ISSN 1561-9087 Прикладна гiдромеханiка. 1999. Том 1 (73), N 4. С. 61 – 76

УДК 532.5

О НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

И. Е. ТАРАПОВ

Харьковский государственный университет, Харьков

Получено 20.09.98

В работе формулируются основные законы и уравнения движения однофазной сплошной среды переменной массы. Рассмотрены и приведены решения некоторых основных гидромеханических задач, в частности задачи движения среды переменной массы по бесконечным каналам, задачи внешнего обтекания тел с проницаемой поверхностью. Сформулирована также система уравнений для среды переменной массы, взаимодействующей с электромагнитным полем в нерелятивистском приближении.

В роботі сформульовано основні закони і рівняння руху однофазного суцільного середовища змінної маси. Розглянуто і наведено рішення деяких основних гідромеханічних задач, зокрема задачі руху середовища змінної маси по нескінченим каналам, задачі зовнішнього обтікання тіл з проникною поверхнею. Сформульована також система рівнянь для середовища змінної маси, що взаємодіє з електромагнітним полем в нерелятівістському набліженні.

Basis laws and main equations of motion for a single-phase continuous medium of variable mass are formulated. The solutions of some hydromechanic problems are presented. In particular, the problems of motion for a medium of variable mass along the infinite channels and the problems of external flow of bodies with permeable surface. The system of equations for the medium of variable mass interacting with electromagnetic field in nonrelativistic approximation is stated.

ВВЕДЕНИЕ

В статье сформулированы основные уравнения, определяющие движение сплошной среды с распределенными источниками массы, импульсов и энергии. На основании этих уравнений автор вместе со своими коллегами рассмотрел ряд основных задач о движении такой среды, в частности - жидкостей и газов. Новые решения этих задач, равно как и обзор ранее рассмотренных, и приведены в настоящей статье.

В механике сплошной среды переменной массы изучается движение сплошной однокомпонентной среды при тех же допущениях, постулатах и принципах, что и в обычном рассмотрении. Отличием является допущение о существовании в среде источников массы среды, а также возможность в связи с этим появления источников импульса и энергии. Источники могут быть и стоками. Таким образом, предполагается, что среда как система может обмениваться массой "своей" природы, импульсом и энергией с другими системами через источники (стоки). В силу этого мы вправе определить рассматриваемую модель как сплошную среду переменной массы.

Источники (стоки) могут быть распределены по среде непрерывным образом либо быть дискретными. В случае непрерывного распределения мы будем обозначать их объемные интенсивности как $q(\vec{r},t)$, $\vec{\gamma}(\vec{r},t)$, $\varepsilon(\vec{r},t)$ - массы, импульса и энергии соответственно. В случае, когда источники будут сосредоточены в точках $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N$, будем считать, что эти функции заданы в виде дельта-функций Дирака, что в случае декартовых координат (x, y, z) имеет вид

$$q(\vec{r},t) = \sum_{k=1}^{N} q_k(t)\delta(x-x_k)\delta(y-y_k)\delta(z-z_k).$$

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Для законов сохранения массы, количества движения и момента количества движения среды в области V, определяющей жидкий объем среды, имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \varrho dV = \int\limits_V q dV, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \varrho\vec{v} dV = \int\limits_V \varrho\vec{f} dV + \int\limits_S \vec{p}_n dS + \int\limits_V \vec{\gamma} dV, \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \{[\vec{r},\varrho\vec{v}] + \varrho\vec{l}\} dV = \int\limits_V [\vec{r},\varrho\vec{f}] dV + \int\limits_S [\vec{r},\vec{p}_n] dS +$$
$$+ \int\limits_V [\vec{r},\vec{\gamma}] dV + \int\limits_V \varrho\vec{M} dV + \int\limits_S \vec{\mathcal{M}}_n dS. \qquad (3)$$

Здесь: $\vec{p}_n$ -напряжение на площадке с нормалью $\vec{n}$; $\vec{l} = \vec{l}(\vec{r}, t)$ - внутренний момент количества движения; $\vec{M}$, $\vec{\mathcal{M}}_n$ - объемный и поверхностный внешние моменты, приложенные к среде. Функции $q(\vec{r}, t)$, $\vec{\gamma}(\vec{r}, t)$, $\epsilon(\vec{r}, t)$ считаются заданными с ограничениями, следующими из постулатов основных законов, а также из постановки задач. Конкретно об этом будет сказано в дальнейшем изложении. Так, прежде всего, мы принимаем их интегрируемость по области V.

Что касается постулата, определяющего закон изменения энергии в рассматриваемой сплошной среде переменной массы, то он выглядит несколько иначе, чем для обычной среды. А именно: изменение за единицу времени полной энергии среды переменной массы в жидком объеме равно мощности внешних сил и внутренних импульсов плюс притоку тепла и энергии из внутренних источников минус изменение кинетической энергии среды из-за переменности массы ее частиц.

Таким образом, закон изменения энергии для среды переменной массы постулируется в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \varrho(\frac{v^2}{2} + e)dV = \int\limits_V \varrho\vec{f}\cdot\vec{v}dV + \int\limits_S \vec{p}_n\cdot\vec{v}dS -$$

$$-\int\limits_S \vec{Q}\cdot\vec{n}dS + \int\limits_V \vec{\gamma}\cdot\vec{v}dV + \int\limits_V \varepsilon dV - \int\limits_V q\frac{v^2}{2}dV. \quad (4)$$

Здесь: $e(\vec{r}, t)$ - внутренняя энергия частиц; $\vec{Q}$ - вектор потока тепла.

Общие законы сохранения, требующие лишь интегрируемости подынтегральных функций, служат исходными для получения системы дифференциальных уравнений движения среды. При этом, как обычно, надо потребовать выполнение условий для применения теоремы Гаусса-Остроградского, а также непрерывности подынтегральных функций. Что касается использования дифференциальных уравнений для задания интенсивности источников в виде δ -функций, то мы будем считать, что переход к δ -функциям совершается уже в дифференциальных уравнениях движения среды.

Имея в виду эти замечания, из законов сохранения (1)-(4) получаем обычным образом

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \mathrm{div}\varrho\vec{v} = q.$$

$$\varrho\frac{d\vec{v}}{dt} + q\vec{v} = \varrho\vec{f} + \vec{p}^k_{;k} + \vec{\gamma},$$

$$\varrho\frac{d\vec{l}}{dt} + q\vec{l} = [\vec{e}_k, \vec{p}^k] + \varrho\vec{M} + \vec{\mathcal{M}}^k_{;k},$$

$$\varrho\frac{de}{dt} + qe = \vec{p}^k\cdot\vec{v}_{;k} + \mathrm{div}(\lambda\nabla T) + \varepsilon.$$

Здесь использовано:$\vec{p}_n = \vec{p}^k n_k$; $\vec{\mathcal{M}}_n = \vec{\mathcal{M}}^k n_k$; $\vec{Q} = -\lambda\nabla T$; а запись проведена для произвольной системы координат (x^k), в которой ковариантная производная по x^k обозначена индексом $(;k)$, причем $\vec{r}_{;k} = \vec{e}_k$ - базисный вектор рассматриваемой системы координат.

В классическом рассмотрении $(\vec{l} = \vec{M} = \vec{\mathcal{M}}_n = = 0)$ полная система дифференциальных уравнений движения среды переменной массы может быть записана в виде

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho\mathrm{div}\vec{v} = q; \qquad \varrho\frac{d\vec{v}}{dt} + q\vec{v} = \varrho\vec{f} + \vec{\gamma} + \vec{p}^k_{;k};$$

$$p^{ik} = p^{ki}; \varrho\frac{de}{dt} + qe = \vec{p}^k\cdot\vec{v}_{;k} + \mathrm{div}(\lambda\nabla T) + \varepsilon. \quad (5)$$

Замыкание системы для ньютоновских жидкостей и газов производится соотношением $p_{ik} = = -p\delta_{ik} + 2\mu \overset{\circ}{v}_{ik} + \zeta\delta_{ik}v_{ll}$ (в декартовой системе координат, где δ_{ik} - символ Кронекера, $v_{ik} = (\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i)/2$ - тензор скоростей деформаций, $\overset{\circ}{v}_{ik} = v_{ik} - \delta_{ik}v_{ll}/3$ - девиатор), причем $e = e(\varrho, T)$, $p = p(\varrho, T)$ определяются из термодинамики среды; λ, μ, ζ - коэффициенты теплопроводности, первой и второй вязкости, равно как и интенсивности q, $\vec{\gamma}$, ε предполагаются известными функциями. Импульс можно представить в виде $\vec{\gamma} = \vec{u}(\vec{r}, t)q$, где $\vec{u}-$ скорость выброса (поглощения) массы каждой частицы, так что при $\vec{u} = 0$ источники неподвижны, а при $\vec{u} = \vec{v}-$ движутся вместе с частицами среды.

Таким образом, система (5) служит для определения пяти скалярных функций ϱ, T, v_k при соответствующих граничных и начальных условиях, которые, вообще говоря, ничем не отличаются от обычных. В задачах для среды с внутренними источниками массы естественно рассматривать твердые границы проницаемыми и способными испускать (поглощать) среду, поскольку приток (отток) массы из внутренних источников должен быть компенсирован потоком через твердые стенки.

2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ. ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА ЭНТРОПИИ

Однокомпонентная однофазная сплошная среда с источниками (стоками) массы, сплошь заполняющая пространственную область V, должна рассматриваться как открытая (незамкнутая) термодинамическая система, обменивающаяся массой с другими системами.

Для такой среды внутренняя энергия E является функцией не только энтропии S, объема V, но и массы M этой системы, так что $E = E(S, V, M)$.

Тогда

$$dE = TdS - pdV + \mu dM,$$

где T - температура, p - давление, μ - химический (массовый в данном случае) потенциал системы.

Переходя к удельным величинам s, ϱ^{-1}, e, согласно соотношениям $s = S/M$, $\varrho^{-1} = V/M$, $e = E/M$, получаем

$$Tds = de + pd\frac{1}{\varrho} - (\mu - \frac{p}{\varrho} - e + Ts)\frac{dM}{M}. \qquad (6)$$

Для рассматриваемой термодинамической системы в силу уравнения (1) и произвольности объема V имеем

$$\frac{dM}{M} = \frac{(\int\limits_V qdV)dt}{\int\limits_V \rho dV} = \frac{q}{\varrho}dt. \qquad (7)$$

Примем, как обычно, что справедлив принцип локального равновесия. При его выполнении термодинамика равновесных состояний, в которой все параметры однородны по пространству и не зависят от времени, применима приближенно для неравновесных состояний любой частицы среды и, следовательно, любого ее объема V. При этом сохраняется уравнение состояния $f(e, p, T) = 0$. Следовательно, во всех термодинамических соотношениях следует считать все параметры независящими от времени. Для соотношения (6) в силу (7) это может быть только при условии

$$\mu - \frac{p}{\rho} - e + Ts = 0.$$

Отсюда получаем значение массового потенциала

$$\mu = \frac{p}{\rho} + e - Ts = w - Ts = \varphi, \qquad (8)$$

где w - энтальпия, φ - удельный термодинамический потенциал или удельная свободная энергия (по Гиббсу).

Таким образом, в силу выполнения уравнения (8) для однокомпонентной открытой системы, соотношение Гиббса имеет вид

$$Tds = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right). \qquad (9)$$

На основании уравнения энергии и соотношения Гиббса получим локальное уравнение баланса энтропии:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) = \frac{\phi}{T} + \frac{\lambda(\nabla T)^2}{T^2} + \frac{1}{T}\{\varepsilon + q(Ts - e - \frac{p}{\rho})\} -$$

$$-\mathrm{div}\{\rho\vec{v}s - \frac{\lambda\nabla T}{T}\},$$

где $\phi = 2\mu \overset{\circ}{v}{}_{ik}^{2} + \zeta v_{ll}^2$ – диссипативная функция. Таким образом, отсюда имеем для плотности производства энтропии выражение

$$\sigma(I_s) = \frac{\phi}{T} + \frac{\lambda(\nabla T)^2}{T^2} + \frac{1}{T}\{\varepsilon - q\varphi\}.$$

Три слагаемых в $\sigma(I_s)$ представляют собой плотности производства энтропии из-за: диссипативных процессов трения (ϕ/T), теплопроводности $\lambda(\nabla T)^2/T^2$ и обмена массой $(\varepsilon - q\varphi)/T$. На основании второго начала термодинамики

$$\{\frac{2\mu \overset{\circ}{v}{}_{ik}^{2} + \zeta v_{ll}^2}{T} + \frac{\lambda(\nabla T)^2}{T^2} + \frac{1}{T}(\varepsilon - q\varphi\} \geq 0.$$

Поскольку каждое слагаемое должно быть неотрицательно (ибо всегда можно выбрать такой режим движения, что отличным от нуля будет именно это слагаемое), то

$$\mu \geq 0, \quad \zeta \geq 0, \quad \lambda \geq 0; \quad \varepsilon \geq q\varphi.$$

Для рассматриваемой модели последнее неравенство есть ограничение на задаваемые функции $\varepsilon(\vec{r}, t)$, $q(\vec{r}, t)$. Заметим, что для обратимых процессов, т.е. когда и механизм образования источников (стоков) массы, определяющий обмен массой рассматриваемой системы с другими, можно считать обратимым, равенство

$$\varepsilon = q\varphi = q(e + \frac{p}{\rho} - Ts)$$

является определением величины интенсивности источников энергии $\varepsilon(\vec{r}, t)$.

Тогда из предыдущих уравнений имеем:

$$\rho\frac{de}{dt} = -p\mathrm{div}\vec{v} + \mathrm{div}(\lambda\nabla T) + q\left(\frac{p}{\rho} - Ts\right),$$

$$\rho T\frac{ds}{dt} = 2\mu \overset{\circ}{v}{}_{ik}^{2} + \zeta v_{ll}^2 + \mathrm{div}(\lambda\nabla T) - qTs. \qquad (10)$$

2.1. Модель сплошной среды переменной массы в некоторых практических задачах и общих теоремах гидромеханики

Прежде всего, стоит заметить, что рассматриваемая модель представляет теоретический интерес. Как известно, его чисто практическая сторона не всегда сразу очевидна. В этой связи стоит вспомнить известную в гидродинамике модель несжимаемой сплошной среды с непрерывным распределением мгновенных импульсов давления, т.е. когда $p(\vec{r},t)=\theta(\vec{r},\tau)\delta(\tau-t)$. Модель такой среды позволяет дать механическую интерпретацию потенциала движения среды, возникающего от такого экзотического распределения давления, а именно, потенциал $\varphi(\vec{r},t)=-\theta(\vec{r},t)/\rho$. Однако известно то блестящее практическое применение этой модели, на которое указал акад. М.А.Лаврентьев для распределения мощностей локальных взрывов при проектировании так называемых "направленных взрывов." Именно это в свое время значительно облегчило защиту г.Алма-Аты от селевого потока.

Применение аппарата δ–функций позволяет использовать дифференциальные уравнения для исследования потоков с сосредоточенными источниками массы, что делает практические результаты ценными в таких задачах, как течение у скважин, задачи фильтрации с источниками (стоками) массы, исследование потоков у дискретных источников в жидкости. Использование методов математического моделирования с помощью современных вычислительных средств делает эти задачи весьма интересными как с практической, так и с теоретической стороны. Один из примеров такой задачи (точечный источник в потоке вязкой жидкости между параллельными пластинами) буден дан ниже, где, пожалуй, впервые получены не только зоны безвихревого потока у источника, но и численно определен момент потери устойчивости ламинарного движения.

Наконец, можно указать на ряд задач, которые в той или иной степени позволяют использовать модель сплошной среды переменной массы, например: уравнение движения одной из фаз в многофазной среде, если движения остальных фаз можно считать известным; движение газа в плоскостях, перпендикулярных направлению расширения газа по оси z со скоростью $v_z=z/t$.

Отметим, что, по-видимому, впервые в учебной литературе уравнения движения жидкости с источниками массы приведены в учебнике Л.Г.Лойцянского. В Украине значительный вклад в исследование движения жидкостей и газов с источниками внесен Н.В.Салтановым и сотрудниками Института гидромеханики НАН Украины.

Исходя из вышеприведенных уравнений движения среды переменной массы, нетрудно получить несколько общих результатов. Так, условие динамической возможности движения вязкой жидкости переменной массы имеет вид

$$\mathrm{helm}\vec{\Omega}=\nu\Delta\vec{\Omega}+\mathrm{rot}\frac{1}{\rho}(\vec{\gamma}-q\vec{v}).$$

Обе теоремы А.Фридмана о сохраняемости векторных линий и интенсивности векторных трубок для поля $\vec{A}(\vec{r},t)$ имеют место и в среде переменной массы с непрерывным распределением источников массы $q(\vec{r},t)$.

Интегралы уравнений движения (Лагранжа, Громеки и Бернулли) существуют при тех же ограничениях, что и для обычной среды, но при дополнительном условии $\mathrm{rot}(\vec{\gamma}-q\vec{v})/\rho=0$.

Из теоремы импульсов для среды переменной массы можно получить выражение для силы, действующей на твердое тело, окруженное контрольной поверхностью S_o, в виде

$$\vec{R}=-\int\limits_{S_o}(\rho\vec{v}v_n-\vec{p}_n)dS+\int\limits_{V}\vec{\gamma}dV$$

при ограничении

$$\int\limits_{S_o}\rho v_n dS=\int\limits_{V}qdV,$$

где V – область течения между поверхностью тела S и поверхностью S_o.

Отсюда, в случае несжимаемой жидкости, имеющей на бесконечности скорость $\vec{v}_\infty$, получаем в обычных предположениях относительно убывания скорости в безвихревом потоке

$$\vec{R}=-\rho[\vec{v}_\infty,\int\limits_{S}[\vec{n},\vec{v}]dS]+\vec{J}-\vec{v}_\infty Q,$$

где

$$\vec{J}=\int\limits_{V}\vec{\gamma}dV;\qquad Q=\int\limits_{V}qdV.$$

В случае плоского контура аналогом формулы Жуковского служит выражение

$$\vec{R}=\rho[\vec{v}_\infty,\vec{\Gamma}]+\vec{J}-Q\vec{v}_\infty,$$

где $\vec{\Gamma}=\vec{i}_z\int\limits_L\vec{v}\cdot d\vec{L}$– циркуляция скорости по твердому непроницаемому контуру.

3. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Основная система дифференциальных уравнений (5) и (10), записанная в безразмерных переменных для рассматриваемого класса задач, имеет вид

$$\mathrm{div}\vec{v} = q, Re\{(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} + q\vec{v}\} = -\nabla(p - \frac{q}{3}) + \Delta\vec{v} + \vec{\gamma}, \quad (11)$$

$$Re\{\vec{v}\cdot\nabla T + qTlnT\} = 2M^2 \overset{\circ}{v}{}^2_{ik} + (Pr)^{-1}\Delta T,$$

где в качестве масштабов длины, объемной плотности источников массы, импульса, скорости, давления, температуры и энтропии приняты соответственно величины L_o, q_o, $q_o^2 L_o/\rho$, $V_o = q_o L_o/\rho$, $p_o = \mu q_o/\rho$, T_o, c (теплоемкость), причем $Re = q_o L_o^2/\mu$; $M = q_o L_o/\rho(cT_o)^{1/2}$; $Pr = \mu c/\lambda$; $\zeta = \vec{f} = 0$; $\overset{\circ}{v}_{ik} = ((\partial v_i)/(\partial x_k) + (\partial v_k)/(\partial x_i))/2 - \delta_{ik}v_{ll}/3 = v_{ik} - \delta_{ik}q/3$.

Поскольку λ, μ приняты постоянными, то последнее уравнение отщепляется от системы: p и $\vec{v}$ находятся из первых двух, а T- из последнего при известных $\vec{v}(\vec{r},t)$ и $T = T(\rho,p)$.

Заметим, что здесь, как обычно в модели несжимаемой среды, принято $s = c_p lnT$, что делает уравнение энергии нелинейным относительно T.

В дальнейшем сосредоточим свое внимание на рассмотрении уравнений для определения $\vec{v}$ и p :

$$\mathrm{div}\vec{v} = q;$$

$$Re\{(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} + q\vec{v}\} = -\nabla(p - \frac{1}{3}q) + \Delta\vec{v}, \quad (12)$$

принимая для простоты рассуждений, что $\vec{\gamma}$ либо равно нулю, либо вместе с $\vec{f} \neq 0$ имеет потенциал и включено в p.

Если $\vec{v}$ и p определяются в некоторой области V с границей S, то условием разрешимости системы (12), ограничивающим произвол в задании $q = q(\vec{r})$, является соотношение

$$\int\limits_V q dV = \int\limits_S \vec{v}\cdot\vec{n} dS. \quad (13)$$

Основные задачи из этого класса рассмотрены в работе [4]. В дополнение приведем решение для течения по сплошной трубе в случае сбалансированного по массе течения, т.е. когда избыток (убыль) массы от внутренних источников (стоков) $q = q(\xi^1,\xi^2)$ в жидкости компенсируется отсосом (вдувом) жидкости через проницаемые стенки с нормальной к ним скоростью $\alpha = \alpha(\xi)$ ($\xi-$ координата на контуре L поперечного сечения S_L бесконечной сплошной трубы). Для этой задачи, полагая

$$\vec{v} = u_o(\xi^1,\xi^2)\vec{e}_x + \vec{w}(\xi^1,\xi^2);$$

$$\vec{e}_x\cdot\vec{w} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial x} = p_{01} = \mathrm{const},$$

(ξ^1,ξ^2- координаты в плоскости поперечного сечения; ось (x) - ось трубы и $\vec{e}_x-$ орт этой оси), из (12) и (13) имеем:

$$\mathrm{div}\vec{w} = q; \quad \mathrm{div}\,(\nabla u_0 - u_0\vec{w}\mathrm{Re}) = p_{01};$$

$$\int\limits_L w_n dL = \int\limits_L \alpha dL = \int\limits_{S_L} q dS.$$

Выбирая $\vec{w}\mathrm{Re} = \nabla\Phi$, получаем для Φ внутреннюю задачу Неймана:

$$\Delta\Phi = q\mathrm{Re}; \qquad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_L = \alpha\mathrm{Re}; \qquad \int\limits_L \alpha dL = \int\limits_{S_L} q dS.$$

Если считать эту задачу для данной области решенной, то решение уравнения для u_0 удобно искать в виде

$$u_0 = \mathrm{e}^{\Phi}\int\limits_{\Phi_0}^{\Phi} \mathrm{e}^{-\Phi} F - (\Phi) d\Phi,$$

где $\Phi_0 = \Phi|_L$, а функция $F(\Phi)$ на основании уравнения для u_o удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{div}\,\{F(\Phi)\nabla\Phi\} = (\nabla\Phi)^2\frac{dF}{d\Phi} + \mathrm{Re}qF(\Phi) = p_{01}. \quad (14)$$

Считая $\Phi(\xi^1,\xi^2)$ известным, предположим, что можно найти функции $f_1(\Phi)$ и $f_2(\Phi)$ из соотношений $df_1/d\Phi = Req/|\nabla\Phi|^2$, $f_2(\Phi) = |\nabla\Phi|^{-2}$ Тогда в качестве $F(\Phi)$ выбираем частное решение неоднородного уравнения (14), обращающееся в нуль при $p_{01} = 0$ ($u_o = 0$ при $p_{01} = 0$), а именно:

$$F(\Phi) = p_{01}\exp[-f_1(\Phi)]\int f_2(\Phi)\exp[f_1(\Phi)]d\Phi.$$

Так, при $q\mathrm{Re} = 1$ имеем $f_2(\Phi) = f_1'(\Phi)$ и $F = p_{01}$, так что

$$u_0 = p_{01}\left(\mathrm{e}^{\Phi-\Phi_0} - 1\right),$$

где Φ – решение задачи Неймана (для заданных контура и скорости вдува α),

$$\Delta\Phi = 1; \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_L = \alpha \mathrm{Re}; \quad \int\limits_{L_S} \alpha dL = \frac{S}{\mathrm{Re}};$$

причем $\Phi_0 = \Phi|_L$.

Для распределения источников $q = q_1 r^m$ и соответственно скорости вдува $\alpha = q_1/(m+2)$, обеспечивающей баланс масс в каждом поперечном сечении, нетрудно написать решение задачи для сплошной круглой трубы единичного радиуса. В этом случае из (14) получаем

$$\Phi = a\left(r^{m+2} - 1\right);$$

$$F = \frac{p_{01}}{2(m+2)a^{2/(m+2)}}\left(a + \Phi\right)^{-2(m+1)/(m+2)};$$

$$\left(a = \mathrm{Re} q_1 (m+2)^{-2}\right);$$

так что

$$u_0 = \frac{p_{01} \mathrm{e}^{ar^{m+2}}}{2(m+2)a^{2/(m+2)}} \times$$

$$\times \left\{\gamma\left(\frac{2}{m+2}, ar^{m+2}\right) - \gamma\left(\frac{2}{m+2}, a\right)\right\},$$

где

$$\gamma(n,x) = \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-t} t^{n-1} dt$$

– неполная гамма-функция.

Отсюда, в частности, при $q = 1$ имеем решение, полученное в [4] непосредственно для круглой трубы:

$$u_0 = \frac{p_{01}}{\mathrm{Re}}\left\{\exp[-\frac{\mathrm{Re}}{4}(1 - r^2)] - 1\right\}.$$

3.1. Движение вязкой жидкости переменной массы в каналах, когда плотность источников массы меняется вдоль канала

В этом случае решение задачи (12)-(13) значительно усложняется и, по-видимому, может быть конструктивно получено в частных случаях и в основном путем численного моделирования. Это видно из нижеследующего примера задачи о течении жидкости между двумя бесконечными параллельными пластинами.

Эту задачу при $q = q(x,y)$ удается аналитически рассмотреть лишь в линейной постановке, т.е. найти первое приближение при $\mathrm{Re} \ll 1$. Для этого случая, полагая $\mathrm{Re} = 0$ в (12), получаем

$$\mathrm{div}\vec{v} = q(x,y); \quad \Delta\vec{v} = \nabla\left(p - \frac{1}{3}q\right). \qquad (15)$$

Пусть $q(x,y)$ и проницаемость стенок, характеризуемая возможным наличием на них нормальных скоростей $\alpha_0 = v_y(x,0)$, $\alpha_1 = v_y(x,1)$, отличны от нуля только в области $|x| < l \sim 1$.

Рассмотрим течение в прямоугольной области $|x| \le L$, где $L \gg 1$, $0 \le y \le 1$. Тогда на ее границе можно принять

$$v_y(\pm L, y) = 0; \qquad v_x(\pm L, y) = (p_0 \pm \sigma_0)\frac{y}{2}(y-1);$$

$$v_y(x,0) = \alpha_0(x); \qquad v_x(x,0) = 0; \qquad (16)$$

$$v_y(x,1) = \alpha_1(x); \qquad v_x(x,1) = 0.$$

Наличие пуазейлевского профиля продольной скорорсти при $x \ge L$ можно обосновать рассмотрением в этой области уравнений (15). При этом $p_0 = (\partial p/\partial x)_{|x| \ge L} = \mathrm{const}$ считается заданной величиной, а постоянная σ_0 определяется из условия разрешимости задачи, выражающего баланс масс в рассматриваемой области, а именно:

$$Q \equiv \int\limits_{-L}^{L}\int\limits_0^1 q dx dy = \int\limits_{-L}^{L}\left[\alpha_1(x) - \alpha_0(x)\right]dx +$$

$$+ \int\limits_0^1 \left[v_x(+L,y) - v_x(-L,y)\right]dy,$$

так что

$$\sigma_0 = 6\left\{\int\limits_{-L}^{L}\left[\alpha_1(x) - \alpha_0(x)\right]dx - Q\right\}. \qquad (17)$$

Из уравнений (15) можно получить

$$\Delta\Delta\vec{v} = \nabla q; \quad \Delta p = \frac{4}{3}\Delta q.$$

Однако ни для вектора $\vec{v}$, ни для p не хватает отдельно граничных условий.

Поэтому, опираясь на теорему Стокса - Гельмгольца, будем искать векторное поле $\vec{v}$ в виде суммы потенциального и соленоидального полей.

Пусть $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $p = p_1 + p_2$, причем rot $\vec{v}_1 = \mathrm{div}\vec{v}_2 = 0$.

Тогда задача разбивается на две.

ЗАДАЧА 1. $\mathrm{div}\vec{v}_1 = q$; $\Delta\vec{v}_1 = \nabla(p_1 - q/3)$. В силу $\vec{v}_1 = \nabla\varphi$ и $\Delta\varphi = q$ имеем $\Delta\vec{v}_1 = \nabla q$, так что $\nabla(p_1 - 4q/3) = 0$ и, следовательно, $p_1 = 4q/3$.

ЗАДАЧА 2. $\mathrm{div}\vec{v}_2 = 0$; $\Delta\vec{v}_2 = \nabla p_2$.

Здесь, принимая $p_2 = p_0 x + \mathrm{const}$, вводя функцию тока $\psi(x,y)$ для соленоидального вектора так, что $\vec{v}_2 = \left[\nabla\psi, \vec{i}_z\right]$, беря rot от обеих частей второго уравнения (15) и замечая, что $\mathrm{rot}\vec{v}_2 = -\Delta\psi\vec{i}_z$, получаем $\Delta\Delta\psi = 0$.

Итак,

$$\vec{v} = \nabla\varphi + \left[\nabla\psi, \vec{i}_z\right]; \quad p = \frac{4}{3}q + p_0 x + \mathrm{const},$$

причем φ и ψ находятся из уравнений

$$\Delta\varphi = q;$$

$$\Delta\Delta\psi = 0.$$

Граничные условия (16) разобъем между двумя слагаемыми скорости так, чтобы

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=0} = \alpha_0(x); \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=1} = \alpha_1(x);$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=\pm L} = \pm\frac{\sigma_0}{2}y(y-1). \qquad (18)$$

Тогда, если задача Неймана для функции $\varphi(x, y)$ решена, то бигармоническая функция из $\psi(x, y)$ может быть получена при условиях, следующих из (16) и (18):

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{y=1} = 0; \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{x=\pm L} = p_0\frac{y}{2}(y-1);$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=0} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{y=0}; \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{y=1} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{y=1};$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x=\pm L} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{x=\pm L}.$$

Решение задачи 1, полученное методом разделеления переменных, если

$$\alpha_1(x) = b_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}\cos\frac{\pi n}{2L}(x+L),$$

$$\alpha_0(x) = b_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n}\cos\frac{\pi n}{2L}(x+L),$$

$$q(x, y) = q(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(x)\cos\pi n y,$$

может быть записано в виде

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\left(b_{10} - b_{00}\right)\left(y^2 - x^2\right) + b_{00}y - \frac{Q}{2}x +$$

$$+\int Q_0(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{1n}(y)\cos\frac{\pi n}{2L}(x+L) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{2n}(x)\cos\pi n y.$$

Здесь:

$$\varphi_{1n}(y) =$$

$$= \frac{2L}{\pi n}\left(\mathrm{sh}\,\frac{\pi n}{2L}\right)^{-1}\left\{b_{1n}\mathrm{ch}\,\frac{\pi n y}{2L} - b_{0n}\mathrm{ch}\,\frac{\pi n}{2L}(1-y)\right\};$$

$$\varphi_{2n}(x) = \sigma_0\frac{1+(-1)^n}{(\pi n)^3}\,\frac{\mathrm{ch}\,\pi n x}{\mathrm{sh}\,\pi n L} + f_n(x) -$$

$$-f'_n(L)\frac{\mathrm{ch}\,\pi n(x+L)}{\pi n\mathrm{sh}\,2\pi n L};$$

$$f_n(x) = \frac{2}{\pi n}\int\limits_{-L}^{x}\left[\int\limits_{0}^{1} q(\xi, \eta)\cos\pi n\eta d\eta\right]\mathrm{sh}\,\pi n(x-\xi)d\xi;$$

$$\left(f'_n(x) \equiv \frac{df_n}{dx}\right);$$

$$Q_0(x) = \int\limits_{-L}^{x} q_0(\xi)d\xi; \quad (Q_0(L) = Q).$$

Отсюда дифференцированием получаем v_{1x} и v_{1y}, компоненты вектора $\vec{v}_1$.

Что касается задачи 2, то удобно ввести функцию $\psi^*(x, y) = \psi - p_0\left(y^3/6 - y^2/4\right)$, которая на контуре обращается в нуль. Тогда для этой функции имеем задачу Дирихле:

$$\Delta\Delta\psi^* = 0;$$

$$\psi^*(x, 0) = \psi^*(x, 1) = \psi^*(\pm L, y) = 0; \qquad (19)$$

$$\left.\frac{\partial\psi^*}{\partial y}\right|_{y=0} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{y=0} \equiv F_0(x);$$

$$\left.\frac{\partial\psi^*}{\partial y}\right|_{y=1} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{y=1} \equiv F_1(x); \qquad (20)$$

$$\left.\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right|_{x=\pm L} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{x=\pm L} \equiv F_\pm(y).$$

Здесь:

$$F_0(x) = -Q_0(x) + \frac{Q}{2} + \frac{1}{2}\left(Q + \frac{\sigma_0}{6}\right)\frac{x}{L} - \sum_{n=1}^{\infty}\varphi'_{2n}(x);$$

$$F_1(x) = -Q_0(x) + \frac{Q}{2} + \frac{1}{2}\left(Q + \frac{\sigma_0}{6}\right)\frac{x}{L} -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\varphi'_{2n}(x)(-1)^n;$$

$$F_\pm(y) = (b_{10} - b_{00})y + b_{00} + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi'_{2n}(y)\left\{\begin{array}{c}(-1)^n\\ 1\end{array}\right\} -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\pi n\varphi_{2n}(\pm L)\sin\pi ny.$$

Если в качестве ψ^* взять функцию

$$\psi^*=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(y)\sin\frac{\pi n(x+L)}{2\pi}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}B_n(x)\sin\pi ny \qquad (21)$$

и подчинить коэффициенты условиям $A_n(0) = A_n(1) = B_n(\pm L) = 0$, что позволяет удовлетворить условиям (19), то выполнение условий (20) приводит к соотношениям

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n'(0)\sin\frac{\pi n(x+L)}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\pi nB_n(x)=F_o(x);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n'(1)\sin\frac{\pi n(x+L)}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\pi n(-1)^nB_n(x)=F_1(x);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n(y)\frac{\pi n}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n'(-L)\sin\pi ny=F_-(y); \qquad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n(y)\frac{\pi n}{2\pi}(-1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}B_n'(L)\sin\pi ny=F_+(y).$$

Здесь $A_n(y)$ и $B_n(x)$ получаются как решения обыкновенных дифференциальных уравнений при подстановке (21) в бигармоническое уравнение и имеют выражения:

$$A_n(y)=(\mathrm{ch}\overline{n})^{-1}\{C_{1n}\frac{y\mathrm{sh}\overline{n}(y-1)}{\overline{n}}+$$

$$+C_{2n}\frac{\mathrm{ch}\overline{n}\mathrm{sh}\overline{n}y-y\mathrm{sh}\overline{n}\mathrm{ch}\overline{n}y}{\overline{n}^3}\};$$

$$B_n(x)=(\mathrm{ch}\underline{n})^{-2}\{D_{1n}(x\mathrm{sh}\pi nx\mathrm{ch}\underline{n}-L\mathrm{sh}\underline{n}\mathrm{ch}\pi nx)+$$

$$+D_{2n}(L\mathrm{sh}\pi nx\mathrm{ch}\underline{n}-x\mathrm{sh}\underline{n}\mathrm{ch}\pi nx)\},$$

$$(\overline{n}\equiv\frac{\pi n}{2L};\quad \underline{n}=\pi nL).$$

Подставляя эти выражения в (22) и интегрируя первые два соотношения по x в пределах $(-L,+L)$, а вторые - по y от 0 до 1, получаем бесконечную линейную систему уравнений относительно постоянных C_{1n}, C_{2n}, D_{1n}, D_{2n}. Эта система имеет громоздкий вид и здесь не приводится. Заметим, что ее решение исчерпывает аналитическое решение задачи, которое можно записать в виде:

$$v_x(x,y,L)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{p_o}{2}y(y-1)+\frac{\partial\psi^*}{\partial y},$$

$$v_y(x,y,L)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x},\qquad p=\frac{4}{3}q+p_ox+\mathrm{const}.$$

3.2. Метод моделирования для дискретных источников массы в потоке вязкой жидкости между двумя бесконечными пластинками

Из предыдущего видно, насколько громоздко и затруднительно аналитическое решение сформулированной выше задачи даже в линейной постановке. Задача, по-видимому, является вычислительной по своей сути. В случае дискретных источников может быть использован метод математического моделирования, разработанный для этой задачи в дипломной работе М.В.Пакки. Этот метод позволяет решить задачу и в нелинейной постановке, т.е. при произвольных числах Re, что, в свою очередь, дает возможность оценить критическое число Re, определяющее область устойчивости ламинарного движения.

Пусть изолированный источник мощностью q_o находится в точке (x_0, y_0) между параллельными бесконечными пластинами, имеющими скорости β_1 и β_0 (рис. 1).

Рассмотрим область $\Omega = (-L, L) \times (0,1)$ и область $\Omega_1 : |x| \geq L \gg 1; 0 \leq y \leq 1$; в области Ω проведен разрез, изолирующий источник. Тогда в этих областях $\mathrm{div}\vec{v} = 0$, так что можно ввести функцию тока, которая, как известно, удовлетворяет уравнению

$$Re\{\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\psi\frac{\partial\psi}{\partial y})-\frac{\partial}{\partial y}(\Delta\psi\frac{\partial\psi}{\partial x})\}=\Delta\Delta\psi. \qquad (23)$$

В области $|x| \geq L$, т.е. вдали от источника, можно принять

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\alpha;$$

где α - постоянная скорость "продува". Тогда в этой области $\psi(x,y) = -\alpha x + \psi_*(y)$, где $\psi_*(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^4\psi_*}{dy^4}=\alpha Re\frac{d^3\psi_*}{dy^3}$$

с граничными условиями

$$\psi_*'(0)=\beta_0;\quad \psi_*'(1)=\beta_1;\quad \psi_*(0)=0;\quad \psi_*(1)=\pm Q,$$

$Q_\pm$ - заданные расходы среды между пластинами при $x = \pm L$.

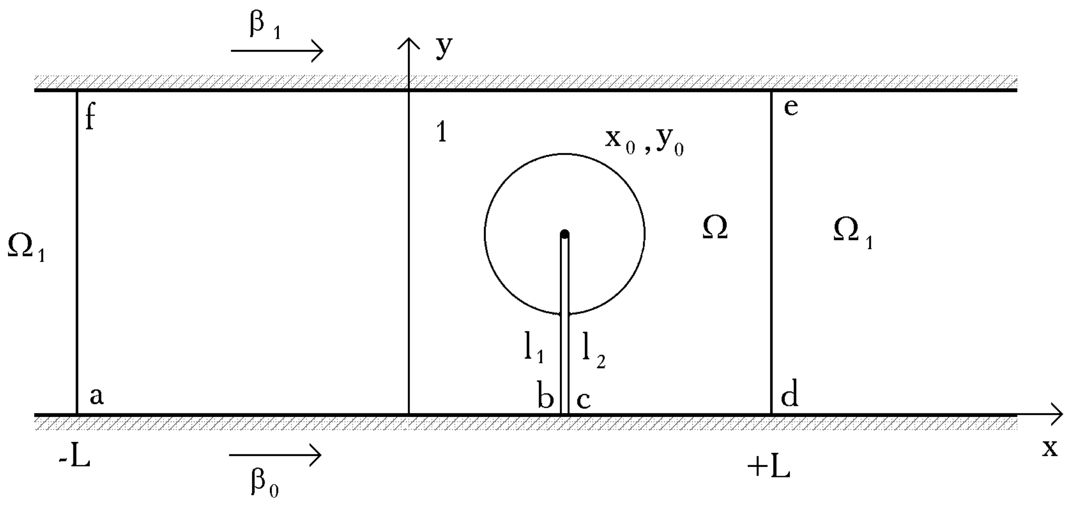

Рис. 1. Область интегрирования течения вязкой жидкости с изолированными источниками (стоками)

Решение для $\psi(x,y)$ можно записать в виде:

$$\psi = k(e^{ay}-1)+by^2+Cy-\alpha x+C_\pm, \quad (|x|\geq L) \quad (24)$$

где $k=(\beta_0+\beta_1-2Q_\pm)/((a-2)(\exp(a)-1)+2a)$; $a=\alpha Re$; $b=-\beta_0+Q_\pm+k(1+a-\exp(a))$; $C=\beta_o-ka$; постоянные $C_\pm$ связаны соотношением $C_- - C_+ = q_o$, причем Q_-, C_- относятся к области $x\leq -L$, а Q_+, C_+ - к области $x\geq +L$.

Из физического смысла функции тока следует, что скачок ее значения на разных берегах разреза равен расходу через контур, изолирующий источник, т.е. q_o. Таким образом, используя выражение (24) и зная скачок ψ на берегах разреза, можно установить значения ψ и ее нормальных производных на всех границах области $(+L,-L)\times(0;1)$ с "вырезанным" источником. Следует, конечно, учесть, что на берегах разреза производные от ψ непрерывны, ибо непрерывны скорости потока.

Итак имеем:

$$\psi|_{cd}=-\alpha x; \quad \psi|_{de}=k(e^{ay}-1)+by^2+Cy-\alpha L;$$

$$\psi|_{ef}=-\alpha x+Q_+;$$

$$psi|_{fa}=k(e^{ay}-1)+by^2+Cy+\alpha L+q_o;$$

$$\psi|_{ab}=-\alpha x+q_o;$$

$$\psi|_{l_1}=\psi|_{l_2}+q_o; \quad \nabla\psi|_{l_1}=\nabla\psi|_{l_2}; \quad (25)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}|_{ad}=\beta_o; \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}|_{ef}=\beta_1; \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}|_{af}=\frac{\partial\psi}{\partial x}|_{ed}=-\alpha.$$

Теперь уравнение (23) можно численно проинтегрировать в области с разрезом при граничных условиях (25). Результаты численного расчета при различных числах Re и $\alpha=0$ для одного источника и стока, расположенных в начале координат, приведены на рис. 2 и 3, где изображены линии постоянной завихренности.

Анализ расчетов показывает, что в обоих случаях (стока и источника) при некотором числе Re нарушается первоначальная симметрия потока, что свидетельствует о потере устойчивости ламинарного движения. Это позволяет без специального исследования устойчивости численно оценить критическое число Re^*: в случае источника $Re^*\approx 220$, а в случае стока - значительно меньше - $Re^*\approx 19$. Перед наступлением потери устойчивости у источника (см. рис. 2) образуется расширяющаяся область нулевой завихренности (рис. 2, *а – в*), т.е. в окрестности источника возникает потенциальный поток, где силы инерции вследствие больших скоростей велики по сравнению с силами вязкости. Такой области у стока нет (см. рис. 3), но перед поторей устойчивости линии тока у стока "закручиваются", в то время как у источника о потере устойчивости свидетельствует распад зоны потенциального потока (см. рис. 2, *г*).

3.3. Стационарное обтекание тел несжимаемой жидкостью переменной массы

Основные уравнения для определения $\vec{v}$ и p в стационарном потоке, обтекающем неподвижное тело с поверхностью S (вообще говоря, проницаемой) и имеющем на бесконечности скорость $\vec{v}_\infty$, приобре-

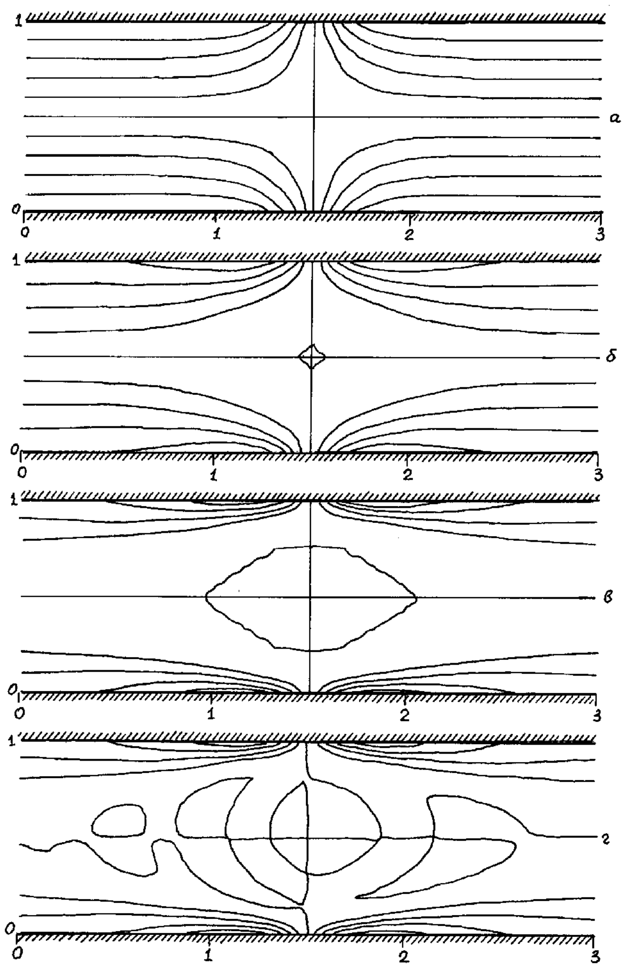

Рис. 2. Линии постоянной завихренности в потоке вязкой жидкости у изолированного источника при различных числах Рейнольдса

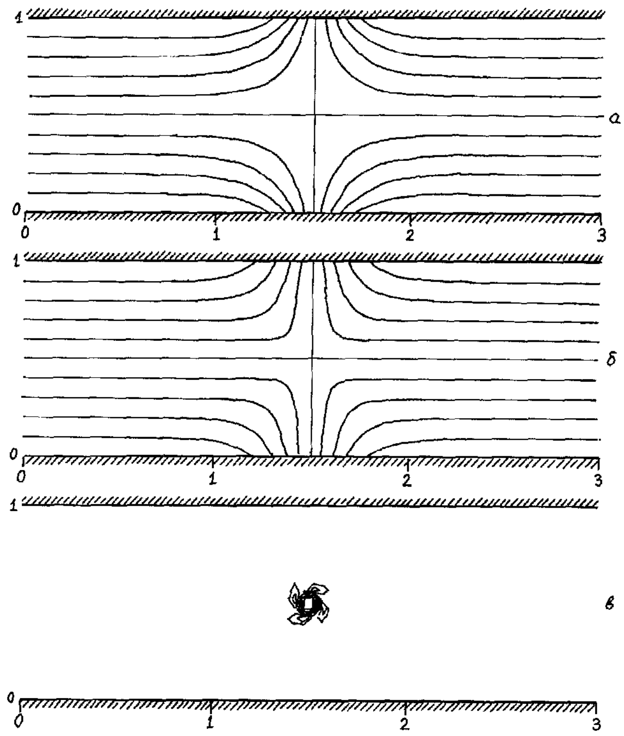

Рис. 3. Линии постоянной завихренности в потоке вязкой жидкости у изолированного стока при различных числах Рейнольдса

тают вид (ср. (11)):

$$\mathrm{div}\vec{v} = q; \tag{26}$$

$$Re\{(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} + q\vec{v}\} = -\nabla(p - \frac{1}{3}q) + \Delta\vec{v} + \vec{\gamma}.$$

Граничные условия:

$$\vec{v}|_{\vec{r}\to\infty} = \vec{v}_\infty; \quad \vec{v}\cdot\vec{n}|_S = f(\vec{r}_S);$$

$$\vec{v}_\tau|_S = 0; \quad p|_{r\to\infty} = p_\infty. \tag{27}$$

Тело занимает в потоке область V, так что условие разрешимости поставленной задачи имеет вид

$$-\int\limits_S \vec{v}\cdot\vec{n}dS = \int\limits_{V^\infty} qdV$$

или

$$-\int\limits_S f(\vec{r}_S)dS = \int\limits_{V^\infty} qdV, \tag{28}$$

где под V^∞ понимается внешность области V, т.е. вся область, занимаемая потоком, а $f(\vec{r}_S)$– нормальная в каждой точке поверхности скорость истечения ($f > 0$) (или отсоса при $f < 0$) жидкости в поток ($\vec{n}$ в выражениях (27) и (28) – внешняя к поверхности тела нормаль). Заметим, что вместо одного тела можно рассматривать в данной постановке систему тел: это принципиально нового в задачу ничего не внесет. Поверхность S может быть проницаемой полностью или частично, так что через нее поток может обмениваться массой среды той же природы, что и в потоке, с другими системами. "Условие разрешимости" (28) означает, что если во внешней области источники (стоки) массы взаимно не компенсируются (интеграл справа в (28) отличен от нуля), то поверхность тела обязательно должна быть проницаемой для жидкости.

Для определения скоростного поля задачи (26)-(27) воспользуемся теоремой Стокса-Гельмгольца о разложении непрерывного поля, исчезающего на бесконечности, на безвихревую и соленоидальную части. В соответствии с этим будем отыскивать

$\vec{v}$ (фактически - вектор $\vec{v}-\vec{v}_\infty$) в виде слагаемых

$$\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2,$$

где $\mathrm{rot}\vec{v}_1=\mathrm{div}\vec{v}_2=0$.

Граничные условия (27) распределим по слагаемым следующим образом:

$$\vec{v}_1|_\infty=0;\;\; \vec{v}_2|_\infty=\vec{v}_\infty;\;\; \vec{v}_1\cdot\vec{n}|_S=f(\vec{r}_S);\;\; \vec{v}_2\cdot\vec{n}|_S=0.$$

Тогда для определения поля $\vec{v}_1$ достаточно первого уравнения (26), ибо в силу rot $\vec{v}_1=0$ имеем $\vec{v}_1=\nabla\varphi$ и, следовательно,

$$\Delta\varphi=q;\;\; \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S=f(\vec{r}_S);\;\; \nabla\varphi|_\infty=0$$

при условии (28).

Таким образом, $\vec{v}_1$ определяется после решения задачи Неймана для внешности области V, занимаемой телом. Это решение можно записать, если известна функция Грина, в виде

$$-\pi m\varphi(M_o)=\int\limits_{V^\infty}G(M_o;M)q(M)dV+$$

$$+\int\limits_S G(M_o;M_S)f(M_S)dS,$$

где $G(M_o;M)-$ функция Грина для внешности V^∞.

Из условия регулярности решения этой задачи в бесконечно-удаленной точке следует ограничение на поведение $q(\vec{r})$ на бесконечности, а именно: $q(R)=O(R^{-2-\alpha})$ - для плоских задач ($m=2$), и $q(R)=O(R^{-3-\alpha})$ - для пространственных задач ($m=4$), где $\alpha>0$.

Решение этой задачи может быть проведено и другими методами, например, методом разделения переменных, поскольку сама задача получения функции Грина для "нестандартных" областей может встретить значительные трудности.

Если считать поле $\vec{v}_1(\vec{r})$ найденным, то тогда вектор $\vec{v}_2$ находится из системы

$$\mathrm{div}\vec{v}_2=0,$$

$$Re\{q(\vec{v}_1+\vec{v}_2)-[(\vec{v}_1+\vec{v}_2),\mathrm{rot}\vec{v}_2]\}=$$

$$=\vec{\gamma}-\nabla(p-\frac{4}{3}q-\frac{1}{2}(\vec{v}_1+\vec{v}_2)^2)+\Delta\vec{v}_2 \qquad (29)$$

при граничных условиях

$$\vec{v}_2\cdot\vec{n}|_S=0;\;\; \vec{v}_2|_\infty=\vec{v}_\infty;\;\; \vec{v}_{2\tau}|_S=-\vec{v}_{1\tau}|_S.$$

Решение этой задачи принципиально не отличается от нахождения течения обычной вязкой жидкости у непроницаемого твердого тела с заданной касательной компонентой скорости $\vec{v}_{2\tau}$ на поверхности. При этом давление в такой жидкости будет отличаться на $4q/3$ и в инерционных слагаемых появятся линейные относительно $\vec{v}_2$ слагаемые.

Все трудности решения этой задачи, связанные с нелинейностью уравнения движения, остаются, так что решения без численных приемов или математического моделирования могут быть получены, по-видимому, только в приближении $Re\ll 1$.

В случае плоских потоков, когда $\mathrm{rot}\vec{v}_2=-\vec{i}_z\Delta\psi$; $\vec{v}_2=[\nabla\psi,\vec{i}_z]$, где $\psi=\psi(x,y)-$ функция тока, из уравнения (29) имеем

$$Re\{q\Delta\psi+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi-$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi\}=\Delta\Delta\psi-\mathrm{rot}_z(\vec{\gamma}-Req\vec{v}),$$

$$\mathrm{rot}_x(\vec{\gamma}-Req\vec{v})=\mathrm{rot}_y(\vec{\gamma}-Req\vec{v})=0.$$

Если считать, что вектор $\vec{\gamma}-Req\vec{v}$ имеет потенциал, то первое уравнение (бигармоническое, нелинейное с линейной частью, зависящей от Re) определяет функцию тока вихревого движения.

В качестве примера рассмотрим обтекание сферы в приближении Стокса. В этом приближении из уравнения (26) имеем (принято $\vec{\gamma}=0$):

$$\mathrm{div}\vec{v}=q;\quad \nabla(p-\frac{1}{3}q)=\Delta\vec{v},$$

$$-\int\limits_{V^\infty}qdV=\int\limits_{S_R}f(\vec{r}_s),dS, \qquad (30)$$

где $V^\infty-$ внешность шара радиуса R, а S_R- его поверхность.

Для слагаемых $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ имеем

$$\mathrm{div}\vec{v}_1=q,\quad \vec{v}_1=\nabla\varphi,\quad \Delta\varphi=q, \qquad (31)$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R}=f(R,\theta,\varphi);\;\; \nabla\varphi|_\infty=0,$$

$$\int\limits_{V^\infty}qdV=-\int\limits_{S_R}f(R,\theta,\varphi)dS;$$

$$\mathrm{div}\vec{v}_2=0,\quad \vec{v}_2|_{r\to\infty}=v_\infty\vec{i}_x,$$

$$\vec{v}_{2\tau}|_{r=R}=-\vec{v}_{1\tau}|_{r=R}, \qquad (32)$$

$$\Delta\Delta\vec{v}_2=0,\quad \vec{v}_2\cdot\vec{n}|_{r=R}=0.$$

В приближении Стокса считается, что обтекание сферы происходит плоским потоком, так что в сферических координатах (r,φ,θ) отличны от нуля лишь компоненты скорости $v_r(r,\theta)$ и $v_\theta(r,\theta)$, и, следовательно, $\varphi = \varphi(r,\theta)$. Тогда для определения φ имеем уравнение (в сферических координатах):

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}) = q,$$

так что рассматриваемое приближение может быть получено лишь для $q = q(r,\theta)$.

Решение этого уравнения (определение $\vec{v}_1$) в дальнейшем проведем методом разделения переменных.

Здесь, как и при обтекании цилиндра, конкретный вид $q(r,\theta)$ будет зависеть от вида приближенного решения $\vec{v}_2(r,\theta)$ в силу условия, накладываемого на касательную компоненту $\vec{v}_{2\tau}$. Поэтому начнем с определения слагаемого $\vec{v}_2$.

Как известно, соленоидальный бигармонический вектор $\vec{v}_2$ из задачи (32) можно искать в виде

$$\vec{v}_2 = c_1\frac{\vec{v}_\infty}{r} + c_2\nabla\frac{\vec{v}_\infty\cdot\vec{r}}{r^3} + c_1\vec{r}\frac{\vec{v}_\infty\cdot\vec{r}}{r^3} + \vec{v}_\infty,$$

где c_1, c_2– постоянные.

Этот вектор, как нетрудно видеть, удовлетворяет условию $\mathrm{div}\vec{v}_2 = 0$.

Отсюда радиальная и трансверсальная компоненты скорости имеют вид

$$v_{2r} = v_\infty\cos\theta[1 + 2\frac{c_1}{r} - 2\frac{c_2}{r^3}],$$
$$v_{2\theta} = -v_\infty\sin\theta[1 + \frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{r^3}].$$

Из граничных условий и вида $v_{2\theta}$ следует, что $v_{1\theta}$ на сфере должна быть пропорциональна $\sin\theta$. Поэтому, полагая

$$\varphi(r,\theta) = \varphi_o(r) + \varphi_1(r)\cos\theta,$$

и определяя c_1, c_2 из граничных условий, получаем:

$$v_{2r} = v_\infty\cos\theta[1 - \frac{3}{2}\frac{R}{r} + \frac{R^3}{2r^3} - \frac{\varphi_1(R)}{v_\infty r}(1 - \frac{R^2}{r^2})],$$

$$v_{2\theta} = -v_\infty\sin\theta[1 - \frac{3}{4}\frac{R}{r} - \frac{R^3}{4r^3} - \frac{\varphi_1(R)}{2v_\infty r}(1 + \frac{R^2}{r^2})].$$

Условие разрешимости (30) приобретает вид

$$\int\limits_R^\infty\int\limits_0^\pi q(r)r^2dr\sin\theta d\theta = -4\pi R^2\left(\frac{d\varphi_o}{dr}\right)_{r=R}. \quad (33)$$

Для $\varphi_o(r)$ и $\varphi_1(r)$ получаем значения из (31), считая $q = q_o(r) + q_1(r)\cos\theta$, а именно:

$$\varphi_o = \int\frac{dr}{r^2}\int r^2q_o(r)dr + d_1 + d_2r^{-1},$$

$$\varphi_1 = \frac{r}{3}\int q_1(r)dr - \frac{1}{3r^2}\int q_1r^3dr + d_3r + d_4r^{-2}.$$

Постоянная d_1 может быть принята равной нулю, а $d_3 = 0$ в силу того, что $\vec{v}_1|_{r\to\infty} = 0$. Теперь из условия разрешимости (33) следует

$$[\int q_o(r)r^2dr]_{r\to\infty} = 0.$$

Ограничения на $q_1(r)$ следуют из условия $[\vec{v}_1]|_{r\to\infty} = 0$, т.е., например, если $q_1(r) \approx r^n$, $\varphi_1'(\infty) = 0$, то $n < -1$ и $n \neq -4$.

Для давления из уравнения (30) имеем

$$\nabla(p - \frac{1}{3}q) = \Delta\vec{v}_1 + \Delta\vec{v}_2 =$$
$$= \nabla q + 2c_1\nabla(\frac{\vec{v}_\infty\cdot\vec{r}}{r^3}).$$

Так что

$$p\Big|_{r=R} = p_o + \frac{4}{3}q_o(R) -$$
$$-\left(\frac{3R}{2} + \frac{\varphi_1(R)}{v_\infty} - \frac{4R^2q_1(R)}{3v_\infty}\right)\frac{v_\infty}{R^2}\cos\theta.$$

Вычисляем силу сопротивления R_x, действующую на сферу,

$$R_x = \int\limits_S(-p\mu\cos\theta + p_{rr}\cos\theta - p_{r\theta}\sin\theta)dS =$$

$$= 6\pi\mu Rv_\infty + \frac{2}{3}\pi R\mu[\int\limits^R q_1(r)dr -$$
$$-\frac{1}{R^3}\int\limits^R q_1r^3dr - \frac{2R}{3}q_1(R) + \frac{3d_4}{R^3}]. \quad (34)$$

Здесь $q_1(r)$– произвольная заданная функция, определяющая распределение источников (кстати, может быть и дискретное), а произвольная постоянная d_4, входит в выражение для функции $f(\theta,R)$, которая определяет заданное истечение из сферы:

$$f(\theta,R) = v_r\Big|_{r=R} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R} = \varphi_o'(R) + \varphi_1'(R)\cos\theta =$$

$$= \frac{1}{R^2}\int\limits^R r^2q_o(r)dr - \frac{d_2}{R^2} +$$
$$+[\frac{1}{3}\int\limits^R q_1(r)dr + \frac{2}{3R^2}\int q(r)dr - \frac{2d_4}{R^3}]\cos\theta.$$

Как следует из выражения (34), на R_x оказывает влияние лишь распределение источников $q_1(r)$ с ограничением $q_1(r) = O(r^{1+\alpha})$ при $\alpha > 0$, и постоянная d_4, которая может считаться известной, если задана функция $f(\theta, R)$. Так, в обычной вязкой жидкости ($q_o = q_1 = 0$), когда проницаемость сферы задана функцией

$$f(\theta, R) = f_1 \cos\theta = v_r|_{r=R},$$

для R_x получаем выражение

$$R_x = 6\pi\mu R v_\infty + \frac{2}{3}\pi R\mu \frac{3d_4}{R^3} = 6\pi\mu R v_\infty - \pi R\mu f_1.$$

Если в задней половине сферы ($-\pi/2 \le \theta \le +\pi/2$) осуществляется истечение жидкости из сферы в поток ($f_1 > 0$), а при $|\theta| > \pi/2$ задано $f_1 = 0$, то уменьшение силы сопротивления за счет реактивной силы истечения с нормальной к поверхности сферы скоростью f_1 равно $\pi R\mu f_1$. В случае $q_o \ne 0$ и $q_1 \ne 0$ изменение R_x по сравнению со стоксовым значением $6\pi\mu R v_\infty$ целиком определяется лишь характером $q_1(r)$ и значением $f(\theta, R)$.

4. СРЕДА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

4.1. Основные уравнения

Если среда переменной массы взаимодействует с электромагнитным полем $(\vec{E}, \vec{H})$ и способна не только проводить ток объемной интенсивности $\vec{j}$ и содержать объемные заряды плотностью ρ_e, но и изотропно намагничиваться и поляризоваться, так что векторы электрической и магнитной индукции приобретают в среде значения $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$, где $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, H)$ и $\mu = \mu(\rho, T, H)$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, то основные законы сохранения массы, количества движения и энергии могут быть записаны (см. [1], [5]) в следующем виде (объемные и поверхностные внешние моменты сил и внутренние моменты вращений приняты для упрощения выражений равными нулю):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho \mathrm{d}V = \int\limits_V q \mathrm{d}V,$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\vec{v}\mathrm{d}V = \int\limits_V \left(\rho\vec{f} + \rho\vec{f}^e + \vec{\gamma}\right)\mathrm{d}V + \int\limits_S \vec{p}_n \mathrm{d}S,$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V [\vec{r}, \rho\vec{v}]\,\mathrm{d}V = \int\limits_V \left[\vec{r}, \left(\rho\vec{f} + \rho\vec{f}^e + \vec{\gamma}\right)\right]\mathrm{d}V + \int\limits_S [\vec{r}, \vec{p}_n]\,\mathrm{d}S, \qquad (35)$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\left(\frac{v^2}{2} + e\right)\mathrm{d}V = \int\limits_V \left(\rho\vec{f} + \rho\vec{f}^e + \vec{\gamma}\right)\cdot\vec{v}\mathrm{d}V + \int\limits_S \vec{p}_n\cdot\vec{v}\mathrm{d}S - \int\limits_S \vec{Q}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S + \int\limits_V \varepsilon_q \mathrm{d}V - \int\limits_V q\frac{v^2}{2}\mathrm{d}V.$$

Здесь: $q, \vec{\gamma}, \varepsilon_q$ – интенсивности источников массы, импульса и энергии; $\vec{f}^e$ – массовая электромагнитная сила взаимодействия, имеющая в нерелятивистском приближении выражение

$$\vec{f}_e = \rho_e\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{j}, \vec{B}\right] - \nabla\left(\psi^{(\rho)} + \chi^{(\rho)}\right) + M\nabla H + P\nabla E,$$

где

$$\vec{j} = \rho_e\vec{v} + \sigma\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v}, \vec{B}\right]\right); \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M};$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P};$$

$$\psi^{(\rho)} = -\rho^2\int\limits_0^H \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{M}{\rho}\right)\mathrm{d}H;$$

$$\chi^{(\rho)} = -\rho^2\int\limits_0^E \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{P}{\rho}\right)\mathrm{d}E;$$

$$M(\rho, T, \vec{H}) = |\vec{M}|; \quad P(\rho, T, \vec{E}) = |\vec{P}|;$$

c – скорость света; σ – проводимость среды.

Эта система дополняется соотношением Гиббса, которое при сохранении принципа локального равновесия и обратимости процессов намагничивания и поляризации имеет вид

$$Tds = de + \left(p + \frac{\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}}{4\pi}\right)d\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{\vec{E}}{4\pi}\cdot d\left(\frac{\vec{D}}{\rho}\right) - \frac{\vec{H}}{4\pi}\cdot d\left(\frac{\vec{B}}{\rho}\right). \qquad (36)$$

Обычным путем из соотношений (35) и (36) получаем систему дифференциальных уравнений для исследования движения среды переменной массы в электромагнитном поле (магнитогидродинамическое приближение):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = q,$$

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} + q\vec{v} = -\nabla\left(p + \psi^{(\rho)}\right) + \frac{1}{4\pi}\left[\mathrm{rot}\vec{H}, \vec{B}\right] +$$

$$+M\nabla H+\mathrm{div}\hat{\tau}+\vec{\gamma},$$

$$\rho T\frac{ds_e}{dt}+qs_eT=\mathrm{div}(\lambda\nabla T)+\tau^i_j\nabla_iv^j+$$

$$+\frac{\nu_m}{4\pi}\left(\mathrm{rot}\vec{H}\right)^2, \qquad (37)$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\mathrm{rot}\left[\vec{v},\vec{B}\right]-\frac{1}{4\pi\sigma}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\vec{H};\quad \mathrm{div}\vec{B}=0,$$

где

$$s_e=s(\rho,T)+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\rho,H}\mathrm{d}H;$$

$\hat{\tau}$ – тензор вязких напряжений, причем $\tau_{ik}=\tau_{ki}$ и (см. (3)) принято $\vec{l}=\vec{\mathcal{M}}=\vec{M}=0$; $\nu_m=c^2/(4\pi\sigma)$. Принято также, что механизмы действия внутренних источников являются обратимыми, так что

$$\varepsilon_q=q\left(e+\frac{p}{\rho}-Ts\right).$$

4.2. Распространение малых возмущений

В статье [3] исследовано распространение звуковых волн в нейтральной неравновесной сжимаемой среде с непрерывно распределенными источниками массы. Здесь мы рассмотрим распространение плоских волн в идеальной ненамагничивающейся среде ($\mu=1$), если исходное равновесное состояние определяется следующими значениями: $\vec{v}_0=0$; $p_0=$const, $\rho_0=$const, $\vec{H}_0=$const, $s_0=q_0=\vec{\gamma}_0=0$.

Тогда из уравнений (37) относительно возмущений плотности $\rho'(\vec{r},t)$, скорости и магнитного поля $\vec{H}'(\vec{r},t)$ (при известных возмущениях $q'(r,t)$ и $\vec{\gamma}'(\vec{r},t)$) имеем линеаризованную систему

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\rho_0\mathrm{div}\vec{v}\,'=q',$$

$$\rho_0\frac{\partial\vec{v}\,'}{\partial t}=-{a_0}^2\nabla\rho'+\vec{\gamma}'+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\left[\left(\vec{H}_0\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{H}'-\nabla\left(\vec{H}_0\cdot\vec{H}'\right)\right], \qquad (38)$$

$$\frac{\partial\vec{H}'}{\partial t}=\left(\vec{H}_0\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}\,'-\vec{H}_0\mathrm{div}\vec{v}\,',$$

$$\mathrm{div}\vec{H}'=0,$$

причем $s'=0$; $p'={a_0}^2\rho'$; $\left({a_0}^2\equiv(\partial p/\partial\rho)_0\right)$; $d\Gamma/dt=0$, где Γ - циркуляция по любому замкнутому контуру.

Отсюда получаем в частности, если $\mathrm{rot}\vec{v}\,'=0$:

$$\frac{\partial^2\vec{v}\,'}{\partial t^2}-\left({a_0}^2+\frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}\right)\Delta\vec{v}\,'=\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\vec{\gamma}'}{\partial t}-a_0^2\nabla q'\right)+$$

$$+\frac{1}{4\pi\rho_0}\left[\left(\vec{H}_0\cdot\nabla\right)\left(\left(\vec{H}_0\cdot\nabla\right)\vec{v}\,'-\vec{H}_0\mathrm{div}\vec{v}\,'\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{4\pi\rho_0}\nabla\left(\vec{H}_0\cdot\left(\vec{H}_0\cdot\nabla\right)\vec{v}\,'\right).$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением плоских волн вида

$$\vec{v}\,'(x,t)=\vec{i}_xv'_x+\vec{\tau}v'_\tau,$$

$$\vec{H}'(x,t)=\vec{i}_xH'_x+\vec{\tau}H'_\tau,$$

причем $\vec{H}_0=H_{0x}\vec{i}_x+H_{0\tau}\vec{\tau}$. Для них $\mathrm{rot}\vec{v}\,'\neq0$, поскольку $\partial v'_\tau/\partial x\neq0$.

Тогда из уравнений (38) получаем

$$\frac{\partial^2v'_x}{\partial t^2}-\left(a_0^2+\frac{H_{0\tau}^2}{4\pi\rho_0}\right)\frac{\partial^2v'_x}{\partial x^2}=-\frac{H_{0x}H_{0\tau}}{4\pi\rho_0}\frac{\partial^2v'_\tau}{\partial x^2}+$$

$$+\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\gamma'_x}{\partial t}-a_0^2\frac{\partial q'}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2v'_\tau}{\partial t^2}-\frac{H_{0x}^2}{4\pi\rho_0}\frac{\partial^2v'_\tau}{\partial x^2}=-\frac{H_{0x}H_{0\tau}}{4\pi\rho_0}\frac{\partial^2v'_x}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\gamma'_\tau}{\partial t}.$$

Для дальнейшего анализа этой системы перепишем ее в виде

$$u_{tt}-a_1^2u_{xx}=-hv_{xx}+f,$$

$$v_{tt}-a_2^2v_{xx}=-hu_{xx}+\varphi, \qquad (39)$$

где обозначено

$$u\equiv v'_x,\quad v\equiv v'_\tau,\quad a_1^2=a_0^2+\frac{H_{0\tau}^2}{4\pi\rho_0},\ a_2^2=\frac{H_{0x}^2}{4\pi\rho_0},$$

$$h=\frac{H_{0x}H_{0\tau}}{4\pi\rho_0},\ f=\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\gamma'_x}{\partial t}-a_0^2\frac{\partial q'}{\partial x}\right),\ \varphi=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\gamma'_\tau}{\partial t},$$

а нижние индексы у u и v означают частное дифференцирование.

Введем изображение Фурье рассматриваемых функций по переменной (x), принимая, что при $x=\pm\infty$ сами функции и их производные по x исчезают.

Тогда для изображения $\tilde{u}(\xi,t)$ функции $u(x,t)$ получаем

$$\frac{d^4\tilde{u}}{dt^4}+(a_1^2+a_2^2)\xi^2\frac{d\tilde{u}}{dt^2}+\left(a_1^2a_2^2-h^2\right)\xi^4\tilde{u}=$$

$$=\frac{d^2\tilde{f}}{dt^2}+\xi^2a_2^2\tilde{f}+h\xi^2\tilde{\varphi}, \qquad (40)$$

а для $\tilde{v}$ получим аналогичное уравнение, в котором a_1 и a_2, $\tilde{f}$ и $\tilde{\varphi}$ меняются местами.

Пусть заданы для $v'_x(x,t)$ и $v'_\tau(x,t)$ начальные условия в виде

$$v'_x(x,0)=u_0(x) \quad v'_\tau(x,0)=v_0(x),$$
$$\left.\frac{\partial v'_x}{\partial t}\right|_{t=0}=u_{0t}(x) \quad \left.\frac{\partial v'_\tau}{\partial t}\right|_{t=0}=v_{0t}(x). \qquad (41)$$

Для изображений Фурье функций $u(x,t)\equiv v'_x(x,t)$ и $v(x,t)\equiv v'_\tau(x,t)$ получаем из уравнения (40) решения в виде:

$$\tilde u(\xi,t)=\tilde u^+(\xi,t)+\tilde u^-(\xi,t)+\tilde u_n(\xi,t),$$
$$\tilde v(\xi,t)=-k_1\tilde u^+(\xi,t)+k_2\tilde u^-(\xi,t)+\tilde v_n(\xi,t). \qquad (42)$$

Здесь $\tilde u_n(\xi,t)$,$\tilde v_n(\xi,t)$– частные решения неоднородных уравнений (40), выражения которых нетрудно выписать через правые части уравнений, используя хотя бы метод вариации произвольных постоянных;

$$\tilde u^+(\xi,t)=\frac{k_2}{k_1+k_2}\left[\left(\tilde U_0(\xi)-\frac{\tilde V_0(\xi)}{k_2}\right)\cos(\xi a_+t)+\right.$$
$$\left.+\left(\tilde U_{0t}(\xi)-\frac{\tilde V_{0t}(\xi)}{k_2}\right)\frac{\sin(\xi a_+t)}{\xi a_+}\right]$$
$$\tilde u^-(\xi,t)=\frac{k_1}{k_1+k_2}\left[\left(\tilde U_0(\xi)+\frac{\tilde V_0(\xi)}{k_1}\right)\cos(\xi a_-t)+\right.$$
$$\left.+\left(\tilde U_{0t}(\xi)+\frac{\tilde V_{0t}(\xi)}{k_1}\right)\frac{\sin(\xi a_-t)}{\xi a_-}\right];$$

$\tilde U_0(\xi)\equiv\tilde u_0(\xi)-\tilde u_n(\xi,0);\quad \tilde V_0(\xi)\equiv\tilde v_0(\xi)-\tilde v_n(\xi,0);$

$\tilde U_{0t}(\xi)\equiv\tilde u_{0t}(\xi)-\tilde u_{nt}(\xi,0);\ \tilde V_{0t}(\xi)\equiv\tilde v_{0t}(\xi)-\tilde v_{nt}(\xi,0),$

$k_1=(a_+^2-a_1^2)/h$; $k_2=(a_1^2-a_-^2)/h$; $\tilde u_0(\xi)$, $\tilde v_0(\xi)$, $\tilde u_{0t}(\xi)$, $\tilde v_{0t}(\xi)$ – изображения начальных функций $u_0(\xi)$, $v_0(\xi)$, $u_{0t}(\xi)$ и $v_{0t}(\xi)$ соответственно, а

$$\tilde u_{nt}(\xi,0)\equiv\left.\frac{\partial\tilde u_n}{\partial t}\right|_{t=0},\quad \tilde v_{nt}(\xi,0)\equiv\left.\frac{\partial\tilde v_n}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

Умножая решения (42) на $\exp(-i\xi x)$ и интегрируя по ξ в пределах $(-\infty,\infty)$, получаем решение системы (39), выраженное через начальные функции (41) и оригиналы $u_n(x,t)$, $v_n(x,t)$ частных решений дифференциальных уравнений (40) относительно изображений Фурье. Итак, окончательно имеем:

$$v'_x(x,t)=\frac{1}{2(k_1+k_2)}\Big\{k_2\left[U_0(x-a_+t)+U_0(x+a_+t)\right]+$$
$$+k_1\left[U_0(x-a_-t)+U_0(x+a_-t)\right]+$$
$$+V_0(x-a_+t)+V_0(x+a_+t)-$$
$$-V_0(x-a_-t)-V_0(x+a_-t)+$$
$$+\frac{k_2}{a_+}\int\limits_{x-a_+t}^{x+a_+t}U_{0t}(\eta)d\eta+\frac{k_1}{a_-}\int\limits_{x-a_-t}^{x+a_-t}U_{0t}(\eta)d\eta-$$
$$-\frac{1}{a_+}\int\limits_{x-a_+t}^{x+a_+t}V_{0t}(\eta)d\eta+\frac{1}{a_-}\int\limits_{x-a_-t}^{x+a_-t}V_{0t}(\eta)d\eta\Big\}+$$
$$+u_n(x,t),$$
$$v'_\tau(x,t)=$$
$$=\frac{1}{2(k_1+k_2)}\Big\{k_1k_2\Big[U_0(x-a_-t)+U_0(x+a_-t)-$$
$$-U_0(x-a_+t)-U_0(x+a_+t)\Big]+$$
$$+k_1\left[V_0(x-a_+t)+V_0(x+a_+t)\right]+$$
$$+k_2\left[V_0(x-a_-t)+V_0(x+a_-t)\right]+$$
$$+k_1k_2\left[\frac{1}{a_-}\int\limits_{x-a_-t}^{x+a_-t}U_{0t}(\eta)d\eta-\frac{1}{a_+}\int\limits_{x-a_+t}^{x+a_+t}U_{0t}(\eta)d\eta\right]+$$
$$+\frac{k_1}{a_+}\int\limits_{x-a_+t}^{x+a_+t}V_{0t}(\eta)d\eta+\frac{k_2}{a_-}\int\limits_{x-a_-t}^{x+a_-t}V_{0t}(\eta)d\eta\Big\}+v_n(x,t).$$

Здесь:

$U_0(x)=u_0(x)-u_n(x,0);\ V_0(x)=v_0(x)-v_n(x,0);$

$U_{0t}(x)=u_{0t}(x)-u_{nt}(x,0); V_{0t}(x)=v_{0t}(x)-v_{nt}(x,0);$

$$a_\pm^2=\frac{1}{2}\left[a_1^2+a_2^2\pm\sqrt{\left(a_1^2-a_2^2\right)^2+4h^2}\right];$$
$$k_1=\frac{a_+^2-a_1^2}{h}=-\frac{a_1^2-a_2^2}{2h}+\sqrt{1+\left(\frac{a_1-a_2}{2h}\right)^2};$$
$$k_2=\frac{a_1^2-a_-^2}{h}=\frac{a_1^2-a_2^2}{2h}+\sqrt{1+\left(\frac{a_1-a_2}{2h}\right)^2}.$$

Что касается $\rho'(x,t)$ и $H'_\tau(x,t)$, то выражения для них нетрудно написать из первого и последнего уравнений системы (38).

Заметим, что в среде переменной массы не существует альфвеновских волн, в которых $\rho'=v'_x=0$ при $H_{0\tau=0}$, ибо из системы (38) следует, что тогда необходимо $q'=\vec\gamma\,'=0$. Нет в этой среде и энтропийных волн, которые не распространяются относительно движущейся среды и в которых $p'=\vec H\,'=\vec v\,'=0$.

Результаты этого подраздела получены совместно с Д. В. Легейдой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Размеры статьи не позволили включить ряд материалов, полученных в последнее время и касающихся течений среды переменной массы между двумя параллельными пластинами в магнитном поле, а также работы по применению теоремы импульсов для определения силы, действующей на проницаемые тела в среде переменной массы. Тем не менее уже приведенные здесь решения дают возможность сделать вывод о практическом значении теоретических вопросов механики сплошной среды переменной массы. Эти вопросы могут найти прямое применение в производстве (теория гидродинамической смазки с вдувом (отсосом) смазки для уменьшения трения, течения у скважин в условиях фильтрации и др.), так и в задачах диффузии и химических реакций в биологически активных средах при облучении; некоторые результаты могут быть получены в рамках рассмотренной модели и при исследовании движения тел в среде, способных излучать (поглощать) эту среду, а также в ряде задач физико-химической гидромеханики.

1. *Tarapov I.Ye.* The motion of a continum with sources of mass, impulse and energy continuosly distributed // Proceedings of the Fifth International Conference of Fluid Mechanics.– Cairo, Egypt.– 1995.– С. 1286-1297.
2. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа.– М: Наука, 1973.– 736 с.
3. *Бурнаев Б.Е., Тарапов И.Е.* Звуковые волны в среде переменной массы // Математическая физика, анализ, геометрия.– 1995.– т.2, N3/4.– С. 399–407.
4. *Тарапов И.Е.* Течение вязкой несжимаемой жидкости с распределенными источниками массы по бесконечно длинным каналам с проницаемыми стенками // Математическая физика, анализ, геометрия.– 1997.– т.4, N4.– С. 491–506.
5. *Тарапов И.Е.* К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред // Магнитная гидродинамика.– 1972.– N1.– С. 3–11.
6. *Салтанов Н.В.* Аналитическая гидромеханика.– Киев: Наук. думка, 1984.– 200 с.
7. *Салтанов Н. В.* Аналитическая и прикладная гидромеханика // Прикладная гидромеханика. Сб. науч. трудов.– Киев: - Наук. думка.– 1989.– С. 145–168.