

УДК 532.593

# ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРУПП ВЕТРОВЫХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

А. Н. СЕРДЮЧЕНКО

*Украинский государственный морской технический университет, Николаев**Получено 20.06.99 ◊ Пересмотрено 26.09.99*

Приведены зависимости, описывающие гидродинамические характеристики – волновой профиль, поле гидродинамических давлений и поле скоростей частиц жидкости – в нерегулярных группах крупномасштабных волн в условиях морского волнения. Зависимости получены в рамках решения нелинейной краевой задачи теории волн на воде методом многих масштабов с точностью до малых пятого порядка по крутизне волн включительно. В общем случае, кроме основных эффектов нелинейности и нерегулярности волн, учтены также трехмерность волнения и действие заданного поверхностного давления ветрового потока. Для частного случая плоских свободных групп волн получены приближенные зависимости, удобные для практических расчетов воздействия ветровых волн на суда и морские сооружения. Рассмотрена также асимптотика для периодических прогрессивных волн Стокса.

Наведені залежності, які визначають гідродинамічні характеристики – хвильовий профіль, поле гідродинамічного тиску та поле швидкостей часток рідини – в нерегулярних групах великомасштабних хвиль в умовах морського хвилювання. Залежності отримані в рамках розв'язання нелінійної крайової задачі теорії хвиль на воді методом багатьох масштабів з точністю до малих п'ятого порядку по крутизні хвиль включно. В загальному випадку, крім основних ефектів нелінійності та нерегулярності, враховані також ефекти тривимірності хвилювання та дія поверхневого тиску вітрового потоку. Для часткового випадку плоских вільних груп хвиль отримані наближені співвідношення, зручні для практичних розрахунків реакцій суден та морських плавучих споруд на дію вітрових хвиль. Розглянута також асимптотика для періодичних прогресивних хвиль Стокса.

Expressions for hydrodynamic wave characteristics - wave surface, hydrodynamic pressure and particles velocity fields in weakly irregular and nonlinear large-scale wave groups in sea conditions are considered. These expressions have been derived by using the multi-scale technique for the solution of the nonlinear boundary value problem up to V-th order of the small parameter - wave steepness. In the general case of the solution, nonlinearity, irregularity, 3-D effects of wave groups and the action of of wind surface pressure were under the consideration. For the particular case of the free 2-D wave groups practical formulae – useful for the calculations of ship and offshore structure response under the wind wave action have been yielded. Additionally, the asymptotics for periodic progressive Stokes waves is presented.

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование нестационарных волн конечной амплитуды на воде является одним из активно развиваемых в настоящее время направлений в гидродинамике волновых движений. Интенсивно изучаются механизмы неустойчивости нелинейных волн, уравнения эволюции волн (уравнения Шредингера, Захарова, КдВ-уравнения и др.) и их решения, взаимодействие волн с другими полями и границами в океане, локальная гидродинамика опрокидывающихся волн конечной амплитуды [1–5] и др. В то же время, для нелинейных расчетов волновых нагрузок на суда и морские плавучие сооружения во временной области (nonlinear time-domain calculation [6–8]), которые постепенно приходят на смену линейным спектральным методам расчета, необходимо располагать зависимостями для гидродинамических характеристик видимых крупномасштабных волн в шторме - волновой поверхности, поля гидродинамических давлений и поля скоростей частиц жидкости, нелинейному исследованию которых уделяется значительно меньше внимания. Под волнами в шторме в данной работе, для краткости письма, подразуме-

ваются крупномасштабные волновые движения в области развитого и достаточно интенсивного ветрового волнения в виде нерегулярных групп волн (см. рис. 1), характеризующиеся значительными крутизнами и асимметрией профиля волн и сопровождающиеся укрупнением и частичным обрушением гребней наиболее крутых волн в группах. Таким образом, это нелинейные и нерегулярные группы волн, инициированные ветром и находящиеся под постоянным динамическим воздействием ветрового потока. Выйдя из штормовой области, эти волны трансформируются в волны зыби - свободные сравнительно регулярные прогрессивные волны умеренной, а затем и малой амплитуды.

В рамках линейной гидродинамики волн и судна данные зависимости для регулярных волн малой амплитуды общеизвестны [9, 10], а для нерегулярного волнения применение принципа суперпозиции позволяет использовать хорошо отработанные спектральные модели волнения, не требующие специального определения гидродинамических характеристик нерегулярных волн в шторме [9, 11]. Однако интенсивно разрабатываемые в последнее время нелинейные методы расчета нагрузок и ре-

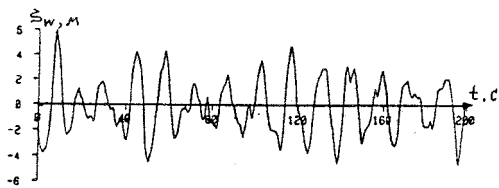


Рис. 1. Фрагмент записи реального сигнала с групповой структурой

акции судов на волновые воздействия [6–8, 12], основанные на прямом расчете силовой и кинематической реакции судов и плавучих сооружений на волновые воздействия во временной области, требуют создания подходящих нелинейных гидродинамических моделей волновых движений в шторме, включающих в том числе и зависимости для локальных гидродинамических характеристик волн. Видимо, из-за недостаточного уровня разработки этих зависимостей в большинстве работ по нелинейным расчетам нагрузок и качки судов используются либо линейные периодические волны [6], либо суперпозиции гармонических волн с заданным спектром [8], либо некоторые модификации линейных моделей (для уменьшения невязки давлений на волновом профиле при больших крутизнах волн).

Одно из возможных направлений в разработке таких моделей с физической точки зрения основано на гипотезе о групповой структуре крупномасштабных волн в шторме [13, 14], согласно которой крупные энергонесущие волны в шторме имеют более высокую степень регулярности, чем общее волновое поле, и движутся в виде групп волн, образующих узкополосные системы волн [13] (рис. 1); в работе автора [14] обоснована следующая иерархическая структура нерегулярного ветрового волнения с уровнями  $\{\text{волновое поле}\} \rightarrow \{\text{системы волн}\} \rightarrow \{\text{группы волн}\} \rightarrow \{\text{видимые волны}\}$ .

Для групповых моделей морского нерегулярного волнения естественным является разделение физического процесса движения волн на быстро осциллирующие и медленно меняющиеся изменения во времени и пространстве, что дает возможность использовать для их исследования методы асимптотического анализа и, в частности, методы многих масштабов (МММ), оценив нелинейность и нерегулярность волн некоторым малым параметром [15–18]. Последовательное применение МММ к решению нелинейных краевых за-

дач теории волн позволяет определить в том числе и необходимые зависимости для волновой поверхности, поля давлений и скоростей в группах волн с учетом всех основных эффектов: нелинейности, нестационарности и трехмерности волновых движений, а также действия поверхностного давления ветрового потока.

В данной статье приведены зависимости для гидродинамических характеристик крупномасштабных групп волн в шторме, полученные в рамках МММ. В частности, в разделе 1 приведены основные допущения и общие зависимости для гидродинамических характеристик волн, а необходимые для их расчета решения для потенциала скоростей волновых движений кратко приведены во втором разделе статьи. В третьем, основном разделе, рассмотрены общие зависимости для гидродинамических характеристик волн, а также частные случаи для плоских свободных групп волн и для предельной асимптотики периодических прогрессивных волн Стокса V порядка. Последние, например, могут применяться в качестве простейшей нелинейной модели для сравнительно регулярной и крупной зыби, вышедшей из шторма. Приведены также некоторые результаты численных расчетов.

## 1. ДОПУЩЕНИЯ И ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Ниже рассматривается основная энергонесущая компонента волнового движения в штормовой области на стадии полного развития в глубоком и безграничном океане, жидкость считается идеальной, а ее движение – потенциальным. Коротковолновая составляющая спектра нерегулярного волнения во внимание не принимается. Воздействие на волновые движения ветрового потока учитывается пульсациями его поверхностного давления, когерентными с волновым профилем. Это давление, по крайней мере, на два порядка меньше характерного волнового давления с учетом соотношения между плотностями ( $\sim 10^{-3}$ ) и характерными скоростями движения ( $\sim 10^1$ ) воздуха и воды.

Средние характеристики волн в шторме: амплитуда волн  $\langle a \rangle$ , круговая частота  $\langle \sigma \rangle$  и связанные с ними средние величины – волновое число  $\langle k \rangle = \langle \sigma \rangle^2 / g$ , фазовая скорость  $\langle c \rangle = g / \langle \sigma \rangle$  и крутизна волнового склона  $\langle \delta \rangle = \langle k \rangle \langle a \rangle$  использованы далее в качестве размерных величин для нормировки соответствующих переменных задачи.

Для описания движения волн применяется декартова система координат  $Oxyz$ , так что ось  $Ox$  на-

правлена против генерального направления движения волн в шторме, ось  $Oz$  направлена вверх, а плоскость  $Oxy$  совпадает с уровнем спокойной воды. При этом волновые движения в штормовой области рассматриваются локально для интенсивных участков волнения (групп волн) и на ограниченных временных интервалах, не более чем на два порядка превышающих характерные длину и период крупномасштабных волн соответственно.

Степень нелинейности и нерегулярности волн оценивается положительным малым параметром  $\epsilon \ll 1$ . На первый взгляд представляется, что необходимо вводить два малых параметра по нелинейности и нерегулярности волн, однако опыт применения отдельных малых параметров показал, что: 1) существенно усложняется алгоритм расчета, 2) цепочки уравнений в возмущениях по нерегулярности фактически содержатся в уравнениях по нелинейности; 3) в старших порядках по степеням малых параметров процесс расщепления уравнений в возмущениях разветвляется и выбор приближений оказывается неоднозначным. Поэтому предпочтительным является использование одного малого параметра.

Исходные зависимости для поля гидромеханических давлений  $p_w$  и поля скоростей частиц жидкости в потенциальных волнах  $\vec{v}_w$  общеизвестны [19] и имеют вид

$$\begin{aligned} p_w &= -\rho[\Phi_{wt} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_w \cdot \nabla\Phi_w) + gz], \\ \vec{v}_w &= \{v_{wx}, v_{wy}, v_{wz}\} = \nabla\Phi_w, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Phi_w$  – потенциал скоростей волновых движений в шторме;  $\nabla$  – оператор Гамильтона в декартовых координатах; здесь и далее использовано индексное обозначение для производных по времени и координатам.

Волновой профиль  $\zeta_w$  входит в функциональное уравнение, следующее из динамического граничного условия на волновой поверхности [19]:

$$\zeta_w = -\frac{1}{g}[\Phi_{wt} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_w \cdot \nabla\Phi_w) + \frac{p^a}{\rho}]|_{z=\zeta_w}, \quad (2)$$

где  $p^a$  – поверхностное давление ветрового потока.

Допущение об умеренной нелинейности волн, которое физически означает, что подветренный склон крутых волн не достигает стадии сильного укручивания и опрокидывания, позволяет разрешить данное уравнение относительно волнового профиля, разложив потенциал скоростей  $\Phi_w$  и поверхностное давление ветрового потока  $p^a$  в ряды Тейлора по вертикальной координате в окрестности  $z = 0$  и выполнив затем асимптотическую

оценку порядков величин по параметру  $\epsilon$ . Окончательно эта зависимость получена в виде

$$\zeta_w = \sum_{n=1}^6 \frac{1}{n!} (Z_0^n)_z^{(n-1)} + O(\epsilon^7), \quad z = 0, \quad (3)$$

где

$$Z_0 = -\frac{1}{g}[\Phi_{wt} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_w \cdot \nabla\Phi_w) + \frac{p^a}{\rho}].$$

Отметим, что формула (3) получена явно только для первых шести членов ряда, однако регулярная структура этой зависимости дает основание предполагать ее справедливость и для любого конечного числа членов ряда.

Таким образом, представляющие интерес гидродинамические характеристики волн  $\zeta_w$ ,  $p_w$  и  $\vec{v}_w$  могут быть определены по формулам (1), (3), если известны выражения для потенциала скоростей  $\Phi_w$  и поверхностного давления ветрового потока  $p^a$ . Первый определяется решением нелинейной краевой задачи теории волн, а для давления ветрового потока предполагается известной пространственно-временная структура зависимости, хотя в действительности ее определение является самостоятельной и достаточно сложной задачей [20]. Обойти связанные с этим трудности в какой-то мере можно, исходя из предположения, что для крупномасштабных развитых волн на ограниченных временных интервалах сравнительно слабое ветровое давление не окажет существенного влияния на динамику волнового движения.

## 2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА СКОРОСТЕЙ

Для определения входящего в зависимости (1), (3) потенциала скоростей  $\Phi_w$  в работах автора [16–18] использован метод многих масштабов; основные положения и процедуры разработанного автором варианта метода МММ можно найти в работах [16,17], а также в недавней работе [12]. К сожалению, техническая сторона метода МММ оказывается достаточно громоздкой, в особенности для старших порядков, так что ниже приведены только основные результаты, необходимые для определения гидродинамических характеристик групп волн.

В качестве исходной использована следующая известная формулировка нелинейной краевой за-

дачи [19]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_w &= 0, & z < \zeta_w; \\ \frac{D\zeta_w}{Dt} &\equiv \zeta_{wt} + (\nabla \Phi_w \cdot \nabla (\zeta_w - z)) = 0, \\ p_w &\equiv -\rho[\Phi_{wt} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi_w \cdot \nabla \Phi_w) + gz] = p^a, & z = \zeta_w; \\ \nabla \Phi_w &\rightarrow 0, & z \rightarrow -\infty; \\ \nabla \Phi_w &\leq C, & C < \infty, \quad (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4)$$

а ее решение искалось в виде асимптотического ряда вида

$$\Phi_w = -\langle a \rangle \langle c \rangle (\Phi_0 + \epsilon \Phi_1 + \dots + \epsilon^4 \Phi_4 + O(\epsilon^5)); \quad (5)$$

где неизвестные величины  $\Phi_n, n = 1, 2, \dots$  являются функциями новых быстрых переменных  $\theta = \langle k \rangle (x + \langle c \rangle t)$  и  $\zeta = \langle k \rangle z$ , а также медленных переменных вида  $\vec{X}_n = \epsilon^n \langle k \rangle \vec{x}, \vec{x} = \{x, y, z\}$  и  $T_n = \epsilon^n \langle \sigma \rangle t, n = 1, 2, \dots$

Процедуры метода МММ порождают следующую последовательность линейных краевых задач в возмущениях:

$$\begin{aligned} \Phi_{n\theta\theta} + \Phi_{n\zeta\zeta} &= F_n^{(1)}, & z < 0; \\ \Phi_{n\theta\theta} + \Phi_{n\zeta} &= F_n^{(2)}, & z = 0; \\ \nabla \Phi_n &\rightarrow 0, & z \rightarrow -\infty; \\ \nabla \Phi_n &< \infty, & (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (6)$$

где правые части  $F_n^{(1)}, F_n^{(2)}$  являются нелинейными дифференциальными операторами от потенциалов  $\Phi_m, m < n$  и давления  $p^a$ . Решение краевых задач (6) позволило получить первые пять членов асимптотического ряда по  $\epsilon$  (5) в виде

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= -iA \exp(\Theta) + \text{к.с.}, & \Phi_1 &= \Phi_{dr}, \\ \Phi_2 &= 0, & \Phi_3 &= -\frac{i}{2} A_{32} \exp(2\Theta) + \text{к.с.}, \\ \Phi_4 &= -\frac{i}{2} A_{42} \exp(2\Theta) - \frac{i}{3} A_{43} \exp(3\Theta) + \text{к.с.}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $A = \frac{1}{2} a \exp(i\psi)$  – комплексная медленно меняющаяся амплитуда основной несущей гармоники в потенциале скоростей;  $\Theta = \zeta + i\theta = \langle k \rangle (z + i(x + \langle c \rangle t))$  – быстрая комплексная фазовая координата, с которой волновое движение осциллирует по  $x$ -координате и затухает по  $z$ -координате;  $\Phi_{dr}$  – потенциал скоростей дрейфового течения, индуцированного групповой структурой волн;  $A_{nm}$  – амплитуды кратных гармоник в потенциале скоростей;  $i = \sqrt{-1}$  и "к.с." – комплексно сопряженное выражение.

Далее, зависимости для амплитуд кратных гармоник в уравнениях (7) можно записать в виде

$$A_{nm} = A_{nm}^n + A_{nm}^\perp + A_{nm}^a, \quad n = 3, 4; \quad m = 2, 3, \quad (8)$$

где составляющие амплитуд, связанные с нелинейностью и нерегулярностью (индекс  $n$ ), трехмерностью (индекс  $\perp$ ) и ветровым давлением (индекс  $a$ ), соответственно равны

$$\begin{aligned} A_{32}^n &= 8\langle \delta \rangle^3 A^2 |A|^2, & A_{32}^\perp &= 2\langle \delta \rangle \epsilon^2 B(A), \\ A_{32}^a &= -2\langle \delta \rangle^3 (AP_1(A_1^a) - A_2^a); \\ A_{42}^n &= 24i\langle \delta \rangle^3 \epsilon (A^2 |A|_X^2 - \frac{3}{4} A_X^2 |A|^2), \\ A_{42}^\perp &= \frac{1}{2} i \langle \delta \rangle \epsilon^3 [B(A)_X + 4(A A_{Y Y X} - \\ &\quad - A_X A_{Y Y})], \\ A_{42}^a &= i \langle \delta \rangle^3 \epsilon \{ \frac{1}{2} A_X P_1(A_1^a) + A [2H(A_1^a) - \\ &\quad - L(P_1(A_1^a)) - P_1(A_1^a)_T] + (L(A_2^a) + \\ &\quad + A_{2T}^a) \}; \\ A_{43}^n &= 4\langle \delta \rangle^4 A^3 |A|^2, & A_{43}^\perp &= 0, \\ A_{43}^a &= \frac{3}{4} \langle \delta \rangle^4 [A^2 P_1^2(A_1^a) - 2AP_2(A_2^a) + 2A_3^a]. \end{aligned} \quad (9)$$

В уравнениях (9) обозначены операторы

$$B(A) = (A \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2} - (\frac{\partial A}{\partial Y})^2), \quad P_j = (j - \frac{\partial}{\partial \zeta}), \quad j = 1, 2;$$

$$H = (\frac{\partial}{\partial X} - i \frac{\partial}{\partial Z}), \quad L = (2 \frac{\partial}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial X})$$

и для краткости записи использованы следующие обозначения для производных по медленным переменным:

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X_1} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X_2} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial X_3} + \dots,$$

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_2} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_3} + \dots$$

и аналогично для других медленных переменных и старших производных.

Кроме того, при получении данных зависимостей для ветрового давления на волновом профиле использовано разложение в ряд Фурье по быстрой фазе  $\theta$ :

$$p^a = -i\gamma \langle a \rangle \sum_n \langle \delta \rangle^{n+1} A_n^a(\vec{X}, T, \zeta) \exp(in\theta) + \text{к.с.}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где зависимость амплитуд  $A_n^a(\vec{X}, T, \zeta)$  считается известной;  $\gamma = \rho g$ .

Как видно, в рамках первых пяти порядков по параметру  $\epsilon$  нелинейность порождает в потенциале скоростей волновых движений дрейфовую компоненту второго порядка малости и только вторую и третью кратные гармоники третьего и выше порядка малости, так что ангармоничность волнового потенциала оказывается достаточно слабой.

Для дрейфового потенціала  $\Phi_{dr}$  из условия исключения вековых решений следует линейная краевая задача вида

$$\begin{aligned} \nabla_s^2 \Phi_{dr} &= 0, & z < 0; \\ \Phi_{drZ} + \epsilon \Phi_{drTT} &= 2\langle \delta \rangle |A|_X^2 + \\ &+ \epsilon \Gamma_1(A, A_1^a, \epsilon), & z = 0; \\ \nabla_s \Phi_{dr} &\rightarrow 0, & z \rightarrow -\infty; \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\nabla_s$  – оператор Гамильтона по медленным переменным  $(X, Y, Z)$  и оператор  $\Gamma_1$  определяет старшие возмущения в граничных условиях для дрейфового потенциала.

Решение данной краевой задачи может быть получено методом функций Грина [9], если известны выражения для амплитуд  $A$  и  $A_1^a$  в правой части граничных условий. Базовое решение, учитывающее только основное слагаемое в этих условиях на плоскости  $z = 0$  с точностью до  $O(\epsilon)$ , будет [18]

$$\begin{aligned} \Phi_{dr} &= \frac{1}{2\pi} \int \int_{(z=0)} [\Phi_{dr0} \frac{\tilde{Z}}{R^3} - \frac{\Gamma_0(A)}{R}] d\tilde{X} d\tilde{Y}, \\ \Phi_{dr0} &= -\frac{1}{4\pi} \text{v.p.} \int \int_{(z=0)} \Gamma_0(A) \frac{1}{R_0} d\tilde{X} d\tilde{Y}; \\ R &= [(\tilde{X} - X)^2 + (\tilde{Y} - Y)^2 + Z^2]^{\frac{1}{2}}, \\ R_0 &= R|_{Z=0}, \quad \Gamma_0(A) = 2\langle \delta \rangle |A|_X^2 + O(\epsilon), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $(X, Y, Z)$  – медленные координаты точки в жидкости;  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  – переменные интегрирования на плоскости  $z = 0$ .

Кроме того, условия исключения вековых решений порождают также уравнения в возмущениях для амплитуды первой гармоники  $A$ , определяющие ее зависимость от медленных пространственно-временных переменных. Зависимость  $A(Z)$  определяется из уравнения [12]

$$AZ = -iA_X - \frac{1}{2}\epsilon A_{YY} + \epsilon^2 L_1(A, \epsilon),$$

а зависимость  $A(X, Y, T)$  – из уравнения Шредингера вида

$$\begin{aligned} 2AT - A_X - \frac{i}{2}\epsilon(A_{XX} - A_{YY}) + i\langle \delta \rangle^2 A|A|^2 + \\ + \epsilon^2 L_2(A, \epsilon) + \epsilon \langle \delta \rangle^2 N(A, A_1^a, \Phi_{dr0}, \epsilon) = 0, \end{aligned}$$

где  $L_j(A, \epsilon), j = 1, 2$  – линейные и  $N(A, A_1^a, \Phi_{dr}, \epsilon)$  – нелинейный операторы, определяющие старшие возмущения в соответствующих уравнениях.

Определение этих зависимостей – самостоятельная, требующая значительных усилий задача

[1–4]. Отметим только, что в основном используются два вида решений: 1) спектральные решения [4], основанные на разложении амплитуды  $A$  в те или иные ряды Фурье по медленным переменным, 2) многосолитонные решения [2, 21], состоящие в представлении волновых движений с групповой структурой как совокупность регулярных солитонов с огибающей вида  $\cosh^{-1}$  и случайными наборами основных параметров солитонов огибающей – групп волн. Простейшие формы таких решений приведены в статье автора [12].

### 3. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРУПП ВОЛН

#### 3.1. Общие зависимости для трехмерных групп ветровых волн

Подстановка решения для потенциала скоростей волновых движений (5), (7)–(9) в исходные зависимости для гидродинамических характеристик групп волн приводит к следующим соотношениям для волнового профиля, поля давлений и поля скоростей частиц жидкости в рамках первых пяти приближений по малому параметру  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned} &\text{волновой профиль} \\ \zeta_w &= \langle a \rangle [z_0 + \sum_{n=1}^5 (z_n \exp(in\theta) + \text{к.с.})], \\ z_n &= z_n^n + z_n^\perp + z_n^a, \quad n = 0, 1, \dots, 5; \end{aligned} \quad (13)$$

поле давлений

$$\begin{aligned} p_w &= \gamma \{-z + \langle a \rangle [P_0 + \sum_{n=1}^3 (P_n(\zeta) \exp(n\Theta) + \\ &+ \text{к.с.})]\}, \\ P_n &= \sum_{m=0,2}^n (p_{nm}^n + p_{nm}^\perp + p_{nm}^a) \exp(m\zeta), \\ n &= 0, 1, 2, 3; \end{aligned} \quad (14)$$

поле скоростей

$$\begin{aligned} \vec{v}_w &= -\langle c \rangle \langle \delta \rangle [\vec{v}_0 + \sum_{n=1}^3 (\vec{v}_n \exp(n\Theta) + \text{к.с.})], \\ \vec{v}_n &= \{v_{nx}, v_{ny}, v_{nz}\}, \quad n = 0, 1, 2, 3; \\ v_{n\chi} &= v_{n\chi}^n + v_{n\chi}^\perp + v_{n\chi}^a, \quad \chi = (x, y, z), \end{aligned} \quad (15)$$

где выражения для средних характеристик ( $n = 0$ ) и амплитуд кратных гармоник ( $n = 1, 2, \dots, 5$ ) определяются в общем случае достаточно громоздкими зависимостями, поэтому в рамках данной статьи опущены.

Дадим краткую характеристику зависимостей в (13)–(15). Во-первых, как и в потенциале скоростей, средние и амплитуды кратных гармоник разделены на составляющие, связанные с эффектами

нелинейности и нерегулярности волн, их трехмерности и действия поверхностного ветрового давления (с верхними индексами "n", "⊥" и "a" соответственно). Во-вторых, в поле скоростей учет нелинейности и нерегулярности волн в рамках теории пятого порядка привел к формированию среднего дрейфового поля, а также второй и третьей кратных гармоник с достаточно слабой интенсивностью (третий и выше порядок малости). В то же время, учет трехмерности групп волн и действия поверхностного давления ветрового потока внес малые поправки к этим величинам, причем влияние трехмерности в основном проявляется через вторую производную от амплитуды  $A$  по медленной поперечной координате  $Y$ , которая для развитых групп волн в их средней части мала. Учет поверхностного давления ветрового потока порождает ряд довольно громоздких соотношений, практическое использование которых требует, вообще говоря, достаточно подробной информации о структуре поля давлений над волнами (насыщенность кратными гармониками, вертикальные градиенты поля, зависимость по пространственно-временным медленным переменным).

В-третьих, кроме явных нелинейных эффектов, в поле скоростей существуют, как известно [19, 22], и неявные, связанные с асимметрией волнового профиля по вертикали "гребень – подошва", что порождает дрейфовое течение, пропорциональное квадрату огибающей амплитуд волн (стоксов дрейф), в отличие от группового дрейфового поля, индуцированного продольными модуляциями квадрата огибающей. Для явного выделения этой компоненты дрейфовой скорости необходимо перейти от эйлеровой к лагранжевой координате по вертикали, например, уровням постоянного давления  $p_w = const$ , как это сделано в работе [22] для периодических волн Стокса.

Таким образом, в поле скоростей частиц жидкости в группах волн существует следующая иерархическая структура поля: если фазовую скорость бега волн принять за единицу, то скорость орбитального движения частиц жидкости имеет в среднем порядок  $\langle \delta \rangle$ , скорость стоксового дрейфа – порядок  $\langle \delta \rangle^2$ , а скорость группового дрейфа – порядок  $\epsilon \langle \delta \rangle^2$ . И только в окрестности гребня волн эти соотношения смещаются в сторону увеличения порядка скоростей.

Далее, в поле давлений основным нелинейным и нестационарным эффектом является формирование среднего поля гидродинамических давлений (составляющая  $p_{02}^n$ ), тогда как амплитуды второй и третьей кратных гармоник также имеют третий и выше порядок малости. Влияние трехмерности

групп волн и давления ветрового потока аналогично как и для поля скоростей – в виде поправок к основному нелинейным эффектам.

Наконец, в волновом профиле формируется полный спектр для первых пяти кратных гармоник с амплитудами, пропорциональными  $\langle \delta \rangle^{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots, 5$ , при том, что среднее смещение уровня тихой воды имеет третий и выше порядок малости. Здесь также учет трехмерности групп волн, как и поверхностного давления ветрового потока значительно усложняет базовые зависимости для амплитуд, не внося в то же время существенных уточнений в порядки этих величин. Отметим, что в волновом профиле особенно выразительно проявляется эффект, состоящий в том, что старшие возмущения, являясь сравнительно малыми, определяются в то же время достаточно громоздкими зависимостями, требующими обширной информации как по интенсивности возмущений, так и по их пространственно-временной структуре. Поэтому для практических целей расчета реакции судов и плавучих сооружений на волновые воздействия в шторме приведенные зависимости можно существенно упростить, отбросив малые возмущения в старших порядках.

### 3.2. Плоские группы свободных волн

Предельно упростив общие зависимости с сохранением только основных порядков по нелинейности и нерегулярности и рассматривая плоские свободные волны, после перехода к действительным переменным можно получить следующие приближенные расчетные зависимости для гидродинамических характеристик волн:

$$\begin{aligned} \zeta_w &= \langle a \rangle \sum_{n=1}^5 (z_n^c \cos n\theta + z_n^s \sin n\theta), \\ p_w &= \gamma(-z + \langle a \rangle \sum_{n=1}^3 P_n(\theta) \exp n\zeta), \\ P_n(\theta) &= \sum_{m \leq n} (p_{nm}^c \cos m\theta + p_{nm}^s \sin m\theta), \\ m &= n, n-2, \dots \geq 0; \\ v_{wx,z} &= -\langle c \rangle \langle \delta \rangle \sum_{n=1}^3 (\pm v_n^{c,s} \cos n\theta + \\ &+ v_n^{s,c} \sin n\theta) \exp n\zeta, \end{aligned} \quad (16)$$

где амплитуды кратных гармоник в поле давлений, волновом профиле и поле скоростей теперь имеют

вид

поле давлений

$$p_{nm}^{c,s} = a\delta_a^{n-1}a_{nm}^p \{\cos, -\sin\} (m\psi + \rho_{nm}),$$

$$a_{11}^p = 1 + \frac{1}{2}\delta_a^2 + \frac{1}{2}\epsilon\psi_X + O(\epsilon^2),$$

$$a_{20}^p = -\frac{1}{2}(1 + 2\epsilon\psi_X) + O(\epsilon^2),$$

$$a_{22}^p = \delta_a^2(1 + 5\epsilon\psi_X + O(\epsilon^2)),$$

$$a_{31}^p = -\delta_a^2(1 + O(\epsilon)), a_{33}^p = \frac{1}{2}\delta_a^2(1 + O(\epsilon)),$$

$$\rho_{nm} = 0 \text{ кроме } \rho_{11} = -\frac{1}{2}\epsilon l_X + O(\epsilon^2);$$

волновой профиль

$$z_n^{c,s} = z_n^o a_n^z \{\cos, -\sin\} (n\psi + \zeta_n),$$

$$z_n^o = \mu_n^0 a \delta_a^{n-1} (1 + \mu_n^i \delta_a^2 + \mu_n^a \delta_a^4),$$

$$\mu_n^0 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}, \mu_n^i = \{\frac{1}{8}, \frac{5}{3}, \frac{7}{2}, 0, 0\},$$

$$\mu_n^a = \{\frac{25}{8}, 0, 0, 0, 0\},$$

$$a_n^z = \sqrt{z_n^R{}^2 + z_n^J{}^2}, \zeta_n = \arctan(z_n^J/z_n^R);$$

$$z_n^R = 1 + \frac{1}{2}[1 + 3(n-1)]\epsilon\psi_X + O(\epsilon^2),$$

$$z_n^J = -\frac{1}{2}[1 + 3(n-1)]\epsilon l_X + O(\epsilon^2),$$

поле скоростей

$$v_{n1}^{c,s} = a\delta_a^{n-1}a_n^v \{\cos, -\sin\} (n\psi + \nu_n),$$

$$a_1^v = 1 + \epsilon\psi_X + O(\epsilon^2),$$

$$a_2^v = \delta_a^2(1 + 5\epsilon\psi_X), a_3^v = \frac{1}{4}\delta_a^2(1 + O(\epsilon));$$

$$\nu_1 = -\epsilon(l_X + O(\epsilon^2)), \nu_2 = \nu_3 = 0 + O(\epsilon^2).$$

Здесь также обозначено  $l = \ln a$ ,  $\delta_a = a\langle\delta\rangle$ . Эти зависимости полностью определяются заданием двух характеристик групп волн – огибающей амплитуд  $a$  и модуляции фазы  $\psi$  в первой гармонике потенциала скоростей, которые можно получить, располагая записями нерегулярного волнения волномерными буями.

### 3.3. Прогрессивные волны

Предельным случаем для нелинейных плоских групп волн являются периодические прогрессивные волны Стокса, для которых величины  $a$  и  $\delta_a$  приобретают смысл амплитуды и крутизны первой гармоники в потенциале скоростей. Если далее перейти от этих величин к наблюдаемым величинам – высоте волн  $h_w$  и крутизне волнового склона  $\delta_w = \pi h_w/\lambda$  согласно соотношению  $a = \frac{1}{2}h_w(1 - \frac{1}{2}\delta_w^2 - \frac{37}{24}\delta_w^4)$ , которое можно получить из условия  $h_w = \zeta_w(\theta = 0) - \zeta_w(\theta = \pi)$ , то для волн Стокса в зависимостях (16) пропадут все амплитуды  $\sin$ -гармоник, а для  $\cos$ -гармоник амплитуды будут равны (индекс "с" для простоты записи опущен)

$$p_{11} = 1 - \frac{5}{3}\delta_w^4, p_{20} = -\frac{1}{2}\delta_w(1 - \delta_w^2),$$

$$p_{22} = \delta_w^3, p_{31} = -\delta_w^4, p_{33} = \frac{1}{4}\delta_w^4;$$

$$z_1 = 1 - \frac{3}{8}\delta_w^2 - \frac{211}{192}\delta_w^4, z_2 = \frac{1}{2}\delta_w(1 + \frac{2}{3}\delta_w^2),$$

$$z_3 = \frac{3}{8}\delta_w^2(1 + 2\delta_w^2), z_4 = \frac{1}{3}\delta_w^3, z_5 = \frac{123}{384}\delta_w^4;$$

$$v_1 = 1 - \frac{1}{2}\delta_w^2 - \frac{3}{2}\delta_w^4,$$

$$v_2 = \delta_w^3, v_3 = \frac{1}{4}\delta_w^4.$$

Кроме того, в (16) величины  $\langle a \rangle, \langle c \rangle, \langle \delta \rangle$  приобретают смысл полувывсоты волны  $h_w/2$ , линейной фазовой скорости  $c = \sqrt{g/k}$  и крутизны волнового склона  $\delta_w$ . Это наиболее простая модель для нелинейных волн на глубокой воде из рассмотренных выше; она определяется двумя параметрами – высотой волны  $h_w$  и крутизной волнового склона  $\delta_w$ .

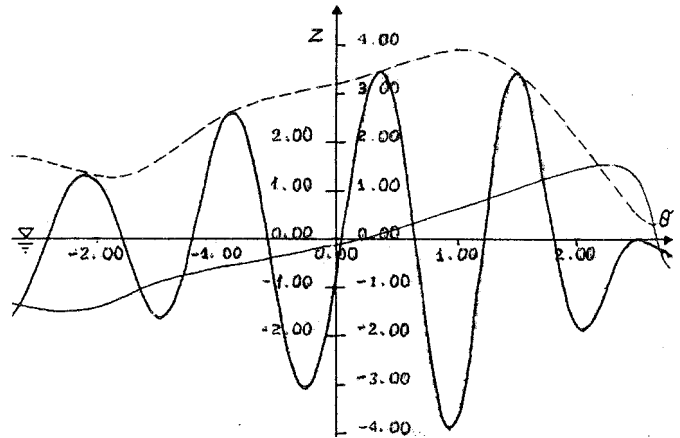


Рис. 2. Волновой профиль, огибающая амплитуд (---) и модуляция фазы (—) волн для волнения в СЗА

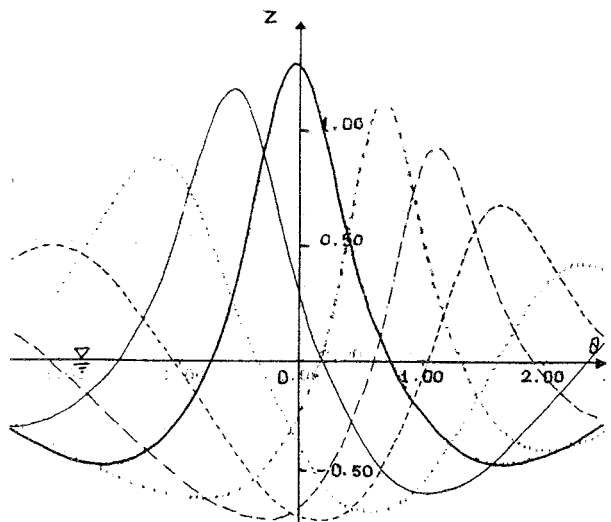


Рис. 3. Динамика движения волн в группе

В заключение приведем некоторые результаты численных расчетов, иллюстрирующие полученные выше зависимости. Во-первых, на рис. 2 показаны огибающая амплитуд  $a$ , модуляция фазы  $\psi$  и волновой профиль в группе волн, выделенной из записи волнения в Северо-Западной Атлантике. Это пример типичной нерегулярной группы волн для реальных волновых условий в шторме. Для таких групп волн огибающая амплитуд и модуляция фазы являются произвольными функциями медленных переменных и для описания таких функций необходимо использовать либо ряды Фурье, либо суперпозиции солитонов огибающей. На рис. 3 показано движение профиля волны в средней части группы и, как видно, волновой профиль изменяется достаточно сильно в процессе ее движения в составе группы.

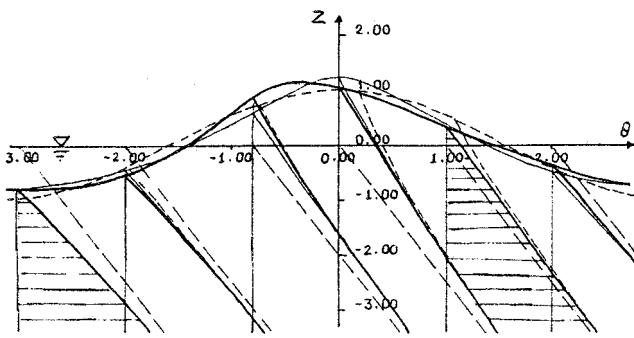


Рис. 4. Поля давлений для синусоидальной волны (---), волны Стокса (—) и ветровой волны

Изменение поля давлений по глубине для ряда сечений по длине в линейной синусоидальной волне, волне Стокса и ветровой волне с крутизной порядка  $1/12$  показано на рис. 4. Из этого, как и других примеров расчета давлений, следует, что нелинейные эффекты проявляются только в приповерхностном слое жидкости порядка 2-3 полувысоты волны и в основном в районе гребня. Видно также существенное незамыкание эпюр давлений на волновом профиле в линейной волне.

Из примеров расчета общего поля скоростей и поля скоростей стоковского дрейфа в пределах длины волны и поля скоростей группового дрейфа в пределах группы волн для сравнительно регулярной огибающей амплитуд волн (рис. 5 – 7) видно, что имеют место достаточно большие значения горизонтальных проекций полных скоростей в

районе гребня волны, а также быстрые затухания стоковых дрейфовых скоростей с глубиной. Поле скоростей группового дрейфа затухает с глубиной на порядок медленнее, но и его интенсивность на порядок меньше стокового поля, а с увеличением степени нерегулярности огибающей усиливается и степень хаотичности поля скоростей группового дрейфа, так как оно определяется продольными градиентами квадрата огибающей. Отметим, что на всех графиках и рисунках масштаб по высоте увеличен для наглядности изображения.

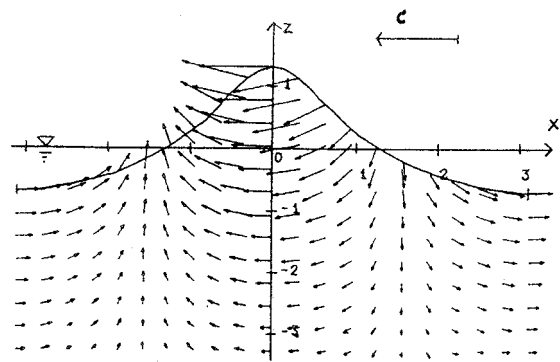


Рис. 5. Общее поле скоростей в нелинейной волне; крутизна волны  $1/9$

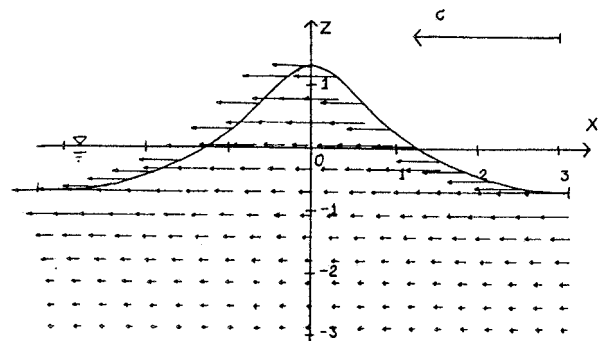


Рис. 6. Поле скоростей стоковского дрейфа в волне

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Нелинейные расчеты реакции судов и плавучих морских сооружений на волнах конечной амплитуды в шторме во временной области (nonlin-



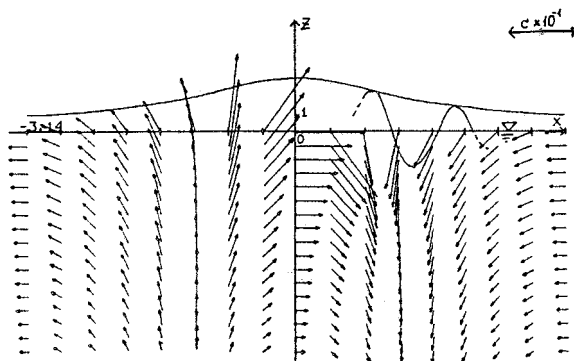


Рис. 7. Поле скоростей группового дрейфа;  
— - огибающая амплитуд волн

ear time - domain calculation) требуют разработки подходящих гидродинамических моделей для набегающих волн, включающих расчетные зависимости для гидродинамических характеристик волн – волнового профиля и поля гидродинамических давлений и скоростей частиц жидкости в волнах.

2. Крупномасштабные волны в шторме, которые определяют основное силовое воздействие на суда и плавучие сооружения, обладают групповой структурой, т.е. являются более регулярными на общем волновом фоне и поэтому для исследования их локальной гидродинамики эффективно применение методов теории возмущений и, в частности, методов многих масштабов, основанных на разделении волновых процессов на быстро осциллирующие и медленно меняющиеся. При этом эффекты нелинейности, нерегулярности и трехмерности волн, а также действия ветрового потока рассматриваются как возмущения для регулярной свободной волны. Для оценки порядка возмущений допустимо использовать один общий малый параметр.

3. Решение нелинейной краевой задачи для потенциала скоростей групп ветровых волн в шторме методом многих масштабов в рамках первых пяти приближений по малому параметру дает возможность получить достаточно общие зависимости для гидродинамических характеристик волн, необходимые для их использования в расчетах реакции судов на волнении. При этом учет основных нелинейных и нестационарных эффектов приводит к формированию полного набора кратных гармоник в волновом профиле и только второй и третьей гармоники со сравнительно малыми амплитудами в поле давлений и скоростей. Сред-

ние смещения волновой поверхности и среднее поле скоростей, индуцированные этими эффектами, малы и имеют третий и выше порядок по малому параметру. В то же время в поле давлений нелинейность формирует заметное среднее давление, которое должно быть обязательно включено в расчетные зависимости.

4. Учет дополнительных эффектов трехмерности волн и давления ветрового потока довольно существенно усложняет расчетные зависимости для гидродинамических характеристик, не внося в то же время принципиальных уточнений в базовые соотношения для крупномасштабных развитых волн. При этом трехмерные эффекты в основном сказываются на периферии групп волн, которые в развитых штормах имеют достаточно протяженные гребни. Практический учет ветрового давления требует обширной информации о пространственно-временной структуре ветрового потока над волновой поверхностью, которую из-за изменчивости, довольно трудно учесть в расчетах.

5. Упрощенные зависимости для амплитуд кратных гармоник в гидродинамических характеристиках плоских свободных группах волн с удержанием только основных порядков малости по нелинейности и нерегулярности оказываются достаточно простыми и могут быть использованы в практических расчетах нелинейной качки и волновых нагрузок корпусов судов на группах волн, а в предельном случае и на регулярных волнах Стокса конечной амплитуды. При этом первые пять порядков по малому параметру обеспечивают приемлемую точность для волнового профиля, поля давлений и скоростей вплоть до максимальных крутиз волн  $1/9 - 1/7$ .

1. Yuen G.C., Lake B.M. Instabilities of waves on deep water // *Ann. Rev. Fluid Mech.* – 1980. – 12. – P. 303-334.
2. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 198 с.
3. Селезов И.Т. Распространение нелинейных неустановившихся поверхностных гравитационных волн над неровным дном // *Прикладная гидромеханика.* – 1999. – 1(73). – С. 102-109.
4. Lo E., Mei C.C. A numerical study of water-wave modulation based on a higher-order nonlinear Schrodinger equation // *J. Fluid Mech.* – 1985. – 150. – P. 395-416.
5. Dommermuth D.G., Yue D.K.P., Lin W.M. et al. Deep-water plunging breakers: a comparison between potential theory and experiments // *J. Fluid Mech.* – 1988. – 189. – P. 423-442.
6. Chiu F.-C., Fujino M. Nonlinear prediction of vertical motions and wave loads of high-speed crafts in head sea // *Int. Shipb. Progr.* – 1989. – 36. – P. 24-32.

7. Isaacson M., Hung J.Y.T. Time-Domain Second-Order Wave Radiation in Two Dimensions // J. Ship Resch.– 1993.– 37.– N 1.– P. 25-33.
8. Yung-Sur Shin, Chung J.S., Lin W.M. et. al. Dynamic Loading for Structural Analysis of Fine Form Container Ship Based on Non-Linear Large Amplitude Motions and Loads Method // Trans. SNAME.– 1997.– 105.– P. 127-154.
9. Хаскинд М.Д. Гидродинамическая теория качки корабля.– М.: Наука, 1973.– 327 с.
10. Principles of Naval Architecture. Volume III. Motions in Waves and Controllability.– Washington: Publ. by SNAME, 1989.– 429 p.
11. Давидан И.Н., Лопатухин Л.И., Рожков В.А. Ветровое волнение как вероятностный гидродинамический процесс.– Л.: Гидрометеиздат, 1978.– 286 с.
12. Сердюченко А.Н. Динамика морских волн и судна в шторме с учетом нелинейных эффектов // Прикладная гидромеханика.– 1998.– 72.– С. 25-45.
13. Крылов Ю.М., Кузнецов В.В., Стрекалов С.С. Системы поля ветровых волн // ДАН СССР.– 1973.– 208.– С. 958-961.
14. Сердюченко А.Н. Гидродинамические модели морского волнения и реакции судов на волновые воздействия в шторме // Строит. мех. корабля: Сб. научн. тр.– Николаев: НКИ, 1979.– Вып. 151.– С. 56-67.
15. Найфе А.Х. Методы возмущений.– М.: Мир, 1976.– 455 с.
16. Сердюченко А.Н. Уравнения в возмущениях для нелинейной краевой задачи теории волн // Гидродинамика корабля: Сб. научн. тр.– Николаев: НКИ, 1984.– С. 66-74.
17. Сердюченко А.Н. Исследование групп ветровых волн методом многих масштабов // Труды Всесоюзн. совещ. по числ. методам в задачах волн. гидродинамики: Сб. научн. тр.– Красноярск, ВЦ СО АН СССР, 1991.– С. 134-139.
18. Сердюченко А.Н. Уравнения в возмущениях и некоторые их решения для ветровых волн в шторме // Гидродинамика корабля: Сб. научн. тр.– Николаев: НКИ, 1991.– С. 42-52.
19. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости.– М.: Наука, 1977.– 815 с.
20. Snuder R.L., Dowson F.M., Elliott J.A., Long R.B. Array measurements of atmospheric pressure fluctuations above surface gravity waves // J. Fluid Mech.– 1981.– 102.– P. 1-59.
21. Akylas T.R. High - order modulation effects on solitary wave envelopes in deep water. Part 2. Multi-soliton envelopes // J. Fluid Mech.– 1991.– 224.– P. 417-428.
22. Сердюченко А.Н., Румянцева И.Б. Гидродинамические характеристики волн Стокса, близких к предельным // Судостроение: Респуб. межвед. научн.-техн. сб.– Киев-Одесса: Вища школа.– 1987.– Вып. 36.– С. 19-23.