

УДК 624.131 + 539.215

ГОРИЗОНТАЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖЕСТКОГО ПРОНИЦАЕМОГО ШТАМПА НА ДВУХФАЗНОМ ПОРИСТОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ

А. Н. ТРОФИМЧУК, А. М. ГОМИЛКО, О. А. САВИЦКИЙ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 03.06.99

Исследуются гармонические колебания жесткого штампа на вязкопористоупругом насыщенном жидкостью основании при действии на штамп горизонтальной силы или момента. Для определения перемещений основания используются уравнения модели двухфазной среды Био, учитывающие инерционное и вязкое взаимодействия фаз. Методом ортогональных многочленов система парных интегральных уравнений контактной задачи (при дренируемом контакте со сцеплением жесткого штампа и твердой фазы двухфазной среды) сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. При численном решении находятся силовые и кинематические характеристики движения штампа и распределение контактных напряжений в твердой фазе. Исследована зависимость рассматриваемых величин от проницаемости материала основания (полуплоскости).

Досліджуються гармонічні коливання жорсткого штампа на в'язкопористоупругій основі, що насичена рідиною під дією на штамп горизонтальної сили або моменту. Для визначення переміщень основи використовуються рівняння моделі Біо двофазного середовища, що враховують інерційну і в'язку взаємодію фаз. Методом ортогональних поліномів система парних інтегральних рівнянь контактної задачі (при дренованому контакті зі зчепленням жорсткого штампа і твердої фази двофазного середовища) зведена до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. При чисельному розв'язку знаходяться силові і кінематичні характеристики коливань штампа і розподіл контактних напружень у твердій фазі. Досліджено залежність величин, що аналізуються, від проникності матеріалу основи (півплощини).

The steady vibrations of a rigid block based on the porous liquid-saturated base with viscoelastic solid skeleton are investigated. Block is subjected by the horizontal force or the torque. The equations of two-phase Biot media, taking into account inertial and viscous interactions of phases, are used for determination of the displacements of the basis. By the method of orthogonal polynomials a system of double integral equations of the contact problem (with a drained contact with coupling of rigid block and solid phase of twophase media) reduces to an infinite system of linear algebraic equations. At the numerical solution the dynamic and kinematic characteristics of motion of a block and distribution of contact stresses in the solid phase is evaluated. The relation of considered values from a permeability of a material of a base (half-plane) are investigated.

ВВЕДЕНИЕ

Контактные напряжения под фундаментом сооружения на упругом основании в условиях плоской и пространственной задач рассматривались во многих работах, например [1–3]. Для двухфазного полупространства изучено распределение нормальных контактных напряжений под круглым проницаемым штампом [4], рассмотрены вертикальные колебания прямоугольного фундамента (с дренируемой подошвой) на вязкопористоупругом полупространстве [5]. Развитию метода ортогональных полиномов для решения задач о колебаниях непроницаемого штампа на пористоупругой насыщенной жидкостью полуплоскости посвящена работа [6]. Стационарные и нестационарные колебания плоских штампов методом конечных элементов рассматривались в [7]. При этом контактные напряжения сопоставлялись с моделями эквивалентной однофазной и упругой однородной среды. Пространственные контактные задачи для безмассового штампа на пористоупругом насыщенном жидкостью основании изучены в [8]. В случае гар-

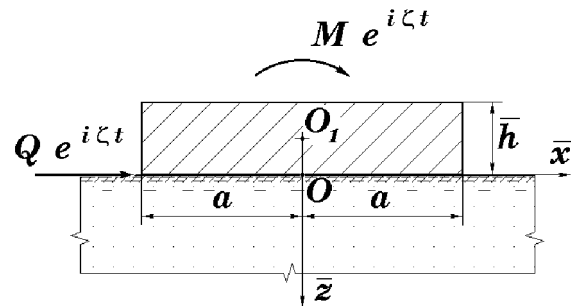


Рис. 1. Жесткая полоса (штамп) на вязкопористоупругой насыщенной жидкостью полуплоскости

монических колебаний были найдены распределения контактных напряжений и перемещения проницаемых и непроницаемых штампов. Выяснено, что проницаемость подошвы практически не влияет на перемещения штампа, однако играет существенную роль в распределении напряжений между твердой и жидкой фазами на поверхности контакта.

Для фундаментов, воспринимающих горизонтальные и моментные динамические нагрузки,

важное значение имеет расчет горизонтально-вращательных колебаний [1, 9], которые практически не изучены для пористоупругих насыщенных жидкостью сред. В данной работе рассматривается задача о гармонических колебаниях жесткого штампа на вязкопористоупругом насыщенном жидкостью основании при действии на штамп горизонтальной силы или момента. При сведении интегральных уравнений соответствующей контактной задачи к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений используется метод ортогональных многочленов. Этот метод является эффективным для численного решения динамических контактных задач с основаниями, которые моделируются полубесконечными областями как однородными (упругими, вязкоупругими), так и слоистыми, а также двухфазными (пористоупругими и вязкопористоупругими, насыщенными жидкостью). Обоснованию метода посвящены работы [1, 4], где даны расширенные обзоры публикаций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим вынужденные колебания жесткого полосового штампа шириной a и высотой \bar{h} (рис. 1) под действием: а) горизонтальной силы по подошве $Q(t) = Q e^{i\zeta t}$; б) момента $M(t) = M e^{i\zeta t}$, где Q – амплитуда горизонтальной силы, приложенной на уровне $z = 0$; M – амплитуда момента сил относительно центра тяжести полосы O_1 , причем $OO_1 = \bar{h}/2$. Введены безразмерные переменные: $x = \bar{x}/a$; $z = \bar{z}/a$; \bar{x} , \bar{z} – прямоугольные координаты; $h = \bar{h}/a$; $t = \bar{t}c_2/a$; \bar{t} – время; $\zeta = a\omega/c_2$; ω – частота вынужденных колебаний; c_2 – скорость поперечной волны в двухфазной среде без учета диссипации.

Штамп совершает сложное движение, которое можно разложить на составляющие: вертикальное и горизонтальное перемещения, а также поворот относительно центра тяжести. Вертикальное перемещение Δv при малых углах поворота штампа значительно меньше горизонтального смещения Δu , поэтому достаточно использовать два уравнения динамического равновесия:

$$\begin{aligned} -M_0 \frac{c_2^2}{a^2} \zeta^2 u_0 &= Q - Q_R, \\ -J_0 \frac{c_2^2}{a^2} \zeta^2 \phi &= -\frac{h}{2}(Q - Q_R) + M - M_R, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_0 – горизонтальное перемещение центра тяжести штампа; ϕ – угол поворота вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр тя-

жести штампа O_1 ; $M_0 = 2\bar{h}a\rho$ – масса штампа на единицу длины; ρ – плотность материала штампа; J_0 – полярный момент инерции массы полосы относительно рассматриваемой оси, $J_0 = a^3 M_0 (1 + h^2/4a^2)/3$; Q_R и M_R – соответственно равнодействующая контактных касательных напряжений и момент равнодействующей нормального давления:

$$\begin{aligned} Q_R &= a \int_{-1}^1 \tau_{xy}(x) dx; \\ M_R &= a^2 \int_{-1}^1 p_R(x) x dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Горизонтальное перемещение центра тяжести штампа состоит из перемещения середины подошвы штампа u и смещения v вследствие поворота на угол ϕ относительно центра тяжести подошвы:

$$u_0 = u + \frac{\bar{h}}{2}\phi, \quad \phi = \frac{v(x)}{x}. \quad (3)$$

Уравнения (1) записываются теперь в виде

$$\begin{aligned} -\pi\mu m_0 \zeta^2 u &= \\ &= (1 + hn_0)(Q - Q_R) - \frac{2}{a}n_0(M - M_R); \\ &\quad -\frac{\pi a \mu j_0}{2} \zeta^2 \left[\frac{v(x)}{ax} \right] = \\ &= -\frac{h}{2}(Q - Q_R) + (M - M_R), \end{aligned} \quad (4)$$

где обозначено $m_0 = 2h\rho/(\pi\rho_0) = M_0/(\pi a^2 \rho_0)$, $\rho_0 = \rho_{11} - \rho_{12}^2/\rho_{22}$; $j_0 = 2m_0(1 + h^2/4)/3$; $n_0 = a^2 h M_0/(4J_0) = 3h/[4(1 + h^2/4)]$. Таким образом, для перемещений штампа имеем выражения

$$\begin{aligned} u &= \frac{-1}{\pi\mu m_0 \zeta^2} \times \\ &\times [(1 + hn_0)(Q - Q_R) - \frac{2}{a}n_0(M - M_R)], \\ v &= \frac{x}{\pi\mu j_0 \zeta^2} [ha(Q - Q_R) - 2(M - M_R)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Предполагается выполнение следующих контактных условий для твердой фазы:

$$u = u_s(x, 0), \quad v = v_s(x, 0), \quad |x| \leq 1, \quad (6)$$

где $u_s(x, z)$, $v_s(x, z)$ – перемещения пористоупругой насыщенной жидкостью полуплоскости при действии распределенных нагрузок на участке границы $|x| < 1$, $z = 0$. Эти перемещения находятся из системы уравнений Био, описывающей движение двухфазной пористоупругой насыщенной жидкостью среды:

$$\begin{aligned} -\zeta^2 (\rho_{11} u_i + \rho_{12} U_i) + i\zeta \mathbf{b} (u_i - U_i) &= \frac{\partial \sigma_{ij}^s}{\partial x_j}; \\ -\zeta^2 (\rho_{12} u_i + \rho_{22} U_i) + i\zeta \mathbf{b} (U_i - u_i) &= \frac{\partial \sigma^f}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (7)$$

причем в предположении изотропности и линейности пористой твердой фазы связь напряжений с деформациями принимается следующей [4]:

$$\sigma_{ij}^s = A \epsilon \delta_{ij} + N \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + Q \epsilon \delta_{ij};$$

$$e = \text{div } \vec{u}; \quad \epsilon = \text{div } \vec{U}; \quad (8)$$

$$\sigma^f = -m p_0 = Q \epsilon + R \epsilon. \quad (9)$$

Здесь u_i , U_i – компоненты векторов перемещений твердой \vec{u} и жидкой \vec{U} фаз в декартовых координатах x_i ; $\rho_{11} = (1 - m)\rho_s - \rho_{12}$; $\rho_{22} = m\rho_f - \rho_{12}$; ρ_s , ρ_f – плотности твердой и жидкой фаз соответственно; ρ_{12} – коэффициент динамической связи фаз, имеющий размерность плотности; m – пористость; $N = \mu$; $A = \lambda + K_0 a_0^2 S_0/m$; λ и μ – упругие константы Ламе; $R = m K_0 S_0$; $Q = a_0 K_0 S_0$; K_0 – модуль объемной сжимаемости жидкости; θ_0 – динамический коэффициент вязкости жидкости; $S_0 = m K_r / (m K_r + a_0 K_0)$; $a_0 = 1 - m - K_s / K_r$; $K_s = \lambda + 2\mu/3$; K_r – истинный модуль сжимаемости твердой фазы; $\mathbf{b} = m^2 \theta_0 / K_{pr} = 9.81 m^2 \rho_f / k_f$, K_{pr} – коэффициент проницаемости; $k_f = K_{pr} \rho_0 g / \theta_0$ – коэффициент фильтрации; e – объемная деформация минерального скелета; ϵ – объемная деформация жидкой фазы; σ_{ij}^s – тензор напряжений в скелете при протекании жидкости; σ^f – сила, действующая на жидкость, отнесенная к единице поперечного сечения пористой среды; δ_{ij} – символ Кронекера. Деформации твердого скелета происходят под действием эффективных напряжений $\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^s + (1 - m) p_0 \delta_{ij}$. Отметим, что концепция эффективных (действующих) напряжений означает экспериментально подтверждаемый факт, что прочность твердой фазы грунта практически не зависит от гидростатического давления [10]. Скорость c_2 поперечной волны в двухфазной среде без учета диссипации определяется как

$$c_2 = \sqrt{\mu / (\rho_{11} - \rho_{12}^2 / \rho_{22})}. \quad (10)$$

Скорости продольных $c_1(\zeta)$, $c_{12}(\zeta)$ и поперечной $c_2(\zeta)$ объемных волн, зависящих от частоты, определяются из выражений

$$c_1(\zeta) = c / \sqrt{z_1}; \quad c_{12}(\zeta) = c / \sqrt{z_2}; \quad (11)$$

$$c_2(\zeta) = \{N / [\rho_{11} + \rho_{12} M_3 + i\Gamma \rho (1 - M_3)]\}^{1/2}, \quad (12)$$

где z_j , $j = 1, 2$ – корни квадратного уравнения

$$(q_{11} q_{22} - q_{12}^2) z^2 - (q_{11} \Gamma_{22} + q_{22} \Gamma_{11} - 2q_{12} \Gamma_{22} + i\Gamma) z + (\Gamma_{11} \Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2 + i\Gamma) = 0; \quad (13)$$

и

$$M_3 = \frac{-\Gamma_{12} + i\Gamma}{\Gamma_{22} + i\Gamma}. \quad (14)$$

Здесь

$$\rho = \rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12} = (1 - m)\rho_s + m\rho_f; \quad c^2 = H/\rho;$$

$$H = A + 2N + R + 2Q; \quad q_{11} = \frac{A + 2N}{H}; \quad q_{12} = \frac{Q}{H};$$

$$q_{22} = \frac{R}{H}; \quad \Gamma_{ij} = \rho_{ij}/\rho; \quad \Gamma = -B\rho_{11}/(\zeta\rho).$$

При моделировании динамики водонасыщенной грунтовой среды для учета внутреннего трения в материале вязкопористоупругого твердого скелета вводятся упругие постоянные среды с учетом внутреннего трения в материале скелета грунта [11]:

$$\bar{N} = \mu e^{i\gamma}; \quad \bar{A} = 2\mu e^{i\gamma} \nu / (1 - 2\nu) + K_f \bar{a}_0^2 / [m + (K_f/K_r) \bar{a}_0];$$

$$\bar{a}_0 = 1 - m - K_s e^{i\gamma} / K_r;$$

$$\bar{Q} = K_f \bar{a}_0 / [1 + K_f \bar{a}_0 / (m K_r)];$$

$$\bar{R} = m K_f / [1 + K_f \bar{a}_0 / (m K_r)], \quad (15)$$

где γ – коэффициент внутреннего трения; ν – коэффициент Пуассона твердого скелета грунта.

Движение жидкой фазы не лимитируется (проницаемый штамп), то есть

$$\sigma^f(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (16)$$

Граничные условия для напряжений твердой фазы вне штампа имеют вид

$$\tau_{xz}^s(x, 0) = 0, \quad \sigma_z^s(x, 0) = 0, \quad |x| > 1. \quad (17)$$

2. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ

Введем в рассмотрение неизвестные контактные напряжения

$$\sigma_z^s(x, 0) = -p(x), \quad |x| < 1;$$

$$\tau_{xz}^s(x, 0) = -\tau(x), \quad |x| < 1. \quad (18)$$

При этом $p(x)$ является нечетной, а $\tau(x)$ – четной функциями переменной $x \in (0, 1)$. Тогда, согласно [6], для перемещений твердой фазы получаем выражения

$$v_s(x, 0) = \frac{\beta_3^2}{4\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{P}(\xi) \Phi_1(\xi)}{D(\xi)} e^{ix\xi} d\xi + \frac{i}{2\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{T}(\xi) \Phi_2(\xi)}{D(\xi)} e^{ix\xi} d\xi; \quad (19)$$

$$u_s(x, 0) = \frac{i}{2\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{P}(\xi)\Phi_3(\xi)}{D(\xi)} \xi e^{ix\xi} d\xi + \frac{\zeta^2}{2\mu} (n_1 m_2 - n_2 m_1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{T}(\xi)}{D(\xi)} \xi_3 e^{ix\xi} d\xi, \quad (20)$$

где введены обозначения функций

$$\Phi_1(\xi) = \zeta^2 (n_1 \xi_2 - n_2 \xi_1); \quad (21)$$

$$\Phi_2(\xi) = [-\xi_3 (n_1 \xi_2 - n_2 \xi_1) + \xi^2 (n_1 - n_2) - \zeta^2 (n_1 m_2 - n_2 m_1)]; \quad (22)$$

$$\Phi_3(\xi) = (n_2 - n_1) (\xi^2 - 0.5\beta_3^2 \zeta^2) - \xi_3 (n_2 \xi_1 - n_1 \xi_2); \quad (23)$$

$$D(\xi) = (\xi^2 - 0.5\beta_3^2 \zeta^2) \times [n_1 (\xi^2 - m_2 \zeta^2) - n_2 (\xi^2 - m_1 \zeta^2)] - \xi^2 \xi_3 (n_1 \xi_2 - n_2 \xi_1); \quad (24)$$

$$\xi_i = \sqrt{\xi^2 - \beta_i^2 \zeta^2}, \quad i = 1, 2, 3;$$

постоянных

$$n_j = (Q + RM_j) \beta_j^2 / (2\mu);$$

$$m_j = [1 + (A + QM_j) / (2\mu)] \beta_j^2, \quad j = 1, 2;$$

$$\beta_1 = c_2 / c_1(\zeta); \quad \beta_2 = c_2 / c_{12}(\zeta); \quad \beta_3 = c_2 / c_2(\zeta)$$

и преобразования Фурье

$$\begin{aligned} \bar{P}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 p(x) e^{-i\xi x} dx = \\ &= -\frac{i}{\pi} \int_0^1 p(x) \sin(\xi x) dx; \\ \bar{T}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \tau(x) e^{-i\xi x} dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \tau(x) \cos(\xi x) dx. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, для определения нормированных контактных напряжений

$$q(x) = \frac{p(x)}{\mu}, \quad t(x) = \frac{\tau(x)}{\mu} \quad (26)$$

получаем следующую систему линейных интегральных уравнений на интервале $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[\int_0^1 q(s) \sin(\xi s) ds \right] \frac{\Phi_3(\xi)}{D(\xi)} \xi \cos(x\xi) d\xi + \\ + \zeta^2 (n_1 m_2 - n_2 m_1) \times \\ \times \int_0^\infty \left[\int_0^1 t(s) \cos(\xi s) ds \right] \frac{\xi_3}{D(\xi)} \times \\ \times \cos(x\xi) d\xi = g_1, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta_3^2}{2} \int_0^\infty \left[\int_0^1 q(s) \sin(\xi s) ds \right] \frac{\Phi_1(\xi)}{D(\xi)} \sin(x\xi) d\xi - \\ - \int_0^\infty \left[\int_0^1 t(s) \cos(\xi s) ds \right] \times \\ \times \frac{\Phi_2(\xi)}{D(\xi)} \xi \sin(x\xi) d\xi = g_2 x, \end{aligned} \quad (28)$$

где введены обозначения для постоянных величин

$$g_1 = \frac{-1}{\zeta^2 \mu m_0} [(1 + hn_0)(Q - Q_R) - \frac{2}{a} n_0 (M - M_R)], \quad (29)$$

$$g_2 = \frac{1}{\pi \mu j_0 \zeta^2} [\bar{h}(Q - Q_R) - 2(M - M_R)], \quad (30)$$

причем

$$\begin{aligned} Q_R &= -2a\mu \int_0^1 t(x) dx, \\ M_R &= -2a^2 \mu \int_0^1 q(x) x dx. \end{aligned} \quad (31)$$

После перемены порядков интегрирования система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} \int_0^1 K_{11}(x, s) t(s) ds + \\ + \int_0^1 K_{12}(x, s) q(s) ds = g_1; \\ \int_0^1 K_{21}(x, s) t(s) ds + \\ + \int_0^1 K_{22}(x, s) q(s) ds = g_2 x, \end{aligned} \quad (32)$$

где ядра интегральных операторов

$$\begin{aligned} K_{11}(x, s) &= \zeta^2 (n_1 m_2 - n_2 m_1) \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{\xi_3}{D(\xi)} \cos(x\xi) \cos(s\xi) d\xi; \\ K_{12}(x, s) &= \int_0^\infty \frac{\Phi_3(\xi)}{D(\xi)} \xi \cos(x\xi) \sin(s\xi) d\xi; \\ K_{21}(x, s) &= -\int_0^\infty \frac{\Phi_2(\xi)}{D(\xi)} \xi \sin(x\xi) \cos(s\xi) d\xi; \\ K_{22}(x, s) &= \frac{\beta_3^2}{2} \int_0^\infty \frac{\Phi_1(\xi)}{D(\xi)} \sin(x\xi) \sin(s\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (33)$$

Для выяснения характера особенностей ядер $K_{ij}(x, s)$ определим асимптотическое поведение подынтегральных функций в выражениях (33). Согласно [6], имеем при $\xi \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_1(\xi)}{D(\xi)} &\approx \frac{A_{22}}{\xi}; & \frac{\Phi_3(\xi)}{D(\xi)}\xi &\approx \frac{A_{12}}{\xi}; \\ \frac{\Phi_2(\xi)}{D(\xi)}\xi &\approx \frac{A_{21}}{\xi}; & \frac{\xi_3}{D(\xi)} &\approx \frac{A_{11}}{\xi}, \end{aligned} \quad (34)$$

где постоянные

$$\begin{aligned} A_{22} &= \frac{L_1}{d_0}; & A_{12} &= \frac{L_3}{d_0}; & A_{21} &= \frac{L_2}{d_0}; & A_{11} &= \frac{1}{d_0}; \\ L_1 &= n_1 - n_2; \\ L_2 &= 0.5\zeta^2[(n_1\beta_2^2 - n_2\beta_1^2) + \beta_3^2(n_1 - n_2) + \\ &\quad + 2(n_2m_1 - n_1m_2)]; \\ L_3 &= 0.5\zeta^2(n_2\beta_1^2 - n_1\beta_2^2); \\ d_0 &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} D(\xi)/\xi^2 = \\ &= \zeta^2[n_2(m_1 - 0.5\beta_1^2) - n_1(m_2 - 0.5\beta_2^2)]. \end{aligned}$$

Таким образом, все функции в определениях ядер $K_{ij}(x, s)$ ведут себя на бесконечности как ξ^{-1} . Далее, интегралы при $s, x > 0; s \neq x$ [12]:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos(x\xi) \sin(s\xi)}{\xi} d\xi &= \pi H(s - x), \\ \int_0^\infty \frac{\sin(x\xi) \sin(s\xi)}{\xi} d\xi &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{s - x}{s + x} \right|, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\cos(x\xi) \cos(s\xi)}{\xi} d\xi &= -C - \frac{1}{2} \ln |s^2 - x^2| + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{|s-x|} \frac{1 - \cos \xi}{\xi} d\xi &+ \frac{1}{2} \int_0^{s+x} \frac{1 - \cos \xi}{\xi} d\xi, \end{aligned} \quad (36)$$

где C – постоянная Эйлера.

Проведенный анализ показывает, что ядра $K_{11}(x, s)$ и $K_{22}(x, s)$ имеют логарифмические особенности при $|x - s| \rightarrow 0$. В этом случае искомые функции $t(x), q(x)$ обладают корневой особенностью $1/\sqrt{1-x^2}$ при $x \rightarrow \pm 1$. С учетом четности функции $t(x)$ и нечетности $q(x)$, будем их искать в виде разложений по соответствующим полиномам Чебышева первого рода:

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t_{2k} T_{2k}(x); \\ q(x) &= \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q_{2k+1} T_{2k+1}(x). \end{aligned} \quad (37)$$

Тогда, используя известные значения интегралов [13]

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{T_{2k}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \cos(bx) dx &= (-1)^k J_{2k}(b); \\ \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{T_{2k+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \sin(bx) dx &= (-1)^k J_{2k+1}(b), \end{aligned} \quad (38)$$

получаем из (32) следующие функциональные соотношения:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} t_{2k}(n_1m_2 - n_2m_1)\zeta^2\beta_1^2\beta_2^2 \times \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{\xi_3}{D(\xi)} J_{2k}(\xi) \cos(x\xi) d\xi + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} q_{2k+1} \int_0^\infty \frac{\Phi_3(\xi)}{D(\xi)} \xi J_{2k+1}(\xi) \cos(x\xi) d\xi = g_1; \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} t_{2k} \int_0^\infty \frac{\Phi_2(\xi)}{D(\xi)} \xi J_{2k}(\xi) \sin(x\xi) d\xi + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} q_{2k+1} \frac{\beta_3^2}{2} \times \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{\Phi_1(\xi)}{D(\xi)} J_{2k+1}(\xi) \sin(x\xi) d\xi = g_2 x, \end{aligned} \quad (39)$$

справедливые при $x \in [0, 1]$. При этом постоянные величины g_1, g_2 включают в себя как заданные нагрузки, так и неизвестные коэффициенты t_0, q_1 . Согласно (31) и представлениям (37), получаем следующие выражения для этих постоянных:

$$\begin{aligned} g_1 &= -\frac{1}{\zeta^2 m_0} [(1 + hn_0) \left(\frac{Q}{\mu} + at_0\right) - \\ &\quad - \frac{n_0}{a} \left(\frac{2M}{\mu} + a^2 q_1\right)], \\ g_2 &= \frac{1}{\pi j_0 \zeta^2} [h \left(\frac{Q}{\mu} + at_0\right) - \\ &\quad - \left(\frac{2M}{\mu} + a^2 q_1\right)]. \end{aligned} \quad (40)$$

Домножая полученные функциональные соотношения на $T_n(x)/\sqrt{1-x^2}$ и интегрируя по $x \in [0, 1]$, получаем (снова используя значения интегралов (38)) бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $t_{2k}, q_{2k+1}, k = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} t_{2k}(n_1m_2 - n_2m_1)\zeta^2\beta_1^2\beta_2^2 \times \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{\xi_3}{D(\xi)} J_{2n}(\xi) J_{2k}(\xi) d\xi + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} q_{2k+1} \int_0^\infty \frac{\Phi_3(\xi)}{D(\xi)} \xi J_{2n}(\xi) J_{2k+1}(\xi) d\xi = \\ &= \delta_{n,0} g_1, \quad n = 0, 1, \dots; \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} t_{2k} \int_0^\infty \frac{\Phi_2(\xi)}{D(\xi)} \xi J_{2n+1}(\xi) J_{2k}(\xi) d\xi + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} q_{2k+1} \frac{\beta_3^2}{2} \int_0^\infty \frac{\Phi_1(\xi)}{D(\xi)} J_{2n+1}(\xi) J_{2k+1}(\xi) d\xi = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\delta_{n,0} g_2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (41)$$

Таким образом для определения неизвестных $t_{2k}, q_{2k+1}, k = 0, 1, \dots$ получена бесконечная система уравнений (40), (41). Согласно выражениям (34) и асимптотическим формулам для функций Бесселя, получаем, что подинтегральные функции в интегральных коэффициентах системы (41) ведут себя на бесконечности как ξ^{-2} , то есть все интегралы являются абсолютно сходящимися. Для улучшения сходимости этих интегралов можно воспользоваться асимптотическими соотношениями (34). Исходя из (37) и значений интегралов

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\xi}{\xi^2 + \delta^2} J_0^2(\xi) d\xi &= \\ &= I_0(\delta) K_0(\delta), \quad \delta > 0, \\ \int_0^\infty \frac{J_n^2(\xi)}{\xi} d\xi &= \frac{1}{2n}, \quad n > 0, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{J_{2n}(\xi) J_{2k+1}(\xi)}{\xi} d\xi &= \\ &= -\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n-k}}{(2n)^2 - (2k+1)^2}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{J_{2n}(\xi) J_{2k}(\xi)}{\xi} d\xi &= 0, \quad n \neq k, \\ \int_0^\infty \frac{J_{2n+1}(\xi) J_{2k+1}(\xi)}{\xi} d\xi &= 0, \quad n \neq k, \end{aligned} \quad (44)$$

систему уравнений (41) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &t_0(n_1 m_2 - n_2 m_1) \zeta^2 \beta_1^2 \beta_2^2 \times \\ &\quad \times \{ A_{11} I_0(\delta) K_0(\delta) + \\ &+ \int_0^\infty \left[\frac{\xi_3}{D(\xi)} - \frac{A_{11} \xi}{\xi^2 + \delta^2} \right] J_0^2(\xi) d\xi \} + \\ &+ \sum_{k=1}^\infty t_{2k} (n_1 m_2 - n_2 m_1) \zeta^2 \beta_1^2 \beta_2^2 \times \\ &\times \int_0^\infty \left[\frac{\xi_3}{D(\xi)} - \frac{A_{11}}{\xi} \right] J_0(\xi) J_{2k}(\xi) d\xi + \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k q_{2k+1}}{(2k+1)^2} + \\ &+ \sum_{k=0}^\infty q_{2k+1} \int_0^\infty \left[\frac{\Phi_3(\xi)}{D(\xi)} \xi - \frac{A_{12}}{\xi} \right] \times \\ &\quad \times J_0(\xi) J_{2k+1}(\xi) d\xi = g_1; \\ t_{2n} \frac{A_{11}}{2n} (n_1 m_2 - n_2 m_1) \zeta^2 \beta_1^2 \beta_2^2 &+ \frac{2(-1)^n}{\pi} A_{12} \times \\ &\times \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k q_{2k+1}}{(2k+1)^2 - (2n)^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{k=0}^\infty t_{2k} (n_1 m_2 - n_2 m_1) \zeta^2 \beta_1^2 \beta_2^2 + \times \\ &\times \int_0^\infty \left[\frac{\xi_3}{D(\xi)} - \frac{A_{11}}{\xi} \right] J_{2n}(\xi) J_{2k}(\xi) d\xi + \\ &+ \sum_{k=0}^\infty q_{2k+1} \int_0^\infty \left[\frac{\Phi_3(\xi)}{D(\xi)} \xi - \frac{A_{12}}{\xi} \right] \times \\ &\quad \times J_{2n}(\xi) J_{2k+1}(\xi) d\xi = 0, \quad n = 1, 2, \dots; \\ \frac{2(-1)^n}{\pi} A_{21} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k t_{2k}}{(2k)^2 - (2n+1)^2} &- \sum_{k=0}^\infty t_{2k} \times \\ \times \int_0^\infty \left[\frac{\Phi_2(\xi)}{D(\xi)} \xi - \frac{A_{21}}{\xi} \right] &J_{2n+1}(\xi) J_{2k}(\xi) d\xi + \\ &+ q_{2n+1} \frac{A_{22} \beta_3^2}{2(2n+1)} + \sum_{k=0}^\infty q_{2k+1} \frac{\beta_3^2}{2} \times \\ \times \int_0^\infty \left[\frac{\Phi_1(\xi)}{D(\xi)} - \frac{A_{22}}{\xi} \right] &J_{2n+1}(\xi) J_{2k+1}(\xi) d\xi = \\ &= -\frac{1}{2} \delta_{n,0} g_2, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (45)$$

При этом подинтегральные функции в квадратных скобках в (45) убывают при $\xi \rightarrow +\infty$ как ξ^{-3} и интегралы являются быстро сходящимися.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И АНАЛИЗ

Рассмотрим численные результаты, полученные для следующих параметров материала полуплоскости (водонасыщенного грунта [5]): упругие постоянные минерального скелета $\lambda = 1.73 \cdot 10^7$ Па, $\mu = 1.15 \cdot 10^7$ Па ($\nu = 0.3$); параметр вязкости минерального скелета грунта $\gamma = 0.2$; пористость $m = 0.35$; $K_r = 10^{11}$ Па; плотность скелета грунта $\rho_s = 2700$ кг/м³; плотность поровой жидкости $\rho_f = 1000$ кг/м³; модуль объемной сжимаемости жидкости $K_0 = 2 \cdot 10^9$ Па; динамический коэффициент вязкости жидкости $\theta_0 = 10^{-3}$ кг/(мс); коэффициент динамической связи фаз $\rho_{12} = -150$ кг/м³.

Проницаемость задается величиной коэффициента фильтрации k_f , уменьшение которого приводит к увеличению диссипации. При $k_f \rightarrow \infty$ среда ведет себя как однофазная вязкоупругая.

Для полосового штампа при расчетах принимается $a = 40$ м, $h = \bar{h}/a = 1.0$, плотность материала $\rho = 2400$ кг/м³. Безразмерные параметры при этих данных принимают значения $m_0 = 0.821$; $n_0 = 0.6$; $j_0 = 0.685$. Удержание достаточного числа членов ряда для представления контактных напряжений обеспечивается результатом численного эксперимента (практически достаточно 3 члена ряда). В статическое решение для жесткого штам-

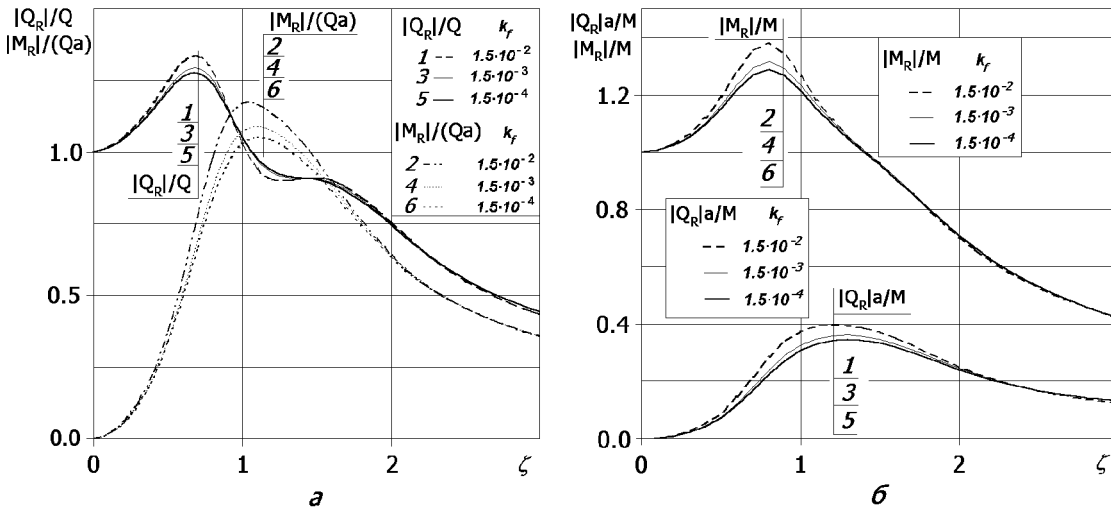


Рис. 2. Сравнение амплитуд реакции а) $|Q_R|/Q$ и $|M_R|/(Qa)$ для горизонтальной силовой нагрузки и б) $|M_R|/M$ и $|Q_R|a/M$ для моментной нагрузки при различной проницаемости материала полуплоскости.

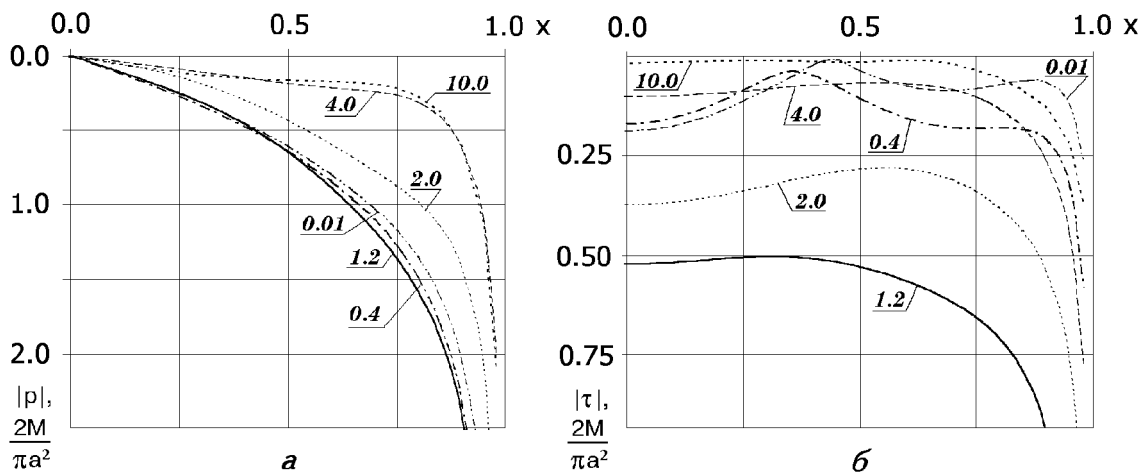


Рис. 3. Амплитуды нормальных (а) и касательных (б) напряжений при действии момента.

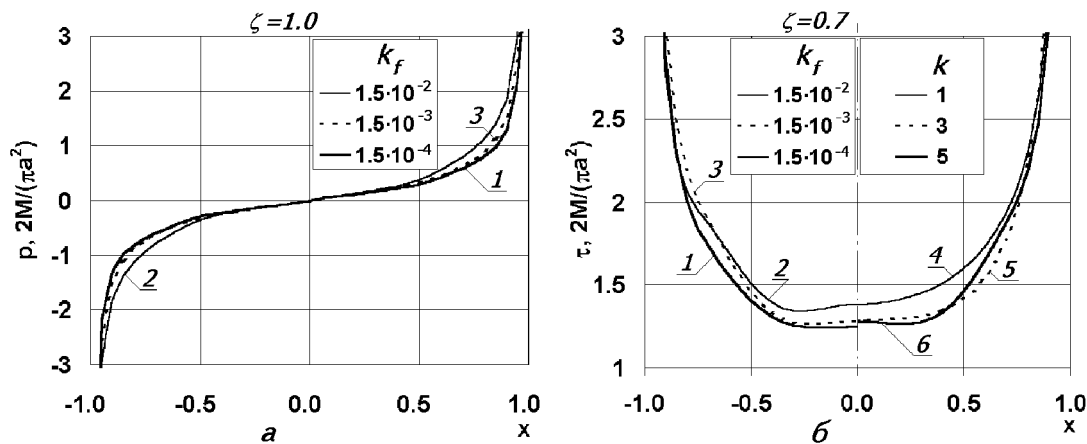
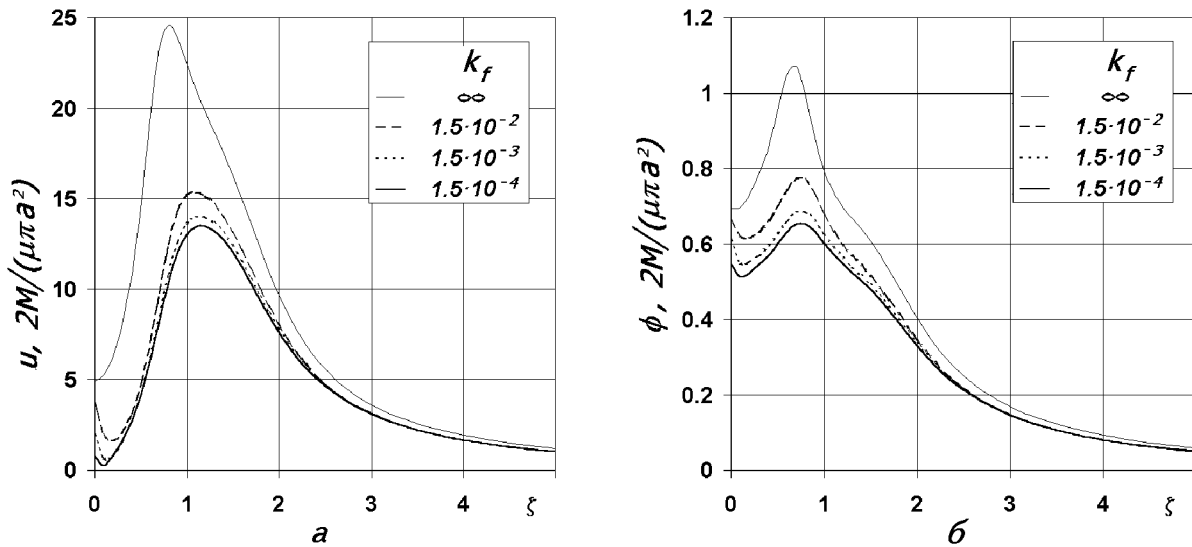


Рис. 4. Эпюры нормальных (а, $\zeta = 1.0$) и касательных (б, $\zeta = 0.7$) контактных напряжений при различной проницаемости грунта (нагрузка $M \cos(\zeta t)$, $\zeta t = 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$).

Рис. 5. Перемещения штампа u (а) и его угол поворота ϕ (б) при действии момента $M e^{i\zeta t}$

па входит только первый член ряда, для динамики необходимо уточнить ординаты эпюр контактных напряжений за счет дополнительных слагаемых, для каждого из которых интеграл по области контакта тождественно равен нулю.

При расчете на действие горизонтальной силы в векторе правой части системы (41) $g_1 = 1.0 + hn_0$, $g_2 = -h$. На рис. 2, а приводится сравнение амплитуд реакции твердой фазы на движение штампа $|Q_R|/Q$ и $|M_R|/(Qa)$ для значений коэффициента фильтрации $k_f = 1.5 \cdot 10^{-2}$ м/с ($b = 8 \cdot 10^5$ Нс/м⁴, сильнопроницаемый грунт), $k_f = 1.5 \cdot 10^{-4}$ м/с ($b = 8 \cdot 10^7$ Нс/м⁴, слабопроницаемый грунт), $k_f = 1.5 \cdot 10^{-3}$ м/с ($b = 8 \cdot 10^6$ Нс/м⁴). Для слабопроницаемого грунта (кривые 5, б) реакция ниже, чем для грунта с высокой проницаемостью (кривые 1, 2) вследствие влияния диссипации в двухфазной среде.

Для частот выше резонансной зоны (при $\zeta > 2.0$) величины реакции для рассмотренных вариантов совпадают. Наблюдается уменьшение амплитуды реакции при понижении величины k_f , а для равнодействующей нормальных контактных напряжений – увеличение частоты, на которой достигается максимум.

Рассчитаны колебания системы под действием момента. В векторе правой части системы (41) $g_1 = -n_0$, $g_2 = 1.0$. Равнодействующая реакции двухфазной среды при различной проницаемости изменяется с частотой, как показано на графиках рис. 2, б. Влияние диссипации сказывается, как и для горизонтальной силы, при $\zeta < 2.0$. Уменьшение k_f сопровождается снижением реак-

ции и, для амплитуды нормальной реакции, сдвигом вправо максимума резонансной кривой.

Амплитуды нормальных напряжений при различных частотах приведены на рис. 3, а, амплитуды касательных напряжений – на рис. 3, б. Максимальные значения ординат соответствуют частотам в дорезонансной и резонансной областях. Дальнейшее увеличение частоты приводит к снижению нормальных контактных напряжений.

Рассмотрим результат действия нагрузки $M \cos(\zeta t)$. Нормальные напряжения, найденные для $\zeta t = 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ($\zeta = 1.0$), несколько изменяются в зависимости от проницаемости, как показано на графиках рис. 4, а. Эпюры касательных напряжений при той же фазе колебаний для $\zeta = 0.7$ приводятся на рис. 4, б, где на правой половине диаграммы ($x > 0$) кривая 4 соответствует $k_f = 1.5 \cdot 10^{-2}$ м/с, эпюра 5 – $k_f = 1.5 \cdot 10^{-3}$ м/с, эпюра 6 – $k_f = 1.5 \cdot 10^{-4}$ м/с. Для построения кривых на левой половине диаграммы ($x < 0$) при $k_f = 1.5 \cdot 10^{-3}$ взяты: 1 – 1 член ряда ($k = 1$), 2 – 3 члена ряда, 3 – 5 членов ряда. Таким образом, кривые 3 и 6 на рис. 4, б совпадают. Отметим уточнение величины контактных напряжений для трех членов ряда по отношению к $k = 1$ и незначительное дополнительное уточнение при $k = 5$.

При действии момента перемещения u и угол поворота ϕ изменяются с частотой, как показано на рис. 5. Учет взаимодействия фаз приводит здесь к заметному уменьшению смещений в области частот $0 < \zeta < 3$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана и использована для расчетов методика решения динамической контактной задачи для связанных горизонтально-вращательных установившихся колебаний жесткого штампа на вязкопористоупругой насыщенной жидкостью полуплоскости. Для рассмотренной системы фундамент-водонасыщенный грунт изучено влияние коэффициента фильтрации. Учет диссипации (с уменьшением величины коэффициента фильтрации) увеличивает амплитуды перемещений, амплитуды равнодействующих контактных напряжений и незначительно влияет на распределение контактных напряжений. Для расчетных параметров системы отмечается влияние проницаемости в диапазоне изменения безразмерной частоты $0 < \zeta < 2$.

1. Сеймов В. М. Динамические контактные задачи. – Киев: Наук. думка, 1976. – 284 с.
2. Сеймов В. М., Островерх Б. Н., Ермоленко А. И. Динамика и сейсмостойкость гидротехнических сооружений. – Киев: Наук. думка, 1983. – 318 с.
3. Трофимчук А. Н. Распределение напряжений по контакту некоторых конструкций с упругой полуплоскостью // Физико-химическая механика материалов. – 1982. – N 4. – С. 110–111.
4. Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Колебания и волны в слоистых средах. – Киев: Наук. думка, 1990. – 224 с.
5. Ю. И. Немчинов Ю. И., Марьенков Н. Г., Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Учет водонасыщения грунтового основания при сейсмических колебаниях сооружения // Сейсмостойкое строительство. – 1998. – N 4. – С. 18–22.
6. Гомилко А. М., Трофимчук А. Н. Асимптотическое решение контактной гармонической задачи для непроницаемого штампа на пористо-упругом основании // Акустичний вісник. – 1998. – Т. 1, N 3. – С. 30–37.
7. Мишель А. Г., Шульман С. Г. Колебания штампа на двухфазном основании // Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева: Сборник научных трудов. – 1983. – Т. 166. – С. 39–41.
8. Halpern M. R., Christiano P. Steady-state harmonic response of a rigid plate-bearing on a liquid-saturated poroelastic half-space // Earthquake Eng. and Struct. Dyn. – 1986. – 14, N 3. – P. 439–454.
9. Карасудхи, Кир, Ли Колебания тела, лежащего на упругой полуплоскости // Тр. Амер. Общ. Инж.-мех. ПМ. – 1968. – 35, N 4. – С. 80–89.
10. de Boer R. Highlits in the historical development of the porous media theory: Toward a consistent macroscopic theory // Appl. Mech. Rev. ASME. – Vol. 49, no 4. – 1996. – P. 201–262.
11. Ляховицкий Ф. М. Сейсмические волны в гетерогенных средах. – М.: Междувед. геофиз. комитет при Президиуме АН СССР, 1988. – 162 с.
12. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
13. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 752 с.