростью диссипации турбулентной энергии, и только в пристенной области.

Вместе с тем, результаты расчета слагаемых уравнения сохранения турбулентной энергии продемонстрировали качественное отличие составляющих баланса при обтекании различных поверхностей. Так, при обтекании поглощающей поверхности значительно изменяется максимальная величина порождения продольной составляющей компоненты пульсационной энергии, которая эквивалентна порождению всей турбулентной энергии при взаимодействии возмущений потока с осредненным течением, так как при установившемся течении в пограничном слое прямое порождение компонент $\overline{v^2}$ и $\overline{w^2}$ пренебрежимо мало. Эти компоненты подпитываются энергией только за счет механизма перераспределения от компоненты $\overline{u^2}$.

Качественно меняется поведение диффузии и скорости диссипации турбулентной энергии. При значениях поглощения поверхностью пульсационной энергии $Cd_3 > 3/Re_\delta$ максимумы этих величин достигают поглощающей поверхности, в то время как максимум порождения удаляется от нее (рис. 9). В турбулентном пограничном слое на колеблющейся непоглощающей поверхности распределение компонент уравнения сохранения качественно повторяет поведение соответствующих компонент на жесткой гладкой поверхности, даже при больших значениях амплитуды колебания поверхности.

На основании результатов расчета турбулент-

ного пограничного слоя на поглощающей поверхности прослеживается взаимосвязь энергонесущей частоты $\omega_e \sim U_0/\delta$, динамической частоты $\omega_b = u_*^2/\nu$ с коэффициентом анизотропии турбулентности $q = \overline{v^2}/\overline{u^2}$ и изменением коэффициента сопротивления трения. Так, при $\omega_e > \omega_b$ коэффициент анизотропии q уменьшается по сравнению с пограничным слоем на жесткой гладкой пластине, но сопротивление трения возрастает. При $\omega_e < \omega_b$ степень анизотропии потока сохраняется или несколько возрастает, а сопротивление трения изменяется пропорционально интенсивности напряжений Рейнольдса.

Если предположить, что поведение компонент тензора напряжений Рейнольдса в районе поверхности соответствует следующим степенным зависимостям:

$$u^2 \approx a \cdot y^2 + \dots; \quad v^2 \approx b \cdot y^4 + \dots; \quad w^2 \approx c \cdot y^4 + \dots,$$

то в приближении пограничного слоя перераспределение Π_{11} эквивалентно скорости диссипации при $y \rightarrow 0$, то есть

$$\Pi_{11} = \varepsilon - \varepsilon_{11},$$

так как порождение турбулентной энергии и компоненты $\overline{u^2}$ тензора напряжений Рейнольдса равны и турбулентная диффузия k и $\overline{u^2}$ эквивалентны.

Таким образом, $\Pi_{11} = 2/3(1 - f_s)\varepsilon$, следовательно, на жесткой гладкой поверхности $\Pi_{11} = 0$, так как $f_s \rightarrow 1$ при $y \rightarrow 0$.

На деформируемой поверхности $R_t \neq 0$, следовательно $\Pi_{11} \neq 0$, что и отражают результаты расчетов члена перераспределения на колеблющейся и поглощающей поверхности (рис. 8). Существенно изменяется перераспределение на поглощающей поверхности: максимум корреляции давление-деформация значительно уменьшается и удаляется от поверхности, на колеблющейся – наоборот.

В связи с этим вопрос о достоверности описания перераспределения не тривиален, хотя он не тривиален и в более простых течениях. В работе [36] подробно сопоставляются три последние модели для корреляции давление-деформация с результатами прямого моделирования однородного сдвига на основании численного решения уравнений Навье-Стокса. Это модели Шиха-Ламли (SL), Фу-Лаундера-Телеридакиса (FLT) и Спизейла-Саркара-Гатски (SSG). Для относительно простого течения результаты моделирования всех трех моделей признаются неудовлетворительными. Сопоставить результаты расчетов, приведенные на рис. 8, в настоящее время не с чем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенная модель адекватно описывает процесс взаимодействия турбулентного пограничного слоя с деформирующейся поверхностью.

Численная реализация разработанной модели позволяет получать осредненные значения скорости, компонент напряжений Рейнольдса, скорости диссипации в ТПС на активно и пассивно деформирующейся поверхности вязкоупругого слоя.

Деформирующаяся поверхность вязкоупругого слоя способна существенно уменьшать сопротивление трения за счет поглощения и перераспределения пульсационной энергии ТПС. Полученные результаты подтверждают существование приспособительных функций кожных покровов китообразных, направленные на уменьшение гидродинамического сопротивления трения при активном режиме плавания.

1. Амфилохий В. Б. Турбулентное течение с упругими границами // Бионика.– 1969.– 3.– С. 46–53.
2. Бабенко В. В., Канарский М. В., Коробов В. И. Пограничный слой на эластичных пластинах.– Киев: Наукова думка, 1993.– 263 с.
3. Воропаев Г. А. Исследование влияния аналога наружного покрова китообразных на турбулентный пограничный слой. Диссертация... к. ф.-м. н.– Киев: , 1977.– 139 с.
4. Воропаев Г. А., Попков В. И. О механизме взаимодействия податливой поверхности с вязким подслоем турбулентного пограничного слоя // Гидромеханика.– 1988.– 58.– С. 20–25.
5. Воропаев Г. А., Птуха Ю. А. Моделирование турбулентных сложных течений.– Киев: Наукова думка, 1991.– 165 с.
6. Кирейко Г. В. О взаимодействии пристенной турбулентности с податливой поверхностью // Механика жидкости и газа.– 1990.– N 4.– С. 67–72.
7. Козлов Л. Ф., Бабенко В. В. Экспериментальные исследования пограничного слоя.– Киев: Наукова думка, 1978.– 190 с.
8. Козлов Л. Ф., Воропаев Г. А. О возможном механизме взаимодействия турбулентного течения в трубе с упруго-демпфирующей поверхностью // ДАН УССР, Сер.А, Физ.-мат.н техн. науки.– 1981.– N 9.– С. 48–52.
9. Короткин А. И. Устойчивость ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости на упругой поверхности // Известия АН СССР. МЖГ.– 1966.– N 3.– С. 39–44.
10. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена.– М.: Наука, 1984.– 288 с.
11. Семенов Б. Н. Влияние упругих покрытий на турбулентный пограничный слой // Исследование по управлению пограничным слоем.– Новосибирск, 1976.– С. 92–101.
12. Семенов Б. Н. Анализ деформационных характеристик вязкоупругих облицовок // Гидродинамика и акустика пристенных и свободных течений.– Новосибирск, 1981.– С. 57–76.
13. Benjamin T. B. Effect of a flexible boundary on hydrodynamic stability // J. Fluid Mech.– 1960.– 9.– P. 513–527.
14. Blick F. B., Walters R. R. Turbulent boundary characteristics of compliant surfaces // J. Aircraft.– 1968.– 5.– P. 11–16.
15. Bushnell D. M., Hefner J. N., Ash R. L. Effect of compliant wall motion on turbulent boundary layers // Physics Fluids.– 1977.– 20, N 10, pt. II.– P. 31–53.
16. Buckingham A. C., Hall M. S., Chun R. C. Numerical simulations of compliant material response to turbulent flow // AIAA Journal.– 1985.– 23, N 7.– P. 1046–1052.
17. Carpenter P. W. Status of transition delay using compliant walls // In Viscous Drag Reduction in Boundary Layers. Progress in Astronautics and Aeronautics.– 1990.– 123.– P. 79–113.
(cd. Bushnell D.M., Hefner S.N.) AIAA
18. Carpenter P. W., Garrad A. D. The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. part 2. Flow-induced surface instabilities // J. of Fluid Mechanics.– 1987.– 170.– P. 439–468.
19. Duncan J. H. The response of an incompressible viscoelastic coating to pressure fluctuations in a turbulent boundary layer // J. of Fluid Mech.– 1986.– 171.– P. 339–363.
20. Duncan J. H. The Dynamics of Waves of the Interface Between a Two-layer Viscoelastic Coating and a Fluid Flow // Journal of Fluids and Structures.– 1988.– 2, N 1.– P. 35–52.
21. Gad-el-Hak M. The response of elastic and viscoelastic surfaces to a TBL // J. Appl. Mechanics.– Trans. ASME E, 1986.– P. 206–212.
22. Gad-el-Hak M., Blackwelder R. F., Riley J. J. On the interaction of compliant coatings with boundary-layer flows // J. Fluid Mech.– 1984.– 140.– P. 257–280.
23. Hansen R. J., Hunston D. J. An experimental study of turbulent flows over compliant surfaces // J. Sound Vib.– 1974.– 34.– P. 297–308.
24. Hansen R. J., Hunston D. J. An experimental study of flow-generated waves on a flexible surfaces // J. Sound Vib.– 1980.– 68.– P. 317–334.
25. Hansen R. J., Hunston D. J. Fluid-property effects on flow-generated waves on a compliant surface // J. Fluid Mechanics.– 1983.– 133.– P. 161–177.
26. Hess D. E., Peattie R. A., Schwarz W. H. A non-invasive method for the measurement of flow-induced surface displacement of a compliant surface // Exp. Fluids.– 1993.– 8.– P. 137–144.
27. Kramer M. O. Boundary layer stabilization by distributed dumping // ASME J.– 1960.– 72, N 2.– P. 25–36.
28. Landahl M. T. A wave/guide model for turbulent shear flow // J. Fluid Mech.– 1967.– 29, N 3.– P. 441–459.
29. Launder B. E., Reece G. I., Rodi W. Progress in the development of a Reynolds stress turbulent closure // J. Fluid Mech.– 1975.– 68, N 3.– P. 537–566.
30. Launder B. E., Reynolds W. C. Asymptotic near wall stress dissipation rates in turbulent flow // Phys. Fluids.– 1933.– 26, N 5.– P. 1157–1158.

31. Lee T., Fisher M., Schwarz W. H. Investigation of the stable interaction of a passive compliant surface with a turbulent boundary layer // J. of Mechanics.– 1993.– **257**.– P. 373–402.
32. Lissaman P. B. S., Gordon L. H. Turbulent skin friction on compliant surfaces // AIAA Paper.– 1969.– N 164.– P. 1–4.
33. McMichael J. M., Klebanoff P. S., Mease N. Experimental investigation of drag on a compliant surface // In Viscous Flow Drag Reduction (ed. G.R. Hough), AIAA Astro. Acro.– 1979.– **72**.– P. 410–438.
34. Nonweiler T. Qualitative solution of the stability equation for a boundary layer in contact with various forms of flexible surface // ARC Rep.– 1963.– **22**, N 670.– P. 75–75.
35. Riley J. J., Gad-el-Hak M., Metcalf R. W. Compliant coating // Ann.Rev.Fluid Mech.– 1988.– **20**.– P. 393–420.
36. Speziale C. G., Gatski T. B., Sarkar S. On testing models for the pressure-strain correlation of turbulence using direct simulations // Physics of Fluids.– 1992.– **4**, N 12.– P. 2887–2899.
37. Thomas M. D. The nonlinear stability of flows over compliant walls // J. Fluid Mech.– 1992.– **239**.– P. 657–670.
38. Wolfstein M., Naot D., Lin A. Models of turbulence // Topics on transport phenomena in bioprocesses, mathematical treatment and mechanisms.– 1975.– P. 3–45.
39. Yeo K. S. The stability of boundary-layer flow over single- and multi-layer viscoelastic walls // J. Fluid Mechanics.– 1988.– N 196.– P. 359–386.
40. Yeo K. S. The hydrodynamic stability of boundary-layer flow over a class of anisotropic compliant walls // J. Fluid Mech.– 1990.– **220**.– P. 125–160.