

УДК 532.595

К РАСЧЕТУ ЧАСТОТ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КОНТЕЙНЕРЕ С ПЕРЕГОРОДКАМИ В ПОПЕРЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ ЕГО СИММЕТРИИ

Д. А. ГАЛИЦЫН
В. А. ТРОЦЕНКО

Институт математики НАН Украины, Киев

Получено 09.02.2000

Предлагается методика определения гидродинамических коэффициентов уравнений движения твердого тела, имеющего полость в форме прямоугольного параллелепипеда, при его поперечных движениях. Данная методика основывается на решении основных краевых задач модифицированным методом сопряжения решений и учитывает особенности в первых производных от искомых функций на краях перегородок. Приводится анализ эффективности алгоритма и некоторые числовые результаты расчета частот и присоединенных масс жидкости в рассматриваемой полости.

Пропонується методика визначення гідродинамічних коефіцієнтів рівнянь руху твердого тіла, що має порожнину у формі прямокутного паралелепіпеду, при його поперечних рухах. Дана методика базується на розв'язанні основних граничних задач модифікованим методом спряження розв'язків та враховує особливості в перших похідних від шуканих функцій на краях перегородок. Наводиться аналіз ефективності алгоритму та деякі числові результати розрахунку частот і приєднаних мас рідини в розглядуваній порожнині.

The technique for determination the hydrodynamic coefficients of equations of motion of solid body with cavity of rectangular parallelepiped shape by its transverse motions is suggested. This technique for solving basic boundary problems is based on the modified method of conjugation of solutions and takes singularities in first derivatives of sought-for functions on the edges of cuts into account. The analysis of effectiveness of algorithm and some numerical results of calculations of frequencies and associated masses of liquid in cavity under consideration is represented.

ВВЕДЕНИЕ

Задача взаимодействия твердого тела и жидкости, частично заполняющей подвижный контейнер, возникает в динамике танкеров. На практике для ограничения подвижности жидкости применяются специальные устройства в виде ребер-перегородок, расположенных на стенках полости. Такие перегородки оказывают значительное сопротивление движению жидкости, что приводит к сильному демпфированию колебаний.

Установка в емкости конструктивных элементов типа ребер-перегородок значительно усложняет теоретический анализ динамических характеристик жидкости и приводит к существенному изменению гидродинамических коэффициентов уравнений движения механической системы "тело-жидкость". Это связано в первую очередь со сложной формой области, которую занимает жидкость. Несмотря на практическую важность рассматриваемого случая, в настоящее время такая гидродинамическая задача исследована не достаточно полно, в силу чего представляет теоретический интерес. Теоретическому и экспериментальному изучению поведения жидкости в подвижных полостях вращения с конструктивными элементами в виде

продольных и поперечных ребер-перегородок посвящены работы [1–6].

Ниже, на основе разработанного в работах [5, 6] подхода, предлагается методика нахождения коэффициентов уравнений движения твердого тела, имеющего полость в форме прямоугольного параллелепипеда с продольными перегородками, при его поперечных движениях.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу пространственного движения абсолютно твердого тела с полостью в форме прямоугольного параллелепипеда, которая частично заполнена идеальной и несжимаемой жидкостью. Предположим, что на стенках полости жестко закреплены перегородки в форме прямоугольных пластин одинаковой ширины в плоскости, которая параллельна невозмущенной свободной поверхности жидкости. Объем жидкости в невозмущенном состоянии будет иметь две плоскости геометрической симметрии, за которые примем координатные плоскости Ozx и Ozy . Ось Oz совместим с линией пересечения этих плоскостей и направим вверх. Начало связанной с телом системы координат $Oxyz$ поместим в плоскости расположения пе-

регородок, а ось Oy совместим с продольной осью полости. Плоскость Ozx выберем так, чтобы она проходила посередине длины полости.

Для исследования взаимодействия тела и жидкости необходимо располагать решениями следующих основных краевых задач [4, 7]:

$$\Delta\varphi_n(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in Q, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu} - \varkappa_n\varphi_n\right)\Big|_{\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu}\Big|_S = 0;$$

$$\Delta\vec{\Omega}(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in Q, \quad (2)$$

$$\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\nu}\Big|_{S\cup\Sigma} = \vec{r} \times \vec{\nu},$$

где Q – область, занятая жидкостью; $\vec{\nu}$ – орт внешней нормали к границе области Q ; S – смачиваемая поверхность полости, включая и поверхности перегородок; Σ – свободная невозмущенная поверхность жидкости; \vec{r} – радиус-вектор произвольной точки границы области Q .

Если тело совершает движения в плоскости симметрии Ozx , то движения жидкости в рассматриваемой полости не будут зависеть от координаты y , и поэтому для функций φ_{n1} и компоненты Ω_2 вектор-функции $\vec{\Omega}$ можно сформулировать двумерные краевые задачи:

$$\Delta\varphi_{n1}(x, z) = 0, \quad (x, z) \in G, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_{n1}}{\partial\nu} - \varkappa_{n1}\varphi_{n1}\right)\Big|_{L_0} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_{n1}}{\partial\nu}\Big|_L = 0;$$

$$\Delta\Omega_2(x, y, z) = 0, \quad (x, z) \in G, \quad (4)$$

$$\frac{\partial\Omega_2}{\partial\nu}\Big|_{L\cup L_0} = z \cos(\nu, x) - x \cos(\nu, z).$$

Здесь G – сечение области Q плоскостью Ozx ; L_0 и L – линии пересечения плоскости Ozx с поверхностями Σ и S соответственно.

При этом функции $\varphi_{n1}(x, z)$ и $\Omega_2(x, z)$ являются нечетными функциями по аргументу x при фиксированном z .

Решения однородной краевой задачи на собственные значения с параметром в граничном условии (3) и неоднородной задачи Неймана (4) необходимы для вычисления гидродинамических коэффициентов уравнений возмущенного движения рассматриваемой механической системы в плоскости Ozx , которые определяются соотношениями

$$\lambda_{n1} = \int_{\Sigma} x \frac{\partial\varphi_{n1}}{\partial z} dS; \quad \mu_{n1} = \varkappa_{n1} \int_{\Sigma} \varphi_{n1}^2 dS; \quad (5)$$

$$\lambda_{0n2} = \int_{\Sigma} \Omega_2 \frac{\partial\varphi_{n1}}{\partial z} dS; \quad I_{22} = \int_{S\cup\Sigma} \Omega_2 \frac{\partial\Omega_2}{\partial\nu} dS.$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что на жидкость с единичной плотностью действует единичный вектор массовых сил.

Знание интегральных характеристик (5) и собственных значений \varkappa_n задачи (3) позволяет провести дальнейшее исследование по изучению движения механической системы "тело-жидкость" под воздействием приложенной к телу системы внешних сил и моментов.

Задачу (4) можно несколько видоизменить, введя в рассмотрение новую функцию [8]:

$$F_2 = \Omega_2 - zx. \quad (6)$$

Эта подстановка приводит к следующей краевой задаче для функции F_2 :

$$\Delta F_2(x, z) = 0, \quad (x, z) \in G, \quad (7)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial\nu}\Big|_{L\cup L_0} = -2x \cos(\nu, z).$$

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ

Для построения решений краевых задач (3) и (7) разобьем область G линией $z = 0$ на две подобласти G_1 и G_2 . Предположим далее, что решения этих задач принимают значения

$$\varphi_n(x, z) = \begin{cases} \varphi_n^{(1)}, & (x, z) \in G_1, \\ \varphi_n^{(2)}, & (x, z) \in G_2, \end{cases} \quad (8)$$

$$F_2(x, z) = \begin{cases} F_2^{(1)} = F_{21}^{(1)} + F_{22}^{(1)}, & (x, z) \in G_1, \\ F_2^{(2)} = F_{21}^{(2)} + F_{22}^{(2)}, & (x, z) \in G_2. \end{cases} \quad (9)$$

Для гармонических функций $\varphi_n^{(j)}$, $F_{21}^{(j)}$ и $F_{22}^{(j)}$ ($j = 1, 2$) на границах подобластей G_1 и G_2 сформулируем следующие условия:

$$\left(\frac{\partial\varphi_{n1}^{(1)}}{\partial z} - \varkappa_{n1}\varphi_{n1}^{(1)}\right)\Big|_{L_0} = 0; \quad \frac{\partial\varphi_{n1}^{(1)}}{\partial\nu}\Big|_{L_1} = 0;$$

$$\frac{\partial\varphi_{n1}^{(1)}}{\partial z}\Big|_{l_0} = \sum_{p=1}^{\infty} X_p^{(n)} f_p(x) = N_n(x); \quad (10)$$

$$\frac{\partial\varphi_{n1}^{(2)}}{\partial\nu}\Big|_{L_2} = 0; \quad \frac{\partial\varphi_{n1}^{(2)}}{\partial z}\Big|_{l_0} = \sum_{p=1}^{\infty} X_p^{(n)} f_p(x) = N_n(x);$$

$$\frac{\partial F_{21}^{(1)}}{\partial\nu}\Big|_{L_1\cup L_0\cup l_0} = -2x \cos(\nu, z); \quad (11)$$

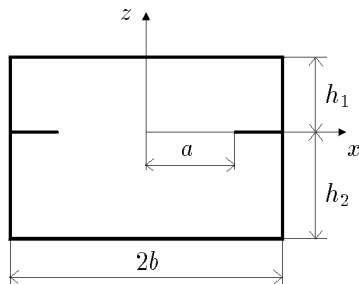


Рис. 1.

$$\left. \frac{\partial F_{21}^{(2)}}{\partial \nu} \right|_{L_2 \cup l_0} = -2x \cos(\nu, z);$$

$$\left. \frac{\partial F_{22}^{(1)}}{\partial \nu} \right|_{L_1 \cup L_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial F_{22}^{(1)}}{\partial \nu} \right|_{l_0} = \sum_{p=1}^{\infty} Y_p f_p(x) = M(x);$$

$$\left. \frac{\partial F_{22}^{(2)}}{\partial \nu} \right|_{L_2} = 0; \quad \left. \frac{\partial F_{22}^{(2)}}{\partial \nu} \right|_{l_0} = \sum_{p=1}^{\infty} Y_p f_p(x) = M(x),$$

$$(L = L_1 \cup L_2).$$

Здесь l_0 – смежная линия подобластей G_1 и G_2 : $\{z = 0; -a \leq x \leq a\}$; $\{f_p(x)\}$ – некоторая система базисных функций на l_0 ; $X_p^{(n)}$ и Y_p – постоянные, подлежащие определению в дальнейшем из условия непрерывности функций $\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}$ и $F_2^{(1)}, F_2^{(2)}$ на линии l_0 .

Для определения решений краевых задач (10) – (12) построим функции Грина $K_j(p, p_0)$ задачи Неймана для подобластей G_j ($j = 1, 2$) и параметрическую функцию Грина $K_{\varkappa}(p, p_0)$ для области G_1 , которая на границе L_0 удовлетворяет условию (9). При этом функция $K_{\varkappa}(p, p_0)$ должна определяться из решения следующей задачи [9]:

$$\Delta K_{\varkappa}(p, p_0) = -\delta(x - x_0)\delta(z - z_0), \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial K_{\varkappa}}{\partial z} - \varkappa K_{\varkappa} \right) \Big|_{L_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial K_{\varkappa}}{\partial \nu} \right|_{L_1 \cup l_0} = 0,$$

где p_0 – точка с координатами x_0, z_0 , лежащая на границе области; p – текущая точка с координатами x, z , расположенная внутри области.

Обозначим через $2b$ ширину параллелепипеда, а через h_1 и h_2 – расстояние перегородок до невозмущенной свободной поверхности жидкости и до

днища полости соответственно (рис. 1). Представим функцию $K_{\varkappa}(p, p_0)$ в виде:

$$K_{\varkappa}(p, p_0) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(z) \cos \alpha_k(x + b), \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{2b}. \quad (14)$$

Подставляя выражение (14) в (13) и учитывая свойства δ -функций Дирака, приходим после некоторых преобразований к граничной задаче относительно функций $Z_k(z)$:

$$Z_k'' - \alpha_k^2 Z_k = -\frac{1}{n_k} \delta(z - z_0) g_k(x), \quad (15)$$

$$Z_k'(0) = 0, \quad Z_k'(h_1) = \varkappa Z_k(h_1).$$

Здесь

$$n_k = \begin{cases} 2b, & \forall k = 0, \\ b, & \forall k \neq 0, \end{cases} \quad g_k(x) = \cos \alpha_k(x + b).$$

Заметим, что общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $L(y) = f(x)$ по методу Лагранжа можно представить в виде

$$u = -y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W(x)} dx + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W(x)} dx + c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad (16)$$

где y_1 и y_2 – два линейно независимых решения однородного уравнения $L(y) = 0$; $W(x)$ – определитель Вронского для решений y_1 и y_2 .

Выберем в качестве независимых решений однородного уравнения (14) функции

$$y_1 = \operatorname{ch} \alpha_k z; \quad y_2 = \operatorname{ch} [\alpha_k(z - h_1) + \omega_k]; \quad (17)$$

$$\omega_k = \operatorname{Arth} \frac{\varkappa}{\alpha_k}.$$

Для них справедливы соотношения

$$\left. \frac{dy_1}{dz} \right|_{z=0} = 0; \quad \left(\frac{dy_2}{dz} - \varkappa y_2 \right) \Big|_{z=h_1} = 0; \quad (18)$$

$$W(z) = -\alpha_k \operatorname{sh} (\alpha_k h_1 - \omega_k).$$

Тогда, с учетом формул (16) – (18) и специального выбора пределов интегрирования в (16), решение задачи (15) будет иметь вид

$$Z_k = \frac{g_k(x)}{n_k \alpha_k \operatorname{sh} (\alpha_k h_1 - \omega_k)} \times \\ \times \left\{ \operatorname{ch} [\alpha_k(z - h_1) + \omega_k] \int_0^z \operatorname{ch} \alpha_k z \delta(z - z_0) dz + \right.$$

$$+ \operatorname{ch} \alpha_k z \int_z^{h_1} \operatorname{ch} [\alpha_k(z - h_1) + \omega_k] \delta(z - z_0) dz \}.$$

В этом выражении для $z_0 > z$ равен нулю первый интеграл, тогда как для $z_0 < z$ равен нулю второй интеграл. Следовательно, функция Грина $K_{\mathcal{A}}(p, p_0)$ принимает вид

$$K_{\mathcal{A}}(p, p_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k(x) g_k(x_0)}{n_k \alpha_k \operatorname{sh} (\alpha_k h_1 - \omega_k)} \times \operatorname{ch} [\alpha_k(z - h_1) + \omega_k] \operatorname{ch} \alpha_k z_0, \quad (z > z_0). \quad (19)$$

Функции Грина $K_j(p, p_0)$ задач Неймана для подобластей G_j ($j = 1, 2$) можно получить аналогичным образом. При этом будем иметь

$$K_j(p, p_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k(x) g_k(x_0)}{n_k \alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k h_j} \times \operatorname{ch} [\alpha_k(z + (-1)^j h_j)] \operatorname{ch} \alpha_k z_0, \quad (20)$$

($z > z_0$ при $j = 1$; $z < z_0$ при $j = 2$).

При дальнейшем построении решений весьма важным является вопрос о рациональном выборе системы базисных функций $\{f_p(x)\}$, с помощью которых производится разложение производных в направлении оси Oz от искомым функций на отрезке $[-a, a]$. Предполагая, что упомянутая производная (например, задачи Неймана (12)) является некоторой неизвестной функцией $M(x)$, запишем решения для подобластей G_1 и G_2 с помощью функций Грина, предварительно выделив из них сингулярную часть. Далее, воспользовавшись условием непрерывности искомой функции на линии l_0 , задача сводится к решению интегрального уравнения первого рода относительно функции $M(x)$. Если в ядре полученного уравнения сохранить только его сингулярную часть, то получим широко известное в литературе одномерное интегральное уравнение с логарифмическим ядром, решение которого имеет следующую структуру [10]:

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Phi(x), \quad (21)$$

где $\Phi(x)$ – достаточно гладкая и нечетная функция на отрезке $[-a, a]$.

В работе [10] с привлечением аппарата функционального анализа было показано, что характер особенности решения, обусловленный сингулярной частью ядра интегрального уравнения, не изменится при добавлении к ядру его достаточно гладкой регулярной части.

В связи с этим функции $N_n(x)$ и $M(x)$ на отрезке $[-a, a]$ будем искать в виде следующих разложений:

$$N_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \left\{ X_1^{(n)} + X_2^{(n)} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right] + X_3^{(n)} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right]^2 + \dots \right\},$$

$$M(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \left\{ Y_1^{(n)} + Y_2^{(n)} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right] + Y_3^{(n)} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right]^2 + \dots \right\}. \quad (22)$$

Представления (22) удобны еще и тем, что разрыв II-го рода в граничных условиях на координатной линии $z = 0$ для функций $\varphi_n^{(1)}$, $\varphi_n^{(2)}$ и $F_2^{(1)}$, $F_2^{(2)}$ в подобластях G_1 и G_2 будет обусловлен только первой координатной функцией, что в дальнейшем положительно скажется на эффективности алгоритма. Таким образом, координатные функции $f_p(x)$ в рассматриваемом случае имеют вид

$$f_p(x) = x \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right]^{p-3/2}, \quad (p = 1, 2, \dots). \quad (23)$$

Воспользовавшись построенными функциями Грина, решения для функций $\varphi_n^{(j)}$ в каждой из подобластей G_j ($j = 1, 2$) могут быть представлены так:

$$\varphi_n^{(1)}(x, z) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} [\alpha_{2k+1}(z - h_1) + \omega_{2k+1}]}{b \alpha_{2k+1} \operatorname{sh} (\alpha_{2k+1} h_1 - \omega_{2k+1})} \times g_{2k+1}(x) a_{2k+1}^{(n)}; \quad (24)$$

$$\varphi_n^{(2)}(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{2k+1}(x) \operatorname{ch} [\alpha_{2k+1}(z + h_2)]}{b \alpha_{2k+1} \operatorname{sh} \alpha_{2k+1} h_2} a_{2k+1}^{(n)};$$

$$a_{p, 2k+1} = (-1)^{k+1} \frac{2 \sqrt{\pi} a^2 \Gamma(p + 1/2)}{(2p - 1) \left(\frac{z_{2k+1}}{2}\right)^{p-1}} J_p(z_{2p+1});$$

$$a_{2k+1}^{(n)} = \sum_{p=1}^{\infty} X_p^{(n)} a_{p, 2k+1}; \quad z_{2p+1} = \frac{(2p + 1) a \pi}{2b}.$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция, $J_p(x)$ – функция Бесселя первого рода и p -го порядка.

При выводе выражений (24) использован определенный интеграл Пуассона [11]

$$\int_0^\pi \cos(z \cos \theta) \sin^{2(n-1)} \theta d\theta = \frac{\Gamma(n-1/2) \sqrt{\pi}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{n-1}} J_{n-1}(z), \quad (25)$$

где n – целое, положительное число или нуль.

Аналогично, решения для функций $F_{21}^{(j)}(x, z)$, $F_{22}^{(j)}(x, z)$ ($j = 1, 2$) будут иметь вид:

$$F_{21}^{(j)}(x, z) = \frac{4(-1)^j}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{2k+1}(x)}{\alpha_{2k+1}^3 \operatorname{sh} \alpha_{2k+1} h_j} \times \left[\operatorname{ch} \left(\alpha_{2k+1} (z + (-1)^j h_j) \right) - \operatorname{ch} \alpha_{2k+1} z \right],$$

$$F_{22}^{(j)}(x, z) = \frac{(-1)^j}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{2k+1}(x)}{\alpha_{2k+1} \operatorname{sh} \alpha_{2k+1} h_j} \times \operatorname{ch} \left(\alpha_{2k+1} (z + (-1)^j h_j) \right) b_{2k+1},$$

$$b_{2k+1} = \sum_{p=1}^{\infty} Y_p a_{p, 2k+1}.$$

Далее, из условия непрерывности функций $\varphi_n^{(1)}$ и $\varphi_n^{(2)}$ на смежной линии l_0 подобластей G_1 и G_2 получаем соотношение

$$\sum_{p=1}^{\infty} X_p^{(n)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{2k+1}(x)}{b} \frac{a_{p, 2k+1}}{\alpha_{2k+1}} \times \left[\operatorname{cth} \alpha_{2k+1} h_2 + \operatorname{cth} (\alpha_{2k+1} h_1 - \omega_{2k+1}) \right] \right\} = 0. \quad (27)$$

Умножим обе части полученного равенства на $f_q(x)$ и проинтегрируем его от $-a$ до a . Тогда получим следующую бесконечную однородную алгебраическую систему для определения постоянных $X_p^{(n)}$ и частотных параметров α_n :

$$\sum_{p=1}^{\infty} X_p^{(n)} \alpha_{pq}^{(\alpha)} = 0, \quad (28)$$

$$\alpha_{pq}^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{p, 2k+1} a_{q, 2k+1}}{b \alpha_{2k+1}} \times \left[\operatorname{cth} \alpha_{2k+1} h_2 + \frac{\alpha_{2k+1} - \omega_{2k+1} \operatorname{th} \alpha_{2k+1} h_1}{\alpha_{2k+1} \operatorname{th} \alpha_{2k+1} h_1 - \omega_{2k+1}} \right].$$

Приравняв значения функции F_2 для областей G_1 и G_2 на линии l_0 , приходим к задаче о разложении известной функции по заранее заданным системам функций. Как и в предыдущем случае, сведем решение этой задачи к решению бесконечной алгебраической системы относительно постоянных Y_p :

$$\sum_{p=1}^{\infty} Y_p \alpha_{pq} = \gamma_q, \quad (q = 1, 2, \dots) \quad (29)$$

где

$$\alpha_{pq} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{p, 2k+1} a_{q, 2k+1}}{b \alpha_{2k+1}} \times \left[\operatorname{cth} \alpha_{2k+1} h_1 + \operatorname{cth} \alpha_{2k+1} h_2 \right],$$

$$\gamma_q = \frac{4}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{q, 2k+1}}{\alpha_{2k+1}^3} \times \left[\frac{1 - \operatorname{ch} \alpha_{2k+1} h_1}{\operatorname{sh} \alpha_{2k+1} h_1} + \frac{1 - \operatorname{ch} \alpha_{2k+1} h_2}{\operatorname{sh} \alpha_{2k+1} h_2} \right].$$

Можно показать, что определители систем (28) и (29) относятся к классу нормальных определителей, а, следовательно, решения рассматриваемых систем существуют и могут быть найдены методом последовательных приближений.

Учитывая асимптотику бесселевых и гиперболических функций при больших значениях их аргументов, заключаем, что коэффициенты $[\alpha_{pq}^{(\alpha)}]_k$ и $[\alpha_{pq}]_k$ числовых рядов для элементов $\alpha_{pq}^{(\alpha)}$ и α_{pq} алгебраических систем (28) и (29) имеют следующий порядок убывания:

$$[\alpha_{pq}^{(\alpha)}]_k = O\left(\frac{1}{k^{p+q}}\right), \quad [\alpha_{pq}]_k = O\left(\frac{1}{k^{p+q}}\right).$$

Поэтому при вычислении элементов $\alpha_{11}^{(\alpha)}$ и α_{11} применялись методы улучшения сходимости рядов, основанные на выделении медленно сходящейся части ряда с последующим ее суммированием.

После подстановки полученных решений в формулы (5) получим следующие выражения для коэффициентов уравнений возмущенного движения

Таблиця 1

m	h ₁ = 0.1			h ₁ = 0.5		
	α ₁₁	α ₂₁	α ₃₁	α ₁₁	α ₂₁	α ₃₁
1	0,85689	2,24873	5,41260	1,35748	4,63341	7,84838
2	0,85789	3,39241	5,80232	1,36090	4,67645	7,84934
3	0,85798	3,40782	7,08449	1,36090	4,67869	7,85185
4	0,85799	3,40782	7,18260	1,36090	4,67870	7,85211
5	0,85799	3,40782	7,18369	1,36090	4,67870	7,85212
6	0,85799	3,40782	7,18369	1,36090	4,67870	7,85212

Таблиця 2

m	h ₁ = 0.1			h ₁ = 0.5		
	m ₁₁	c ₁₁	I ₂₂	m ₁₁	c ₁₁	I ₂₂
1	1,12851	0,38090	0,75635	1,78847	0,26254	0,92230
2	1,13328	0,38287	0,75535	1,79421	0,26204	0,92223
3	1,13343	0,38290	0,75534	1,79421	0,26204	0,92222
4	1,13344	0,38290	0,75534	1,79421	0,26204	0,92222

твердого тела в плоскости Ozx с полостью в форме прямого параллелепипеда с продольными перегородками:

$$\lambda_{n1} = \frac{2l\alpha_n}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}^{(n)}}{\alpha_{2k+1}^2 d_{2k+1}^{(n)}};$$

$$\mu_{n1} = \frac{l\alpha_n}{2b} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{a_{2k+1}^{(n)}}{d_{2k+1}^{(n)}} \right]^2;$$

$$\lambda_{0n2} = h_1 \lambda_{n1} + \frac{l\alpha_n}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}^{(n)} [b_{2k+1} \alpha_{2k+1}^2 - 4(\operatorname{ch} \alpha_{2k+1} h_1 - 1)]}{\alpha_{2k+1}^3 \operatorname{sh} \alpha_{2k+1} h_1 d_{2k+1}^{(n)}};$$

$$d_{2k+1}^{(n)} = \alpha_{2k+1} \operatorname{sh} \alpha_{2k+1} h_1 - \alpha_n \operatorname{ch} \alpha_{2k+1} h_1; \quad (30)$$

$$I_{22} = I_{22}^{(1)} + I_{22}^{(2)} - l \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \gamma_m;$$

$$I_{22}^{(1)} = 2lh_1 b \left(\frac{h_1^2}{3} - b^2 \right) - \frac{32l}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{ch} \alpha_{2k+1} h_1}{\alpha_{2k+1}^5 \operatorname{sh} \alpha_{2k+1} h_1}.$$

Формула для $I_{22}^{(2)}$ получается из формулы для $I_{22}^{(1)}$ заменой h_1 на h_2 .

И в заключение приведем решения соответствующих краевых задач и выражения для гидродинамических коэффициентов в случае полости в форме прямоугольного параллелепипеда без перегородок. Как и выше, плоскости Ozx и Ozy совместим

с плоскостями геометрической симметрии полости, направив ось Oz вверх по линии пересечения этих плоскостей. Обозначим расстояние от начала координат до дна полости через z_0 , а глубину жидкости через h . Тогда, используя метод Фурье, решения для функций $\varphi_n(x, z)$ и $F_2(x, z)$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x, z) &= \frac{\operatorname{ch} \alpha_{2n-1}(z - z_0)}{\alpha_{2n-1} \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} h} \times \\ &\times \cos \alpha_{2n-1}(x + b), \quad (n = 1, 2, \dots) \\ F_2(x, z) &= \frac{4}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \alpha_{2k+1}(x + b)}{\alpha_{2k+1}^3 \operatorname{sh} \alpha_{2k+1} h} \times \\ &\times [\operatorname{ch} \alpha_{2k+1}(z - z_0) - \operatorname{ch} \alpha_{2k+1}(z - z_0 - h)]. \end{aligned} \quad (31)$$

В свою очередь, коэффициенты уравнений возмущенного движения тела с рассматриваемой полостью в плоскости Ozx примут вид

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \alpha_{2n-1} \operatorname{th} \alpha_{2n-1} h; \\ \lambda_{n1} &= -\frac{2l}{\alpha_{2n-1}^2}; \quad \mu_{n1} = \frac{lb}{\alpha_n}; \\ \lambda_{0n2} &= (z_0 + h) \lambda_{n1} + \\ &+ 4l \frac{\operatorname{ch} \alpha_{2n-1} h - 1}{\alpha_{2n-1}^3 \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} h}; \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} I_{22} &= \frac{2}{3} lb \left[(z_0 + h)^3 - z_0^3 \right] - \\ &- 2b^3 lh + \frac{32l}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{2k+1} h - 1}{\alpha_{2k+1}^5 \operatorname{sh} \alpha_{2k+1} h}. \end{aligned}$$

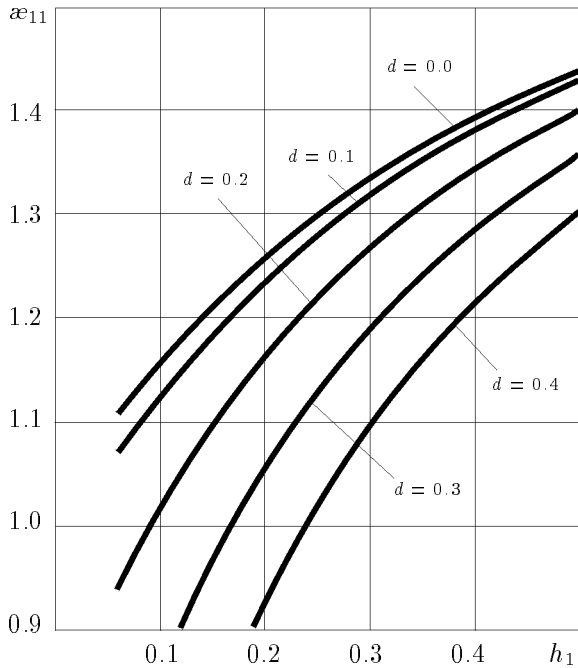


Рис. 2

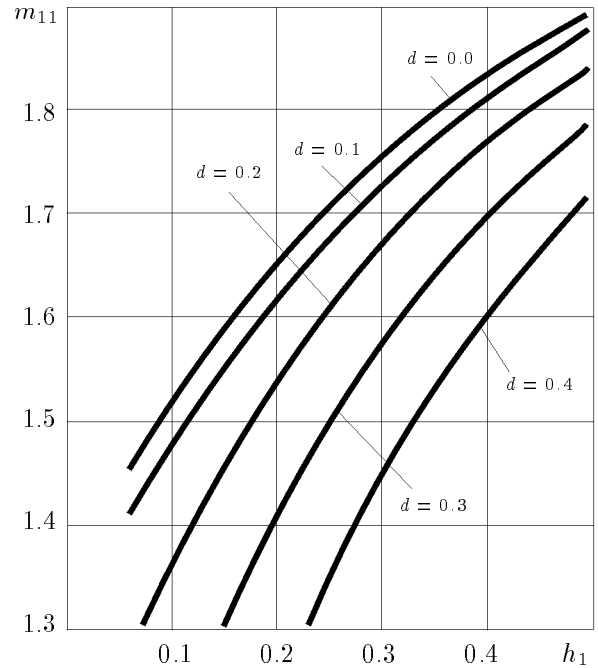


Рис. 3

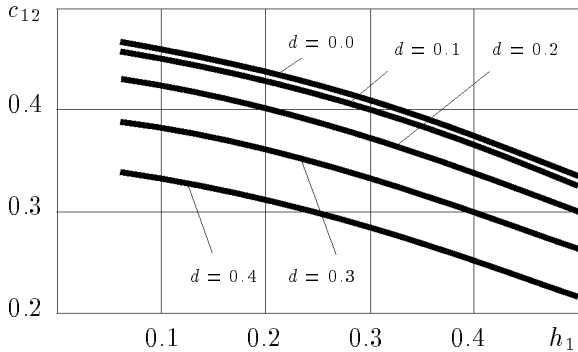


Рис. 4

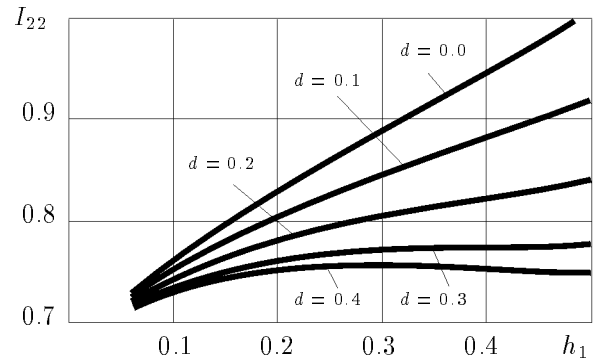


Рис. 5

Выражения (32) будут использованы в дальнейшем при вычислении гидродинамических коэффициентов для соответствующих полостей без перегородок.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Приведем некоторые результаты расчетов коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с рассматриваемой полостью.

Пусть полость имеет следующие геометрические характеристики: $b = 1; l = 2; h_2 = 0,5$. В табл. 1 приведены результаты расчетов первых

трех значений частотных параметров α_{n1} в зависимости от числа членов m в разложениях (9) для производной от волновой функции $\varphi_{n1}(x, z)$ в направлении оси Oz на линии l_0 при двух значениях уровня жидкости над перегородками h_1 . При этом значение параметра a (половина расстояния между кромками перегородок) полагалось равным 0,7. Аналогичные зависимости для коэффициентов инерционных связей

$$m_{n1} = \frac{\lambda_{n1}^2}{\mu_{n1}}; \quad c_{n1} = -\frac{\lambda_{0n2}}{\lambda_{n1}}$$

для наиболее важного в практических приложения-

ях первого тона колебаний жидкости, а также присоединенного момента инерции жидкости I_{22} от порядка m решаемых алгебраических систем (28) и (29) приведены в табл. 2. Быстрая сходимость динамических характеристик жидкости объясняется, в первую очередь, тем обстоятельством, что при построении решений рассматриваемых краевых задач (3) и (7) учитывались их дифференциальные свойства вблизи особых точек границы области.

При тех же геометрических характеристиках полости на рис.1 - 4 представлена графическая зависимость коэффициентов α_{11} , m_{11} , c_{11} и I_{22} от уровня жидкости h_1 над перегородками при различных значениях параметра a . Как видно из приведенных графиков, гидродинамические коэффициенты могут существенно отличаться от соответствующих коэффициентов для полости без перегородок. Особенно сильно сказывается влияние перегородок на волновые движения жидкости в том случае, когда они находятся вблизи свободной поверхности. Значения всех гидродинамических коэффициентов расположены в диапазоне от своих значений для полости с гладкими стенками до соответствующих значений для полости со сплошной перегородкой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, предлагаемый алгоритм позволяет определять инерционные характеристики жидкости в подвижной полости, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда с конструктивными элементами в виде ребер-перегородок. Он свелся к решению конечномерных однородных и

неоднородных алгебраических систем небольшой размерности, обеспечивая при этом высокую точность получаемых результатов.

1. Венедиктов Б. Л. Экспериментальное исследование колебаний жидкости в баке с демпфирующими перегородками // Тр. Центр. аэрогидродинамич. ин-та.- 1970, Вып. 1221.- С. 5–34.
2. Докучаев Л. В. О присоединенном моменте инерции жидкости в цилиндре с перегородками, вращающемся около продольной оси // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение.- 1964.- N 2.- С. 168–171.
3. Микишев Г. Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов.- М: Машиностроение, 1978.- 248 с.
4. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость.- М: Машиностроение, 1971.- 563 с.
5. Троценко В. А. О возмущенном движении тела, содержащего полость с упругой кольцевой перегородкой // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.- 1975.- N 4.- С. 78–88.
6. Троценко В. А. О коэффициентах уравнений возмущенного движения тела, с цилиндрической полостью, разделенной поперечными ребрами // Прикл. механика.- 1969.- 5, вып. 10.- С. 50–57.
7. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью // Прикл. математика и механика.- 1956.- 20, вып. 1.- С. 21–38.
8. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, заполненные однородной капельной жидкостью.- М.;Л: Гостехиздат, 1949.- 762 с. (Собр.соч. в 7 т.;Т.2)
9. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики.- М: Изд-во иностр.лит., 1958.- Т. 1 с.930
10. Воронич И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости.- М: Наука, 1974.- 456 с.
11. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций.- М: Изд-во иностр.лит., 1949.- 798 с.