

УДК 532.59

ГЕНЕРАЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ДВУМЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ЗАГЛУБЛЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

И. Т. СЕЛЕЗОВ, М. В. МИРОНЧУК

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 11.01.2000*

Исследуется генерация поверхностных волн, вызванных набеганием однородного потока на систему из двух источников, заглубленных в жидкости конечной глубины. Трехмерная задача в линейной постановке решается с помощью метода мультипольных разложений. Получены точные решения в интегральной форме для потенциала скоростей и отклонения свободной поверхности. С помощью численной процедуры на основе метода Симпсона сделаны расчеты для отклонения свободной поверхности. Исследуется зависимость формы отклонения свободной поверхности от числа Фруда и расстояния между источниками.

Досліджується генерація поверхневих хвиль, викликаних набіганням однорідного потоку на систему з двох витоків, занурених в рідину скінченної глибини. Тривимірна задача в лінійній постановці розв'язується за допомогою методу мультипольних розкладів. Отримано точні розв'язки в інтегральній формі для потенціалу швидкостей та відхилення вільної поверхні. За допомогою чисельної процедури на основі методу Сімпсона зроблено розрахунки для відхилення вільної поверхні. Досліджується залежність форми відхилення вільної поверхні від числа Фруда та відстані між витокими.

The surface wave generation due to the running-up of the homogeneous flow on the two sources submerged in the fluid of the finite depth is investigated. The 3D linear problem by the method of the multipole expansions is solved. The exact solutions in the integral form for the velocity potential and the free surface elevation are obtained. The numerical calculations for the free surface elevation on the basis of the Simpson method are carried out. The dependence of the free surface form from the Froude number and the distance between the sources is investigated.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема генерации поверхностных и внутренних волн в жидкости локальными и нелокальными неоднородностями представляет большой научный интерес и является предметом исследований многих ученых. Особый интерес представляет исследование движения источников как в полубесконечной жидкости, так и в жидкости конечной глубины. Систематизированно изложена задача о пульсирующем источнике в работе [1]. Исследовано движение источника в одномерном, двумерном и трехмерном случаях в работе [2]. В работе [3] рассмотрена плоская задача о волновом следе за дублетом в однородном потоке. Движение источников довольно полно представлено и в современных работах. В работе [4] построена равномерная асимптотика дальнего поля внутренних волн при движении точечного источника в стратифицированной жидкости. В работе [5] рассматривается задача для источника, расположенного на поверхности раздела двух жидкостей.

Известно также много работ, в которых описано взаимодействие одного или нескольких тел под водой. В работе [6] рассмотрено изменение волнового сопротивления и гидродинамических нагрузок

при движении двух сфер под водой в идеальном потоке в зависимости от расстояний между сферами. В работе [7] на основе метода мультипольных разложений исследованы силы взаимодействия для группы погруженных сфер, движущихся в потенциальном потоке, в зависимости от числа Фруда и расстояния между сферами. В работе [8] в трехмерной линейной постановке изучено взаимодействие двух плавающих тел в жидкости конечной глубины в поле гармонических волн. В работах [9–11] получены аналитические решения для различных погруженных тел.

Однако при исследовании взаимодействия нескольких тел в указанных выше работах внимание акцентировалось на анализе волнового сопротивления и волновых гидродинамических нагрузок, и не проводился анализ изменения формы свободной поверхности.

В данной работе исследуется задача генерации волн на свободной поверхности от двух заглубленных источников, обтекаемых однородным потоком в жидкости конечной глубины. Исследуется форма свободной поверхности в зависимости от числа Фруда и расстояния между источниками. Показано сильное влияние этих параметров на изменение формы свободной поверхности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается трехмерная задача о генерации поверхностных гравитационных волн набегающим однородным потоком со скоростью U на систему из двух источников, расположенных на расстоянии l друг от друга в жидкости конечной глубины (рис. 1). Жидкость предполагается невязкой, несжимаемой, движения – потенциальными. Для каждого из источников вводится своя декартова система координат: для первого источника – $O_1X_1Y_1Z_1$ с началом координат в точке $(0, 0, 0)$ на невозмущенной свободной поверхности, для второго – $O_2X_2Y_2Z_2$ с началом координат в точке $(l, 0, 0)$. Координатные оси $O_iZ_i, i = 1, 2$ направлены вертикально вверх, положительное направление осей O_iX_i совпадает с направлением скорости U (см. рис. 1).

Для описания волновых движений, порождаемых каждым из источников, вводятся потенциалы скоростей $\Phi_i(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2$

$$\Phi_i(x_i, y_i, z_i) = -Ux_i + \varphi_i(x_i, y_i, z_i). \quad (1)$$

Математическая постановка задачи для потенциалов $\varphi_i(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2$ включает уравнения Лапласа в области Ω и линеаризованные граничные условия на свободной поверхности $z = 0$ и на дне $z_i = -d$:

$$\varphi_{i,x_ix_i} + \varphi_{i,y_iy_i} + \varphi_{i,z_iz_i} = 0 \quad \text{в } \Omega_i, \quad (2)$$

$$\frac{g}{U^2}\varphi_{i,z_i} + \varphi_{i,x_ix_i} = 0 \quad \text{на } z = 0, \quad (3)$$

$$\varphi_{i,z_i} = 0 \quad \text{на } z_i = -d, \quad (4)$$

где $\Omega_i = [(x_i, y_i, z_i) \in R^3 : (x_i, y_i) \in (-\infty, \infty), z_i \in (-d, 0)]$.

Отклонение свободной поверхности определяется по формуле

$$\eta_i(x_i, y_i) = -\frac{U}{g}\varphi_{i,x_i}|_{x_i=0}. \quad (5)$$

Безразмерные величины вводятся по формулам

$$(x_i^*, y_i^*, z_i^*, d^*, h^*, l^*) = (x_i, y_i, z_i, d, h, l)/h,$$

$$\eta_i^* = \eta_i/h, U^* = U/\sqrt{gh} = Fr, \quad (6)$$

$$\varphi_i^* = \varphi_i/h\sqrt{gh}, \quad q_i^* = q_i/h^2\sqrt{gh}, \quad i = 1, 2,$$

где Fr – число Фруда; h – глубина погружения источника; d – глубина жидкости; l – расстояние между источниками; q_i – мощности источников; g – гравитационная постоянная.

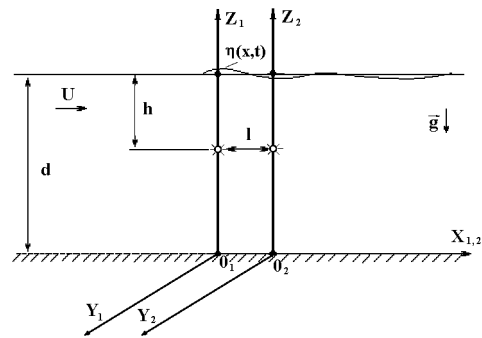


Рис. 1. Генерация волн двумя погруженными источниками

Постановка задачи в безразмерных переменных имеет вид

$$\varphi_{i,x_ix_i} + \varphi_{i,y_iy_i} + \varphi_{i,z_iz_i} = 0 \quad \text{в } \Omega_i, \quad (7)$$

$$\frac{1}{Fr^2}\varphi_{i,z_i} + \varphi_{i,x_ix_i} = 0 \quad \text{на } z_i = 0, \quad (8)$$

$$\varphi_{i,z_i} = 0 \quad \text{на } z_i = -d. \quad (9)$$

Для отклонения свободной поверхности получим соотношение

$$\eta_i(x_i, y_i) = -Fr\varphi_{i,x_i}|_{x_i=0}. \quad (10)$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для решения задачи применяется метод мультипольных разложений [12–14]. Для каждого из источников вводится сферическая система координат (r_i, θ_i, β_i) , начало которой находится в точке $(0, 0, -h)$, т.е. в точке, где находится источник. Связь между сферической и прямоугольной декартовой системой координат задается формулами

$$x_i = r_i \cos \theta_i \cos \beta_i, y_i = r_i \sin \theta_i \sin \beta_i,$$

$$z_i = r_i \cos \theta_i - h. \quad (11)$$

Согласно [12], потенциалы скоростей $\phi_i(x_i, y_i, z_i)$ задаются в виде мультипольного разложения

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_i, y_i, z_i) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{i,n}^m \left[\frac{(-1)^{n+1}}{r_i^{n+1}} P_n^m(\cos \theta_i) \cos m\beta_i + \right. \\ & \left. + \frac{(-1)^{m+n}}{r_{i,1}^{n+1}} P_n^m(\cos \theta_{i,1}) \cos m\beta_{i,1} + \right] \quad (12) \end{aligned}$$

$$+ F_{i,n}^m(r_i, \theta_i, \beta_i)],$$

где $(r_{i,1}, \theta_{i,1}, \beta_{i,1})$ - сферическая система координат с началом в точке $(0, 0, -2d + h)$ соответствующей прямоугольной декартовой системы; $P_n^m(\cos \theta_i)$ - присоединенные функции Лежандра, которые определяются с помощью полиномов Лежандра.

Первый член в разложении (12) отображает движение каждого из источников в невозмущенной жидкости, второй и третий член вводятся для того, чтобы удовлетворить условиям на свободной поверхности и на дне жидкости.

С помощью интегральных представлений для присоединенных функций Лежандра при θ_i зададим первый, второй и третий члены (12) в виде [13]

$$\begin{aligned} & \frac{P_n^m(\cos(\theta_i))}{r_i^{n+1}} \cos(m\beta_i) = \\ & = \frac{i^m}{2\pi(n-m)!} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi k^n \cos(m\gamma) \cdot F d\gamma dk, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$F = \exp((-k(z_i + h) + ikx_i \cos(\gamma) +iky_i \sin(\gamma))),$$

$$\begin{aligned} & \frac{P_n^m(\cos(\theta_i))}{r_{i,1}^{n+1}} \cos(m\beta_{i,1}) = \\ & = \frac{i^m}{2\pi(n-m)!} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi k^n \cos(m\gamma) \cdot G d\gamma dk, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$G = \exp((k(-z_i - 2d + h) + ikx_i \cos(\gamma) +iky_i \sin(\gamma))),$$

$$\begin{aligned} F_{i,n}^m &= \frac{(-1)^{n+1} i^m}{2\pi(n-m)!} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi A_i(k, \gamma) \cos(m\gamma) \times \\ & \times \operatorname{ch}(z_i + d) \cdot E d\gamma dk, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$E = \exp((ikx_i \cos(\gamma) +iky_i \sin(\gamma))).$$

Подставляя выражения (13) - (15) в граничные условия на дне и свободной поверхности, приравняем нулю подынтегральные выражения и получаем выражения для потенциалов $\varphi_i(x_i, y_i, z_i)$:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_i, y_i, z_i) &= \\ &= \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty A_{i,n}^m \left[\frac{(-1)^{n+1}}{r_i^{n+1}} P_n^m(\cos(\theta_i)) \cos(m\beta_i) + \right. \\ & \left. + \frac{(-1)^{m+n}}{r_{i,1}^{n+1}} P_n^m(\cos(\theta_{i,1})) \cos(m\beta_{i,1}) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{(-1)^{n+1} i^m}{2\pi(n-m)!} \int_{-\pi}^\pi \int_L (k^n \cos(m\gamma) \frac{\operatorname{ch}(k(z_i + d))}{\operatorname{ch} kd} \times \\ & \times \frac{e^{-kh} + (-1)^{m+n} e^{-k(2d-h)}}{k - 1/Fr^2 \operatorname{th} kd \sec^2(\gamma)} \times \\ & \times \exp((ikx_i \cos(\gamma) +iky_i \sin(\gamma))) dk d\gamma], \end{aligned} \quad (16)$$

где L - путь интегрирования, интеграл берется в смысле главного значения, поэтому L - это путь интегрирования от 0 до ∞ , исключая нули знаменателя.

Для случая движения источника $n = m = 0$, $A_{i,0}^0 = q_i$ [15]. Кроме того,

$$P_0^0(\cos \theta_{i,1}) = P_0^0(\cos \theta_i) = 1. \quad (17)$$

Отсюда получим окончательное выражение для каждого из потенциалов

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_i, y_i, z_i) &= q_i \left(\frac{-1}{r_i} + \frac{1}{r_{i,1}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \int_L \left(\frac{\operatorname{ch}(k(z_i + d))}{\operatorname{ch} kd} \times \right. \right. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\left. \times D \exp((ikx_i \cos(\gamma) +iky_i \sin(\gamma))) dk d\gamma \right),$$

где

$$D = \frac{(e^{-kh} + e^{-k(2d-h)})(k + 1/Fr^2 \sec^2(\gamma))}{k - 1/Fr^2 \operatorname{th} kd \sec^2(\gamma)}.$$

Учитывая формулу (10) и переходя в единую прямоугольную декартову систему координат, получаем выражение для отклонения свободной поверхности как суперпозицию решений для каждого из источников:

$$\eta = Re(\eta_1) + Re(\eta_2), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} Re(\eta_1(x, y)) &= -Fr [q_1 \left(-\frac{2x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + h^2)^3}} + \right. \\ & \left. + \frac{2x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + (-2d + h)^2)^3}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \int_0^\infty D \cdot k \cos \gamma \sin(kx \cos(\gamma) + ky \sin(\gamma)) dk d\gamma \right)], \\ Re(\eta_2(x, y)) &= -Fr [q_2 \left(-\frac{2(x-l)}{\sqrt{((x-l)^2 + y^2 + h^2)^3}} + \right. \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2(x-l)}{\sqrt{((x-l)^2 + y^2 + (-2d+h)^2)^3}} + \quad (21) \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} D \cdot k \cos \gamma \sin(k(x-l) \cos(\gamma) + \\
 & \quad + ky \sin(\gamma)) dk d\gamma].
 \end{aligned}$$

3. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В формулах (20), (21) несобственные интегралы вычисляются в смысле главного значения, при этом путь интегрирования L исключает нули знаменателя. Вычисления проводились с помощью численной процедуры на основе схемы Симпсона. Программа написана в прикладном пакете Maple V Release 4.0. Были построены графики отклонения свободной поверхности и исследована зависимость формы свободной поверхности от числа Фруда Fr и расстояния между источниками l . По осям OX, OY проводилось нормирование с помощью формул $X = x \cdot Fr^2, Y = y \cdot Fr^2$.

Анализ осуществлялся при следующих значениях параметров: $Fr \in [0.4, 0.6], q_1 = q_2 = [0.01, 0.02], h = 1, d = 2, l \in [0, 20 \cdot Fr^2]$.

На основе численных расчетов исследовалась зависимость положений экстремумов отклонения свободной поверхности от расстояния между источниками для каждого из исследуемых чисел Фруда.

Для $Fr = 0.45$ при увеличении расстояния между источниками от $l = 0$ до $l = 20 \cdot Fr^2$ положение максимального отклонения свободной поверхности смещается в положительном направлении оси OX , находясь при этом за системой из двух источников. При $l \in [1 \cdot Fr^2, 20 \cdot Fr^2]$ максимальное отклонение свободной поверхности достигается между двумя источниками. При $l \in [1 \cdot Fr^2, 2 \cdot Fr^2]$ максимум отклонения свободной поверхности расположен ближе к первому источнику, при дальнейшем увеличении расстояния между источниками l величина η_{max} приближается ко второму источнику. Наибольшее значение η_{max} достигается при $l = 5 \cdot Fr^2$, в дальнейшем при увеличении расстояния l оно убывает.

При $Fr = 0.5$ свободная поверхность имеет, кроме η_{max} , ярко выраженный η_{min} , почти равный по абсолютной величине η_{max} , при этом минимальное отклонение свободной поверхности всегда достигается за η_{max} на расстоянии порядка $2h$. При увеличении l от 0 до $2 \cdot Fr^2$ экстремумы смещаются в положительном направлении оси OX , находясь за системой двух источников. При $l \in [5 \cdot Fr^2, 20 \cdot Fr^2]$ величина η_{max} находится между источниками, при

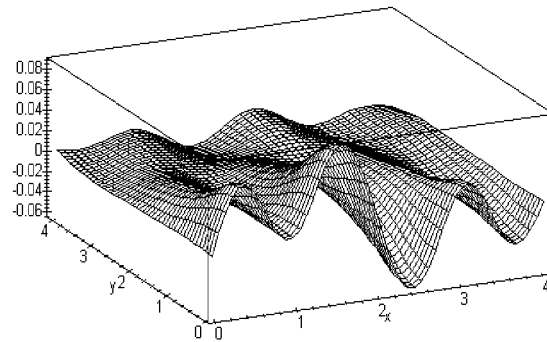


Рис. 2. Отклонение свободной поверхности при $Fr = 0.45, l = 2$.

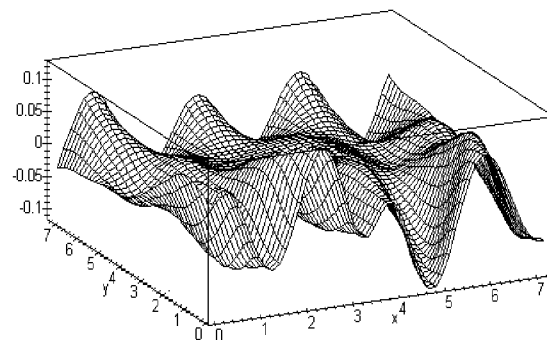


Рис. 3. Отклонение свободной поверхности при $Fr = 0.6, l = 2$.

$l \in [5 \cdot Fr^2, 10 \cdot Fr^2]$ – ближе к первому источнику, при $l \in [15 \cdot Fr^2, 20 \cdot Fr^2]$ – ближе ко второму источнику. Наибольшее значение η_{max} достигается при $l = 10 \cdot Fr^2$.

При $Fr = 0.6$ наблюдается аналогичный процесс: при $l \in [0, 2 \cdot Fr^2]$ η_{max} смещается в положительном направлении оси OX , находясь за системой из двух источников. При $l = 2 \cdot Fr^2$ $\eta_{min} > \eta_{max}$, как минимум, так и максимум достигаются за системой из двух источников, при этом величина η_{max} находится за η_{min} . При $l \in [5 \cdot Fr^2, 20 \cdot Fr^2]$ η_{max} находится между двумя источниками, при $l \in [5 \cdot Fr^2, 10 \cdot Fr^2]$ – ближе к первому источнику, при дальнейшем увеличении расстояния между

источниками экстремум смещается ближе ко второму источнику. Наибольшее значение η_{max} достигается при $l = 5 \cdot Fr^2$, при дальнейшем возрастании расстояния l оно убывает.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ зависимости положения экстремумов отклонения свободной поверхности показал, что для каждого из чисел Фруда максимальное отклонение свободной поверхности η_{max} достигается или между двумя источниками, или за системой двух источников, в зависимости от расстояния между ними. Из анализа был установлен следующий режим изменения положения величины η_{max} для каждого из чисел Фруда: сначала η_{max} достигается за системой из двух источников, при дальнейшем увеличении расстояния между источниками η_{max} достигается между источниками, сначала – ближе к первому, при увеличении расстояния экстремум смещается ближе ко второму источнику. Кроме того, для каждого из исследуемых чисел Фруда существует некоторое критическое расстояние между источниками, для которого достигается наибольшее значение η_{max} .

1. Стокер Дж. Дж. Волны на воде /Пер. с англ.– М: Издатлитинт, 1959.– 618 с.
2. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях /Пер. с англ.– М: Мир, 1981.– 598 с.
3. Havelock T. H. The wave pattern of a doublet in a stream // Proc. Roy. Soc. Lond.– 1928.– A.121.– P. 515-523.
4. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Равномерная асимптотика внутренних гравитационных волн при движении источника в слое стратифицированной жидкости с плавно меняющимся дном // Изв. РАН. Мех. жидкости и газа.– 1998.– N 3.– С. 11-12.
5. Selezov I. T., Hug P. Interfacial solitary waves in a three-fluid medium with a source // Abstr. Pap. 2-nd European Fluid Mechanics Conference.– 1994.– Warsaw.– P. 250.
6. Bentwith M., Miloh T. On the exact solution for two-sphere problem in axisymmetrical potential flow // ASME.– 1978.– 45,N3.– P. 463-468.
7. Wu G. X. Wavemaking resistance of a group of a submerged spheres // Journ. of Ship Research.– 1996.– 40,N1.– P. 1-10.
8. Xie Nan, Gao Huangin Numerical calculation of hydrodynamic interaction of two bodies floating in waves // Journ. of Ship Mechanics.– 1999.– 40,N2.– P. 7-14.
9. Havelock T. H. Collected papers.– ONR/ACR-103, U.S. Printing Office: Wachington, 1963.– 242 p.
10. Farrell C. On the wave resistance of a submerged spheroid // Journ. of Ship Research.– 1973.– 17.– P. 1-11.
11. Wu G. X., Eatock Taylor R. Radiation and diffraction of water waves by a submerged sphere at forward speed // Proc. of Royal Society of London.– 1988.– A417.– P. 433-461.
12. Wu G. X. Radiation and diffraction by a submerged sphere advancing in water waves of finite depth // Proc. Roy. Soc. Lond.– 1995.– ser. A, 448.– P. 29-54.
13. Морс Ф. Н., Фешбах Г. Методы теоретической физики /В 2-х т.– М: Издательство иностр, лит., 1958.– с.
14. Thorne R. C. Multipole expansions in the theory of surface waves // Proc. Cam. Phil. Soc. Lond.– 1965.– ser. A, 334.– P. 213-225.
15. Джексон Дж. Классическая электродинамика.– М: Мир, 1965.– с.