

УДК 532.5

РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛОВ СТОКСА – ЖУКОВСКОГО В ДИНАМИКЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Г. Ф. ЗОЛОТЕНКО

Институт математики НАН Украины, Киев

Получено 23.09.99

Исследуются вопросы нелинейной динамики жидких грузов подвижных транспортных средств (наливных судов, летательных аппаратов и др.). Изучается наиболее общий случай, когда несущий жидкость объект совершает произвольные поступательные и угловые движения, а заполненная жидкостью полость имеет произвольную форму. Рассмотрение проводится в рамках модели идеальной несжимаемой однородной жидкости, имеющей свободную поверхность и совершающей абсолютное безвихревое движение в однородном поле сил тяжести. Основное внимание уделено возникающей здесь краевой задаче определения потенциалов Стокса-Жуковского при нелинейных волновых движениях у свободной поверхности жидкости. Предложен подход к её решению в самой общей постановке. Построены потенциалы Стокса-Жуковского в конкретном практически важном случае прямоугольного бака с крышкой.

Досліджуються питання нелінійної динаміки рідинних вантажів рухомих транспортних засобів (наливних суден, літальних апаратів та ін.). Вивчається найбільш загальний випадок, коли об'єкт, що несе рідину, здійснює довільні поступальні та кутові рухи, а заповнена рідиною порожнина має довільну форму. Розгляд проводиться у рамках моделі ідеальної нестисливої однорідної рідини, що має вільну поверхню та здійснює абсолютний невихровий рух в однорідному полі сил тяжіння. Головна увага приділяється задачі, яка тут постає, про визначення потенціалів Стокса-Жуковського за умов нелінійних хвильових рухів вільної поверхні рідини. Запропоновано підхід до її розв'язання у найбільш загальній постановці. Побудовано потенціали Стокса-Жуковського у конкретному практично важливому випадку прямокутного бака із кришкою.

Problems of nonlinear dynamics of liquid loads transported by some objects (vessels, aircraft, etc.) are investigated. It is studied the most general case when transporting object is in arbitrary translational and angular motion and its cavity filled by liquid has an arbitrary shape. Consideration is carried out for the perfect incompressible homogeneous fluid under assumption that liquid load has free surface and is in irrotational absolute motion in the homogenous gravity field. The main attention is giving to the boundary problem of determination of Stokes-Zhukovsky potentials when free surface of liquid is in nonlinear wave motion. It is suggested the approach to its solving in the most general formulation. Stokes-Zhukovsky potentials are constructed in the concrete practically important case of rectangular tank with the lid.

ВВЕДЕНИЕ

Разработка и проектирование современных транспортных средств, перевозящих жидкие грузы (наливных судов, летательных аппаратов, железнодорожных цистерн и др.), связаны с решением различного рода задач динамики относительного движения жидкости. Среди них особое место занимают случаи, когда приходится учитывать, помимо поступательных, угловые движения несущих жидкость объектов. В первую очередь сюда относятся задачи, связанные с динамикой танкеров и других наливных судов, хотя те или иные угловые движения совершают практически все подвижные транспортные средства. Простые наблюдения и специально поставленные эксперименты показывают, что даже незначительные по амплитуде угловые колебания носителя могут приводить к интенсивным нелинейным колебаниям свободной поверхности жидкости. Эти процессы, в свою очередь, могут вызывать недопустимо большие гидродинамические нагрузки на конструктивные элементы несущих объектов и суще-

ственные изменения в распределении масс системы тело – жидкость (в частности, координат центра масс), нарушающие устойчивость движения несущих объектов.

Колебания жидкости в условиях угловых движений её носителя характеризуются, как известно, потенциалами Стокса – Жуковского. Общая задача по их определению подробно освещена в [1], где также намечены пути её решения вариационным методом и построено приближенное решение в конкретном случае открытого кольцевого цилиндрического бака с плоским дном. Из более ранних исследований сюда относятся фундаментальная работа Н.Е.Жуковского [2] (случай целиком заполненного сосуда) и статья Г.С.Нариманова [3], где, по-видимому, впервые введены потенциалы Стокса-Жуковского в случае частичного заполнения сосуда. В [4] эти потенциалы применялись при выводе линеаризованных уравнений движения системы самолет – жидкость, а задача по их определению сформулирована для фиксированной области под "отвердевшей" свободной поверхностью жидкости. Позже в [5] была предложена схе-

ма решения последней задачи вариационным методом Ритца (см. также [6]). Потенциалы Стокса–Жуковского рассматривались и в работах [7, 8], но там вопросы их определения в общем случае изменяющихся жидких областей со свободными границами не исследовались. Анализ результатов перечисленных публикаций приводит к выводу, что задача Стокса–Жуковского в общем случае до конца не решена ввиду значительных математических трудностей. Проблемы разрешимости, с одной стороны, и чрезмерная громоздкость приближенных решений даже в сравнительно простых случаях, с другой, побуждают искать иные подходы к её решению, чему и посвящена настоящая статья.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается бак произвольной формы, частично заполненный идеальной однородной несжимаемой жидкостью плотности ρ . С баком жестко связана правая декартова система координат $Oxyz$, начало O которой располагается в произвольной точке (односвязной) полости бака. Бак совершает произвольное движение в поле силы тяжести относительно неподвижной системы координат $O^*\xi\eta\zeta$. Вектор $g \in R^3$ (R^3 – трехмерное евклидово пространство) ускорения силы тяжести направлен в отрицательную сторону оси $O^*\zeta$. Движение сосуда задается вектором $v_0(t) \in R^3$ абсолютной скорости точки O и вектором $\omega(t) \in R^3$ его угловой скорости (t – время). Вектор-функции $v_0(t)$ и $\omega(t)$ считаются заданными на конечном отрезке времени $[t_0, t_1]$, а их компоненты $v_{0x}(t), v_{0y}(t), v_{0z}(t)$ и $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$ в подвижной системе координат $Oxyz$ – непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми на $[t_0, t_1]$ функциями. Движение жидкости относительно неподвижной системы координат $O^*\xi\eta\zeta$ (коротко, абсолютное движение) полагается безвихревым. Соответствующая начально-краевая задача имеет вид [9]

$$\Delta\Phi(r, t) = 0 \quad \text{в } \Omega(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = (v_0 + \omega \times r) \cdot \nu \quad \text{на } S(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = (v_0 + \omega \times r) \cdot \nu - \frac{f_t}{\sqrt{(\nabla f)^2}} \quad \text{на } \Sigma(t), \quad (3)$$

$$P(r, t) = p_0 \quad \text{на } \Sigma(t), \quad (4)$$

$$\Phi(r, t_0) = \Phi_0(r), \quad f(x, y, z, t_0) = f_0(x, y, z), \quad (5)$$

$$(\Delta\Phi_0 = 0 \quad \text{в } \Omega(t_0)).$$

Здесь $\Phi(r, t)$ – потенциал абсолютной скорости жидкости, взятой в системе координат $Oxyz$; $r =$

(x, y, z) – радиус-вектор произвольной частицы жидкости относительно начала O подвижной системы координат; $\Omega(t)$ – занятая жидкостью пространственная область в момент t ; ν – орт внешней нормали к границе области $\Omega(t)$; $S(t)$ – поверхность бака, контактирующая с жидкостью; $\Sigma(t)$ – свободная поверхность жидкости; $f(x, y, z, t)$ – функция, задающая поверхность жидкости посредством уравнения

$$f(x, y, z, t) = 0; \quad (6)$$

$P(r, t)$ – гидродинамическое давление в жидкости; $p_0 = const$ – давление на свободной поверхности жидкости; $\Phi_0(r), f_0(x, y, z)$ – значения искомым функций Φ и f в начальный момент времени t_0 . Буквенные индексы обозначают частные производные по соответствующим переменным, знаки \cdot и \times – скалярное и векторное умножение векторов соответственно, операторы Δ и ∇ действуют по переменным x, y, z .

Один из способов решения задачи (1)–(6) использует представление искомого потенциала $\Phi(r, t)$ в виде

$$\Phi(r, t) = v_0(t) \cdot r + \omega(t) \cdot \Theta(r, t) + \varphi(r, t), \quad (7)$$

где $\Theta(r, t)$ – так называемый потенциал (векторный) Стокса–Жуковского; $\varphi(r, t)$ – некоторая новая функция (для краткости, вслед за [7], будем называть её волновым потенциалом).

Смысл замены (7) становится ясным, если подставить это выражение в (1)–(4) и приравнять нулю коэффициенты при $v_0(t)$ и $\omega(t)$ в получающихся уравнениях и краевых условиях. В результате приходим к следующим краевым задачам для потенциалов Стокса–Жуковского и волнового потенциала:

$$\Delta\Theta(r, t) = 0 \quad \text{в } \Omega(t), \quad (8)$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\nu} = r \times \nu \quad \text{на } S(t) + \Sigma(t), \quad (9)$$

(операторы Δ и $\partial/\partial\nu$ применяются к вектору $\Theta(r, t)$ покомпонентно),

$$\Delta\varphi(r, t) = 0 \quad \text{в } \Omega(t), \quad (10)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на } S(t), \quad (11)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = -\frac{f_t}{\sqrt{(\nabla f)^2}} \quad \text{на } \Sigma(t), \quad (12)$$

$$P(r, t, \Theta, \varphi) = p_0 \quad \text{на } \Sigma(t), \quad (13)$$

(здесь $P(r, t, \Theta, \varphi)$ – давление в жидкости, выраженное через $\Theta(r, t)$ и $\varphi(r, t)$). Отсюда видно,

что краевая задача (8),(9) для $\Theta(r, t)$ по форме совпадает с классической задачей Н.Е.Жуковского о движении жидкости, целиком заполняющей подвижный сосуд, а задача (10)–(13) для $\varphi(r, t)$ аналогична задаче о свободных колебаниях жидкости в неподвижном сосуде. Потенциал Стокса–Жуковского $\Theta(r, t)$ обеспечивает выполнение граничного условия на твердой стенке $S(t)$ (буква t отражает изменчивость смоченной части поверхности полости) и частично на свободной поверхности $\Sigma(t)$, а волновой потенциал $\varphi(r, t)$ ”отвечает” за остающуюся часть условия (3). Кроме того, вместе они должны обеспечить выполнение динамического граничного условия (4) на $\Sigma(t)$.

Отличие задачи (8), (9) от задачи Н.Е.Жуковского заключается в зависимости от t области $\Omega(t)$, и это обстоятельство порождает непреодолимые пока математические трудности, поскольку часть $\Sigma(t)$ границы области $\Omega(t)$ также неизвестна. Следует отметить, что и в случае задачи (10)–(13) и соответствующей ей задачи о свободных колебаниях жидкости в неподвижном сосуде можно говорить лишь о некоторой аналогии, но не более, поскольку они совпадают лишь в части уравнения Лапласа и кинематических граничных условий на $S(t)$ и $\Sigma(t)$. Динамические граничные условия для этих задач существенно разнятся, так как (13) зависит от параметров $v_0(t)$ и $\omega(t)$ движения сосуда и, что ещё важнее, от неизвестного потенциала Стокса–Жуковского $\Theta(r, t)$ (в этом можно убедиться, представив известным образом давление через потенциал Лагранжа–Коши).

Таким образом, разложение (7) потенциала $\Phi(r, t)$ сводит общую задачу (1)–(6) к двум другим, но достаточно сложным взаимосвязанным задачам. В частном случае, когда жидкость целиком заполняет сосуд, волновой потенциал $\varphi(r, t)$ можно отбросить в разложении (7), так как он теряет смысл, и остается строго задача Жуковского (8), (9). В другом крайнем случае, т.е. при $v_0(t) = 0$ и $\omega(t) = 0$, исчезают потенциалы Стокса–Жуковского и получается строго задача о свободных колебаниях жидкости, вообще говоря, нелинейная. Промежуточной между этими крайними ситуациями является та, которая соответствует линейным колебаниям жидкости. Тогда область $\Omega(t)$ можно полагать совпадающей с некоторой невозмущенной областью Ω_0 , и система соотношений (8) – (13) распадается на две ”линейно связанные” задачи, из которых одна, а именно задача (8),(9) в фиксированной области Ω_0 , снова превращается в задачу Жуковского и может быть решена независимо от другой задачи для $\varphi(r, t)$ [5 – 7].

Общий (нелинейный) случай достаточно сложен

и потому исследован мало. Идея предварительного определения потенциалов Стокса–Жуковского с последующим использованием их в задаче для волнового потенциала φ развивалась применительно к нелинейному случаю в [1]. Существенным условием при этом являлось требование цилиндричности поверхности бака ”вблизи” свободной поверхности. Однако в ряде практических случаев, например для закрытых призматических баков или тех же цилиндрических баков, но с крышками, это условие заведомо не выполняется, когда свободная поверхность контактирует с крышкой. Цель настоящей работы – разработка метода расчета потенциалов Стокса–Жуковского $\Theta(r, t)$ в представлении (7) для баков любых форм и при любых нелинейных движениях свободной поверхности жидкости.

2. МЕТОД РАСЧЕТА ПОТЕНЦИАЛОВ СТОКСА–ЖУКОВСКОГО

С целью выявления некоторых важных для дальнейшего свойств потенциалов Стокса–Жуковского проанализируем граничное условие (9), переписав его в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \nu} &= r \times \nu \quad \text{на } S(t), \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \nu} &= r \times \nu \quad \text{на } \Sigma(t). \end{aligned} \quad (14)$$

Первое из этих условий является естественным, поскольку порождено физическим условием непротекания жидкости через стенку сосуда, а именно:

$$v_\nu = (v_0 + \omega \times r) \cdot \nu,$$

где v_ν – проекция абсолютной скорости жидкости на нормаль ν к поверхности полости. В противоположность этому, второе из условий (14), определяющее значение нормальной производной от $\Theta(r, t)$ на свободной поверхности $\Sigma(t)$, носит искусственный характер, поскольку вытекает не из физической сущности задачи, а является следствием выполнения математических операций (приравнивания нулю коэффициентов при $v_0(t)$ и $\omega(t)$ после подстановки (7) в (1) – (4)). Эти соображения позволяют отказаться от второго из условий (14) и построить другую логическую схему решения задачи.

Пусть Π обозначает пространственную область, совпадающую с полостью бака, а $\partial\Pi$ – её границу. Очевидно,

$$\Omega(t) \subset \Pi, \quad S(t) \subset \partial\Pi \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (15)$$

т.е. жидкая область $\Omega(t)$ в любой момент времени заключена в области Π , а смоченная часть $S(t)$ стенки бака перемещается по его поверхности $\partial\Pi$. Тогда, расширяя область определения задачи (8), (9), потребуем, чтобы

$$\Delta\Theta(r, t) = 0 \quad \text{в } \Pi, \quad (16)$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\nu} = r \times \nu \quad \text{на } \partial\Pi. \quad (17)$$

Решение задачи (16), (17), обозначаемое в дальнейшем через $B(r, t)$, обладает следующими свойствами, вытекающими из (15) и соотношений (8), (9):

$$B(r, t) = \Theta(r, t), \quad \text{если } r \in \Omega(t), \quad (18)$$

$$\frac{\partial B(r, t)}{\partial\nu} = \frac{\partial\Theta(r, t)}{\partial\nu}, \quad \text{если } r \in S(t). \quad (19)$$

Кроме того, поскольку область Π в подвижной системе координат $Oxyz$ не изменяется, векторы r , ν в (16), (17) не зависят от времени, так что

$$B(r, t) \equiv B(r), \quad (20)$$

т.е. также не зависит от времени. Соотношения (18)–(20) позволяют ввести вместо (7) представление

$$\Phi(r, t) = v_0 \cdot r + \omega(t) \cdot B(r) + \varphi(r, t). \quad (21)$$

Здесь за волновым потенциалом сохранено обозначение $\varphi(r, t)$, хотя он, естественно, отличается от волнового потенциала в (7).

Очевидно, такое представление обеспечивает, как и (7), выполнение граничных условий на твердой стенке $S(t)$, но обладает тем преимуществом, что в нем потенциал Стокса–Жуковского $B(r)$ является решением хорошо изученной задачи Неймана для уравнения Лапласа в фиксированной области и теперь уже при любых (а не только линейных) движениях и конфигурациях жидкой области $\Omega(t)$ может быть найден независимо от волнового потенциала $\varphi(t)$. Существенно также, что для практически важных форм Π задача (16), (17) решена в [2], а в более сложных случаях можно воспользоваться вариационными методами из [1, 5, 6].

Что касается волнового потенциала $\varphi(r, t)$, то для него вместо (10) – (13) получается следующая краевая задача:

$$\Delta\varphi(r, t) = 0 \quad \text{в } \Omega(t), \quad (22)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на } S(t), \quad (23)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = -\frac{f_t}{\sqrt{(\nabla f)^2}} + [\omega \times r - \nabla(\omega \cdot B)] \cdot \nu$$

$$\text{на } \Sigma(t), \quad (24)$$

$$P(r, t, B, \varphi) = p_0, \quad (25)$$

где $P(r, t, B, \varphi)$ – результат подстановки (21) в $P(r, t)$ из (4). Сопоставление (22) – (25) с (10) – (13) показывает, что использование представления (21) вместо (7) приводит лишь к появлению в кинематическом граничном условии на свободной поверхности $\Sigma(t)$ невязки

$$[\omega \times r - \nabla(\omega \cdot B)] \cdot \nu,$$

оставляя неизменными все остальные соотношения. При известном $B(r, t)$ (а это теперь всегда можно предполагать) задачи (10) – (13) и (22) – (25) одинаковы по сложности.

Таким образом, расчет потенциалов Стокса–Жуковского в случае нелинейных колебаний жидкости сводится к: 1) расширению области $\Omega(t)$ определения вектор-функции $\Theta(r, t)$ до охватывающей её фиксированной области Π , 2) решению задачи Неймана для уравнения Лапласа в Π , т.е. к нахождению зависящей только от пространственных переменных вектор-функции $B(r)$, 3) вычислению $B(r)$ для конкретных баков.

3. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ БАК С КРЫШКОЙ

Рассмотрим нелинейные колебания жидкого груза в частично заполненном прямоугольном баке судна при произвольных угловых движениях (качке) последнего. Не исключается возможность захлестывания жидкостью крышки бака, а при небольших уровнях заполнения и оголение его дна. Эта задача довольно сложна и до настоящего времени, насколько известно, не решена. Некоторые её аспекты исследовались в [10, 11].

Используя предложенный метод, решим задачу расчета потенциалов Стокса–Жуковского в рассматриваемом случае.

Разместим начало O подвижной системы координат $Oxyz$ в центре бака и обозначим через $2a$, $2b$, $2c$ длины его рёбер, параллельных осям x , y , z соответственно. Тогда задача (16), (17) примет вид

$$\Delta B = 0 \quad \text{в } \Pi, \quad (26)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = (0, z, -y) \quad \text{при } x = \pm a, \quad (27)$$

$$\frac{\partial B}{\partial y} = (-z, 0, x) \quad \text{при } y = \pm b, \quad (28)$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = (y, -x, 0) \quad \text{при } z = \pm c, \quad (29)$$

где область

$$\Pi = \{(x, y, z) : |x| < a, |y| < b, |z| < c\}.$$

Считаем, далее, что в центральной системе координат $Oxyz$ векторный потенциал $B = (B_1, B_2, B_3)$. Из граничных условий (27) – (29) вытекает, что компоненты

$$B_1 = B_1(y, z), \quad B_2 = B_2(x, z), \quad B_3 = B_3(x, y),$$

т.е. не зависят от соответствующих переменных. Следуя [2], положим

$$\begin{aligned} B_1 &= F_1(y, z) - yz, & B_2 &= F_2(x, z) - xz, \\ B_3 &= F_3 - xy, \end{aligned} \quad (30)$$

где F_i ($i = 1, 2, 3$) – новые неизвестные функции. Подставляя выражения (30) в (26) – (29), получаем для F_i следующие краевые задачи в прямоугольном параллелепипеде Π :

$$\begin{aligned} \Delta F_1 &= 0, \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } y = \pm b, \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= 2y \quad \text{при } z = \pm c, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Delta F_2 &= 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= 2z \quad \text{при } x = \pm a, \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= 0 \quad \text{при } z = \pm c, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \Delta F_3 &= 0, \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } x = \pm a, \\ \frac{\partial F_3}{\partial y} &= 2x \quad \text{при } y = \pm b. \end{aligned} \quad (33)$$

Задачи (31) – (33) однотипны и аналогичны той, которая решалась в [2] для прямоугольной полости (но в другой системе координат). Пользуясь тем же методом, разложим ненулевые правые части граничных условий этих задач в ряды Фурье вида

$$\begin{aligned} 2y &= 16b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \pi^2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2b} y, \\ 2z &= 16c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \pi^2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2c} z, \\ 2x &= 16a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \pi^2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x. \end{aligned} \quad (34)$$

В свою очередь, искомые функции представляем в виде следующих рядов:

$$\begin{aligned} F_1(y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi z}{2b}, \\ F_2(x, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2c} \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi x}{2c}, \\ F_3(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi y}{2a}, \end{aligned} \quad (35)$$

где $a_{2n+1}, b_{2n+1}, c_{2n+1}$ – искомые коэффициенты. После подстановки рядов (34), (35) в граничные условия (31) – (33), приравнивания коэффициентов при одинаковых формах и некоторых преобразований полученных выражений, окончательно, с учетом (30), находим

$$\begin{aligned} B_1(y, z) &= -yz + \\ &+ \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3 \operatorname{ch} \frac{n\pi c}{2b}} \sin \frac{n\pi y}{2b} \operatorname{sh} \frac{n\pi z}{2b}, \\ B_2(x, z) &= -xz + \\ &+ \frac{32c^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2c}} \sin \frac{n\pi z}{2c} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{2c}, \\ B_3(x, y) &= -xy + \\ &+ \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3 \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \sin \frac{n\pi x}{2a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2a}. \end{aligned} \quad (36)$$

Формулы (36) определяют потенциалы Стокса–Жуковского для любых движений жидкости в прямоугольном баке и позволяют вычислять все связанные с этими потенциалами величины (скорости, давления, моменты инерции жидкости, параметры уравнений движения жидкости и т.д.).

4. ВРАЩАТЕЛЬНАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ ЖИДКОСТИ

Относительная скорость $u(r, t)$ жидкости при её безвихревом абсолютном движении в общем случае определяется формулой

$$u(r, t) = \nabla \psi - \omega(t) \times r,$$

где $\psi(r, t)$ – некоторая гармоническая в $\Omega(t)$ функция. Если же потенциал $\Phi(r, t)$ представлен в виде (21), то относительная скорость разлагается на сумму векторов вида

$$u(r, t) = \nabla \varphi + \nabla[\omega(t) \cdot B(r)] - \omega(t) \times r. \quad (37)$$

В этой сумме вектор

$$u(\omega) = \nabla[\omega(t) \cdot B(r)] - \omega(t) \times r \quad (38)$$

зависит от угловой скорости бака $\omega(t)$ и потому может быть назван вращательной составляющей относительной скорости жидкости. Отличительной особенностью этой составляющей является её зависимость от формы полости через потенциал Стокса – Жуковского $B(r)$.

Спроектировав векторное равенство (37) на нормаль ν и касательную плоскость к поверхности полости $S(t)$, получим соотношения

$$u_\nu(r, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + u_\nu(\omega), \quad u_\tau(r, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + u_\tau(\omega),$$

на $S(t)$, (39)

где индекс τ обозначает проекцию соответствующего вектора на касательную плоскость. Первое из них с учетом (38) и в соответствии с (23) и (16) даёт, как и следовало ожидать,

$$u_\nu = 0 \quad \text{на } S(t).$$

Отсюда вытекает, что

$$u(r, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + u_\tau(\omega) \quad \text{на } S(t),$$

т.е. линии тока (и траектории) жидких частиц, контактирующих с поверхностью $S(t)$, в их движении относительно жестко связанной с баком системы координат $Oxyz$ принадлежат этой поверхности. Исключение составляют частицы, принадлежащие одновременно твердой стенке и свободной поверхности: их линии тока и траектории лежат на свободной поверхности $\Sigma(t)$ (это вытекает из того, что для частиц на поверхности $\Sigma(t)$

$$u_\nu(r, t) = -\frac{f_t}{\sqrt{(\nabla f)^2}},$$

т.е. нормальная к свободной поверхности скорость лежащей на ней частицы совпадает с нормальной составляющей скорости соответствующей точки самой поверхности, и, следовательно, эта частица скользит вдоль поверхности, не покидая её).

Из второго соотношения (39) видно, что на $S(t)$ относительная скорость жидкой частицы $u(r, t) = u_\tau(r, t)$ имеет вращательную составляющую $u_\tau(\omega)$, равную той, которую она имела бы при $\varphi(r, t) \equiv 0$, т.е. при полном заполнении бака. Имея потенциал $B(r)$, вращательную составляющую $u_\tau(\omega)$ можно рассчитать с помощью формулы (38).

Пример. Рассчитаем вращательную составляющую относительной скорости жидкости в случае прямоугольного бака, колеблющегося вокруг оси Ox , которая направлена по горизонтали и неподвижна. Колебания происходят по закону

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin \sigma t,$$

где $\alpha(t)$ – угол поворота бака вокруг оси Ox ($\alpha > 0$ при повороте бака против хода часовой стрелки). При расчетах полагаем $\alpha_0 = 0.174$ рад (10 градусов), $\sigma = 0.8$ рад/с.

Бак частично заполнен жидкостью с произвольным уровнем заполнения (в соответствии с предыдущим уровнем заполнения не влияет на вращательную составляющую относительной скорости). Размеры бака: $b = 21$ м, $c = 8.5$ м (параметр a не участвует в расчетах, так как система совершает плоско-параллельное движение).

В рассматриваемом случае в проекциях на оси $Oxyz$ имеем

$$\omega(t) = (\omega_1(t), 0, 0),$$

$$\omega \times r = (0, -z\omega_1(t), y\omega_1(t)),$$

$$\omega(t) \cdot B(r) = \omega_1(t)B_1(r), \quad (40)$$

где $B_1(r)$ определяется первой из формул (36).

Подстановка (40) в (38) даёт

$$u(\omega) = [0, (\frac{\partial B_1}{\partial y} + z)\omega_1, (\frac{\partial B_1}{\partial z} - y)\omega_1]. \quad (41)$$

Используя уравнения (36) в (41), получим следующие выражения для проекций на оси y, z вращательной составляющей относительной скорости:

$$u_2(\omega) = \omega_1(t)k \sum_{n=1,3,5,\dots} f_n \cos \frac{n\pi y}{2b} \operatorname{sh} \frac{n\pi z}{2b},$$

$$u_3(\omega) = \omega_1(t)(k \sum_{n=1,3,5,\dots} f_n \sin \frac{n\pi y}{2b} \operatorname{ch} \frac{n\pi z}{2b} - 2y), \quad (42)$$

где

$$k = \frac{16b}{\pi^2}, \quad f_n = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi c}{2b}}.$$

В данном случае поверхность $S(t)$ представляет собой контур, состоящий из прямолинейных отрезков, параллельных осям y, z . На отдельных участках этого контура имеем

$$u_\tau(\omega) = u_3(\pm b, z) \quad \text{при } |z| < c,$$

$$u_\tau(\omega) = -u_2(y, \pm c) \quad \text{при } |y| < b.$$

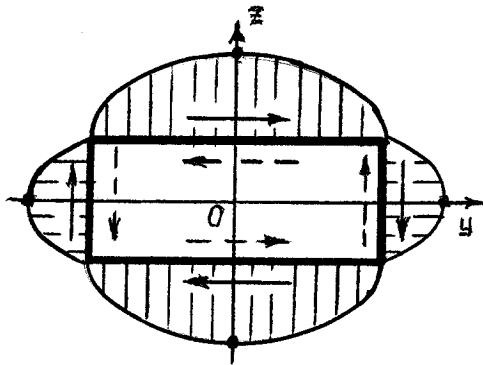


Рис. 1. Распределение $|u_{\tau}(\omega)|$ вдоль стенок бака (случай $j = 0$)

По этим формулам вычислены вращательные составляющие относительной скорости жидкости на стенках бака (они же истинные относительные скорости течения жидкости по стенкам бака в случае его полного заполнения).

На рис. 1 приведены эпюры распределения величины $|u_{\tau}(\omega)|$ на отдельных участках граничного контура. Эпюры соответствуют моментам времени $t = \pi j / \sigma$, $j = 0, 1, \dots$, когда угловая скорость бака $\omega_1(t)$ достигает максимальных по модулю значений. Пунктирные стрелки указывают направление касательной составляющей переносной скорости $\omega \times r$ частиц жидкости на стенках бака, сплошные – направление вектора $u_{\tau}(\omega)$.

В соответствии со второй из формул (40) проекции переносной скорости $\omega(t) \times r$ на касательное направление к граничному контуру сохраняют постоянные (относительно пространственных переменных y, z) значения вдоль каждого из прямолинейных отрезков этого контура. По расчетам при $j = 0$

$$(\omega(0) \times r)_{\tau} = \begin{cases} \mp 1.3 \text{ м/с} & \text{при } z = \pm c, \\ \pm 2.9 \text{ м/с} & \text{при } y = \pm b. \end{cases}$$

В отличие от переносной скорости величина вращательной составляющей относительной скорости (в проекции на касательную) изменяется вдоль отрезков контура приблизительно по параболическому закону, увеличиваясь от нуля на концах отрезков до некоторых максимальных (по модулю) значений в серединах этих отрезков. Расчетные значения $u_{\tau}(\omega)$, отвечающие отмеченным максимумам (эти максимумы обозначены на эпюрах черными кружками), получают следующие

ми:

$$u_{\tau}(\omega) = \begin{cases} \pm 2.3 \text{ м/с} & \text{при } y = 0, \quad z = \pm c \\ \mp 1.8 \text{ м/с} & \text{при } y = \pm b, \quad z = 0. \end{cases}$$

Таким образом, на контуре прямоугольного бака вектор вращательной составляющей относительной скорости $u(\omega)$ обладает следующими свойствами:

- 1) его проекция $u_{\nu}(\omega)$ на нормаль к контуру равна нулю,
- 2) касательная составляющая $u_{\tau}(\omega)$ этого вектора в каждой точке контура направлена против касательной составляющей $(\omega \times r)_{\tau}$ вектора переносной скорости $\omega \times r$,
- 3) величина $|u_{\tau}(\omega)|$ распределена по контуру бака симметрично относительно начала O системы координат, причем её значения в центральных точках более коротких отрезков контура меньше, а более длинных – больше, чем соответствующие значения касательной составляющей $(\omega \times r)_{\tau}$ переносной скорости.

Интерпретируя вектор $u(\omega)$ как вектор относительной скорости жидкости в случае целиком заполненного бака, можно сказать, что в целиком заполненном баке линии тока поверхностных частиц жидкости (при плоском движении системы) совпадают с граничным контуром бака, а относительные скорости этих частиц направлены навстречу вращению последнего. В этом смысле жидкость в прямоугольном баке движется так же, как в горизонтальном круговом цилиндре, колеблющемся вокруг своей оси. Однако, если в круговом цилиндре

$$u = -(\omega(t) \times r)_{\tau},$$

т.е. в каждый момент времени поверхностные частицы во всех точках контура имеют одинаковые скорости, равные по величине и направленные противоположно вектору переносной скорости (квазитвердое вращение жидкого объёма), то в прямоугольном баке, как видно из приведенной эпюры, поверхностные частицы движутся по контуру неравномерно, имея максимальные скорости в центральных точках прямолинейных участков контура и минимальные (равные нулю) в угловых точках. При этом максимальные значения скорости на коротких участках траектории меньше, чем на длинных (1.8 м/с против 2.3 м/с). Кроме того, на коротких участках максимальная относительная скорость меньше переносной (1.8 и 2.9 м/с соответственно), а на длинных – наоборот, относительная больше переносной (2.3 м/с против 1.3 м/с).

Итак, в случае прямоугольного бака зависящая

от потенциалов Стокса–Жуковского вращательная составляющая относительной скорости жидкости определена во всей занятой жидкостью области вплоть до её границы. О полной функции $u(r, t)$ этого пока утверждать нельзя, поскольку не известно, как ведет себя волновой потенциал $\varphi(r, t)$ внутри и на границе области $\Omega(t)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод расчёта потенциалов Стокса–Жуковского в общем случае нелинейных колебаний жидкости со свободной поверхностью в подвижных баках произвольных форм. Идея метода заключается в замене краевой задачи для потенциалов Стокса–Жуковского в изменяющейся со временем области соответствующей краевой задачей в области, имеющей фиксированные границы в жестко связанной с баком системе координат. Подробно проанализирован случай бака в форме прямоугольного параллелепипеда. Выполнены расчеты связанной с потенциалами Стокса–Жуковского вращательной составляющей относительной скорости жидкости на стенках такого бака для конкретных параметров бака и синусоидального закона его угловых колебаний вокруг горизонтальной оси.

1. Луковский И. А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость.– К.: Наук. думка, 1990.– 295 с.

2. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною каплею жидкостью. Собр. соч. Т.2.– М.– Л.: Гостехтеориздат, 1942.– 152–309 с.
3. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью // Прикладная математика и механика.– 1956.– **20**.– С. в.1.21–38
4. Петров А. А. Уравнения движения самолёта, несущего баки с жидкостью.– Вариационные методы в задачах о колебаниях жидкости и тела с жидкостью: М.: ВЦ АН СССР, 1962.– 222–236 с.
5. Петров А. А. Приближенный метод расчета собственных колебаний жидкости в сосудах произвольной формы и потенциалов Жуковского для этих сосудов // ЖВМ и МФ.– 1963.– N 5.– С. 958–964.
6. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость.– М.: Наука, 1965.– 439 с.
7. Богоряд И. Б., Дружинин И. А., Дружинина Г. Э., Либин Э. А. Введение в динамику сосудов с жидкостью.– Томск: Томский ун-т, 1977.– 143 с.
8. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго зуй кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи.– М.: Наука, 1989.– 413 с.
9. Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. Нелинейная динамика летательных аппаратов с жидкостью.– М.: Машиностроение, 1977.– 206 с.
10. Золотенко Г. Ф. К динамике гидроупругой системы "прямоугольный бак – жидкость" // Механика твердого тела.– 1996.– N 5.– С. 155–161.
11. Луковский И. А., Золотенко Г. Ф. Численное моделирование колебаний жидкости в закрытом подвижном прямоугольном сосуде // Гидромеханика.– 1998.– 72.– С. 72–87.