

УДК 532.517.2

ПУЛЬСИРУЮЩЕЕ ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛЕ С ЛЕГКОПРОНИЦАЕМОЙ ШЕРОХОВАТОСТЬЮ У СТЕНОК

Е. А. ГАЕВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 8.12.98

Рассмотрена задача о стабилизированном движении вязкой жидкости в плоском канале под действием периодически изменяющегося давления в случае присутствия у его стенок легкопроницаемой шероховатости, ЛППШ (т.е. слоя с распределенной массовой силой, зависящей от локальной скорости жидкости). По аналитическому решению, полученному в комплексных числах, построены изменяющиеся во времени распределения скорости и трения поперек канала в отсутствие и при наличии ЛППШ. Обнаружено кардинальное различие во влиянии ЛППШ на пульсирующий поток в зависимости от частоты изменения давления. Результаты могут быть использованы в пневмо- или гидроавтоматике и в биомеханике.

Розглянута задача про нестационарний рух в'язкої рідини на стабілізованій ділянці плоского каналу під впливом тиску, що гармонічно змінюється, у випадку присутності біля його стінок легкопроницаєвої шорсткості, ЛППШ (тобто шару з розподіленою масовою силою, що залежить від локальної швидкості рідини). За аналітичним розв'язком в комплексних числах побудовані змінювані за часом розподіли швидкості та тертя у відсутності та присутності ЛППШ. Знайдена суттєва різниця у впливі ЛППШ на пульсуючий потік в залежності від частоти зміни тиску. Результати можуть бути використані у пневмо- чи гідроавтоматиці та в біомеханіці.

Stabilized motion of a viscous fluid in a long plane duct with the easily penetrable roughness (EPR) over walls (i.e., a layer with a distributed mass force proportional to the local velocity) has been considered under the periodically changing pressure gradient. By means of an analytical solution in complex numbers, distributions of the velocity and shear stress have been plotted across the duct for different time moments with the absence or presence of the EPR. The influence of the EPR on the periodical flow appeared to be drastically depended on the frequency of pressure changes. Results may be used in pneumatics or hydroautomatics, and in biological fluid mechanics.

ВВЕДЕНИЕ

Ламинарное напорное течение несжимаемой жидкости под действием нестационарного, флуктуирующего продольного градиента давления $p' = p'_0 + a_p \rho \cos \omega t$ рассмотрим лишь на стабилизированном участке плоского канала, возле стенок которого находится легкопроницаемая шероховатость (ЛППШ).

Такая задача представляет интерес как дальнейшее изучение гидромеханических свойств проницаемой шероховатости [1], так и как некоторая схематизация явлений турбулентности. Она может найти применение в технических (привод вибраторов, подача топлива в камеру сжигания двигателя) и биологических (движение крови в склеротических сосудах, воздуха в трахеях или воды в жабрах морских животных) задачах.

Интересующее нас течение в плоском канале математически проще, чем осесимметричное течение в круглой трубе. Тем не менее, готовое решение для случая гладких стенок (т.е. в отсутствие ЛППШ) мы в литературе не нашли. В литерату-

ре приведены постановки и решения задач о нестационарном течении лишь для круглой трубы. В [2, 4] используются преобразования Лапласа; авторы [3] методом малого параметра получают решение лишь для малых нестационарных возмущений стационарного решения. Мы будем следовать здесь стандартному приему математической физики отыскания периодических решений, описанному, в частности, Шлихтингом [5] со ссылкой на ряд оригинальных работ. Оно будет получено как частный случай более общей задачи наличия у стенок некоторой ЛППШ заданной густоты и высоты и будет служить сопоставительному анализу задачи.

1. ФОРМУЛИРОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Пусть у стенок длинного канала высоты $2H$, относительно оси канала $z = H$, симметрично размещена легкопроницаемая шероховатость (ЛППШ) [1] некоторой высоты h , $h < H$. На участке канала, достаточно удаленном от его входного и выходного оголовков, установится, как известно, неко-

торое "стабилизированное", не зависящее от продольной координаты распределение скорости течения жидкости через сечение канала $U(z)$. Для постоянного градиента давления p' оно найдено в [1]. В случае же нестационарного градиента давления будем иметь краевую задачу для уравнений в частных производных:

$$U'_t = \nu U''_{zz} - \frac{p'(t)}{\rho} - \begin{cases} kU, & z \in [0, h], \\ 0, & z \in (h, H], \end{cases} \quad (1)$$

$$z = 0 \quad U = 0, \quad z = H \quad U'_z = 0.$$

В этой формулировке k , $1/\rho$ есть коэффициент сопротивления потоку в слое препятствий, составляющих ЛППШ. Известно, что он равен произведению сопротивления индивидуального препятствия на концентрацию препятствий в объеме n , $1/\text{м}^3$ [1] и отражает, таким образом, густоту ЛППШ. Мы принимаем линейный закон силы, также как и простейшее (ламинарное) задание трения в потоке

$$F = \rho k_{\text{инд}} U, \quad f = nF = \rho k U, \quad (2)$$

$$k = k_{\text{инд}} n, \quad \tau = \rho \nu \frac{dU}{dz},$$

чтобы получить аналитическое решение задачи. При этом не учитывается также возможное влияние на силу сопротивления ускорения потока. Исследование линейной силы (2) все же может служить тестом для последующих, более точных, постановок задачи.

Градиент продольного давления будем задавать в виде постоянной и периодической составляющих:

$$\frac{p'(t)}{\rho} = \frac{p'_0}{\rho} + a_p \cos \omega t. \quad (3)$$

Течение, таким образом, определяется восемью физическими параметрами - ρ , ν ; H ; p'_0/ρ , a_p , ω ; k , h , характеризующими соответственно текущую жидкость и канал, характер изменения давления и свойства ЛППШ. При постоянном градиенте давления, $a_p = 0$, и в отсутствии ЛППШ (т.е. когда $k = 0$ или $h = 0$) получим линейное распределение трения и параболическое распределение скорости [6] с максимальными значениями

$$W = \max_{z \in [0, H]} U(z) = U(H) = -\frac{p'_0 H^2}{2\rho\nu},$$

$$\tau_{00} = \max_{z \in [0, H]} \tau(z) = \tau(0) = -p'_0 H.$$

Используем их в качестве масштабов при введении безразмерных переменных полной задачи (1) - (3):

$$\bar{z} = \frac{z}{H}, \quad \bar{U} = \frac{U}{W}, \quad \bar{\tau} = \frac{\tau}{\tau_{00}}, \quad \bar{t} = \frac{\nu t}{H^2}. \quad (4)$$

Обезразмеренные уравнения запишем отдельно для течений внутри и вне ЛППШ с условием сопряжения на границе раздела $z=h$:

$$\text{при } z \in [0, \delta] \quad \begin{cases} U'_t = U''_{zz} + 2(1 + a \cos \omega t) - AU, \\ z = 0 \quad U = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{при } z \in [\delta, 1] \quad \begin{cases} U'_t = U''_{zz} + 2(1 + a \cos \omega t), \\ z = 1 \quad U_z = 0, \end{cases}$$

$$U(\delta - 0) = U(\delta + 0), \quad \tau(\delta - 0) = \tau(\delta + 0).$$

При этом безразмерное трение оказывается равным половине производной скорости:

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{dU}{dz}$$

(черта над символами опущена). В новых безразмерных переменных лишь четыре (безразмерных) параметра

$$\bar{a} = \frac{a_p H^2}{\nu W}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega H^2}{\nu}, \quad A = \frac{k H^2}{\nu}, \quad \delta = \frac{h}{H}$$

определяют течение.

Решение получившейся стационарной задачи (5) в отсутствие "пульсаций" градиента давления было получено нами ранее [1]. Пометим его индексом "S":

$$U_s = \begin{cases} \frac{2}{A} + 2 \frac{\tau_0}{\lambda_0} \text{sh}(\lambda_0 z) - \frac{2}{A} \text{ch}(\lambda_0 z), \\ \text{внутри ЛППШ, } z \in [0, \delta], \\ U_h + (z - \delta)(2 - z - \delta), \\ \text{вне ЛППШ, } z \in [\delta, 1], \end{cases} \quad (6)$$

$$\tau_s = \begin{cases} \tau_0 \text{ch}(\lambda_0 z) - \frac{1}{\lambda_0} \text{sh}(\lambda_0 z), \\ \text{внутри ЛППШ, } z \in [0, \delta], \\ 1 - z, \\ \text{вне ЛППШ, } z \in [\delta, 1], \end{cases}$$

где $\lambda_0 = \sqrt{A}$ и в качестве параметров использованы трение на стенке и скорость на границе ЛППШ, найденные из условий сопряжения и вычисляемые по формулам

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1-\delta}{\operatorname{ch} \lambda_0 \delta} + \frac{1}{\lambda_0} \operatorname{th} \lambda_0 \delta, \\ U_h &= \frac{2}{A} + 2 \frac{\tau_0}{\lambda_0} \operatorname{sh} \lambda_0 \delta - \frac{2}{A} \operatorname{ch} \lambda_0 \delta. \end{aligned}$$

Решение же изучаемой здесь нестационарной задачи (5) в силу ее линейности и однородности краевых условий, может быть представлено в виде суммы стационарной составляющей (6) и нестационарной добавки, "пульсации":

$$V(z, t) = U(z, t) - U_s(z). \quad (7)$$

Легко видеть, что эта нестационарная добавка удовлетворяет задаче сопряжения:

$$\begin{aligned} &\text{при } z \in [0, \delta] \\ &\begin{cases} V_t' = V_{zz}'' + 2a \cos \omega t - AV, \\ z = 0 \quad V = 0, \end{cases} \\ &\text{при } z \in [\delta, 1] \\ &\begin{cases} V_t' = V_{zz}'' + 2a \cos \omega t, \\ z = 1 \quad V_z' = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

$$V(\delta - 0) = V(\delta + 0), \quad V_z'(\delta - 0) = V_z'(\delta + 0).$$

При этом безразмерное вязкое трение в потоке связано с поперечным градиентом добавки скорости следующим образом:

$$\tau(z, t) = \tau_s(z) + \frac{1}{2} V_z'(z, t).$$

Задача (8) для "добавок" (7) имеет и самостоятельное значение: она описывает периодическое возвратно-поступательное течение жидкости при нулевом среднем градиенте давления $p_0' = 0$. Именно этот случай, когда $U_s \equiv 0$ в силу $p_0' = 0$, и будет здесь рассмотрен.

Чтобы найти решение задачи сопряжения (8), будем рассматривать добавки (7) как вещественные составляющие более общих комплекснозначных уравнений

$$\begin{aligned} V_t' &= V_{zz}'' + 2ae^{i\omega t} - AV \quad \text{при } z \in [0, \delta] \\ &\text{и} \\ V_t' &= V_{zz}'' + 2ae^{i\omega t} \quad \text{при } z \in [\delta, 1]. \end{aligned}$$

Решение обоих будем искать в виде [5, 7]

$$V(z, t) = \mathcal{Z}(z) \exp(\gamma t), \quad (9)$$

где γ – комплексное число и \mathcal{Z} – комплекснозначная функция вещественного аргумента z . Легко видеть, что такое решение существует, если $\gamma = i\omega$. При этом решение удовлетворяет комплекснозначным (в общем случае) уравнениям

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}'' - (A + \gamma)\mathcal{Z} + 2a &= 0 \quad \text{при } z \in [0, \delta] \\ &\text{и} \\ \mathcal{Z}'' - \gamma\mathcal{Z} + 2a &= 0 \quad \text{при } z \in [\delta, 1]. \end{aligned}$$

Приходим, таким образом, к задаче сопряжения для комплекснозначной функции \mathcal{Z} от действительного аргумента z :

$$\begin{aligned} &\text{при } z \in [0, \delta] \\ &\begin{cases} \mathcal{Z}'' - (A + i\omega)\mathcal{Z} = -2a, \\ \mathcal{Z}(0) = 0, \end{cases} \\ &\text{при } z \in [\delta, 1] \\ &\begin{cases} \mathcal{Z}'' - i\omega\mathcal{Z} = -2a, \\ \mathcal{Z}'(1) = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{Z}(\delta - 0) = \mathcal{Z}(\delta + 0), \\ &\mathcal{Z}'(\delta - 0) = \mathcal{Z}'(\delta + 0). \end{aligned} \quad (11)$$

Стандартным приемом решение первого уравнения (10) (линейного, обыкновенного дифференциального второго порядка) может быть представлено в виде следующей суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного, содержащей неопределенные коэффициенты:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= C_1 e^{\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z} + \frac{2a}{M^4} (A - i\omega), \\ \mathcal{Z}' &= \lambda (C_1 e^{\lambda z} - C_2 e^{-\lambda z}), \end{aligned}$$

где корень характеристического уравнения есть $\lambda = \sqrt{A + i\omega} = M e^{-i\varphi/2}$. Значения неопределенных коэффициентов должны быть найдены из граничных условий задач (10). Но запись решения будет лаконичнее, если применить следующий прием. Значение аргумента $z = \delta$ является общим для обеих задач. Значения функции в этой точке $\mathcal{Z}(\delta)$ и ее производной $\mathcal{Z}'(\delta)$, хотя они пока и неизвестны, используем вместо граничных условий (10) для записи общего вида решения, удовлетворяя тем самым условиям сопряжения (11). После определения C_1 и C_2 из системы двух линейных

алгебраических уравнений приходим к следующему представлению решения первой краевой задачи, $z \in [0, \delta]$; помечаем его индексом "1":

$$\mathcal{Z}_1(z) = \left\{ \mathcal{Z}(\delta) - \frac{2a}{A + i\omega} \right\} \cdot \text{ch} [\lambda_1(z - \delta)] + \frac{1}{\lambda_1} \mathcal{Z}'(\delta) \cdot \text{sh} [\lambda_1(z - \delta)] + \frac{2a}{A + i\omega}, \quad (12)$$

где $\lambda_1 = \sqrt{A + i\omega} = M_1 \exp \frac{1}{2} \varphi_1 i$, $M_1^2 = (A^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}$, $\cos \varphi_1 = A / \sqrt{A^2 + \omega^2}$.

Формально подставляя сюда $A=0$, получаем решение и для второй краевой задачи, $z \in [\delta, 1]$, которое помечаем индексом "2":

$$\mathcal{Z}_2(z) = \left\{ \mathcal{Z}(\delta) - \frac{2a}{i\omega} \right\} \cdot \text{ch} [\lambda_2(z - \delta)] + \frac{1}{\lambda_2} \mathcal{Z}'(\delta) \cdot \text{sh} [\lambda_2(z - \delta)] + \frac{2a}{i\omega}, \quad (13)$$

где $\lambda_2 = \sqrt{i\omega} = M_2 \exp (\frac{1}{2} \varphi_2 i)$, $M_2^2 = \omega$, $\varphi_2 = \pi/2$.

Теперь формальные параметры $\mathcal{Z}(\delta)$ и $\mathcal{Z}'(\delta)$ легко найти из краевых условий задач (10):

$$\mathcal{Z}(\delta) = \frac{Num}{Den} \cdot \frac{\text{ch} (\lambda_2 \delta_2)}{\lambda_2}, \quad (14)$$

$$\mathcal{Z}'(\delta) = \frac{Num}{Den} \cdot \text{sh} (\lambda_2 \delta_2),$$

где $Num = 2a \{1 - \text{ch} (\lambda_1 \delta_1)\} e^{i\varphi_1}$,

$$Den = M_1^2 \cdot \left\{ \frac{1}{\lambda_2} \cdot \text{ch} (\lambda_1 \delta_1) \cdot \text{ch} (\lambda_2 \delta_2) + \frac{1}{\lambda_1} \cdot \text{sh} (\lambda_1 \delta_1) \cdot \text{sh} (\lambda_2 \delta_2) \right\},$$

$\delta_1 = \delta$, $\delta_2 = 1 - \delta$.

Выражения (12) – (14) и дают решение комплекснозначной задачи (10). Выделяя в последнем вещественную часть, получаем решение для "пульсаций" (8) согласно (9):

$$V(z, t) = \text{Re} (\mathcal{Z} \exp (i\omega t)) = \text{Re} (\mathcal{Z} \cos (\omega t) - \text{Im} (\mathcal{Z} \sin (\omega t)). \quad (15)$$

Полученные аналитические выражения весьма громоздки, если вещественные и мнимые части выделять "до конца". Однако легко выполнять по ним вычисления на любом из алгоритмических языков. Приступим к анализу полученного решения (12) – (15).

2. ПРЕДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ПРИ ОТСУТСТВИИ ЛПШ

Ясно, что при (безразмерном) градиенте давления, пульсирующем по гармоническому закону

$$p' = a \cos \omega t, \quad (16)$$

в канале установится периодическое возвратно-поступательное движение с периодом колебаний $T = 2\pi/\omega$. Рассмотрим сначала случай отсутствия легкопроницаемой шероховатости в канале, что отвечает значениям параметров $\delta = 0$ либо $A=0$. На рис. 1 и 2, в их нижних половинках, показаны распределения скорости и трения в канале без ЛПШ в последовательные моменты времени в пределах одного полупериода колебаний давления. Следует иметь в виду, что течение в верхней половине канала симметрично и здесь не показано. Нашей целью будет сопоставить течения при, условно говоря, "малой" и "высокой" частотах колебаний.

Все профили скорости проходят через ноль в силу граничного условия прилипания на стенке. При "малой" частоте колебаний – для примера на рис. 1 взято $\omega = 1$ при безразмерной амплитуде $a = 2.5$ – профили скорости имеют монотонный параболический вид, т.е. следуют закону Пуазейля для канала [5, 6] в каждый момент времени. Движение жидкости при этом однонаправленно с градиентом давления. В момент времени $t=0$ (кривая 1 на рис. 1(A)) градиент давления (16) положителен и максимален, а профиль скорости занимает крайнее правое положение: величина скорости положительна, жидкость в канале движется слева направо (положительное направление). В последующие моменты времени градиент давления уменьшается, сначала медленно, но с ускорением, и соответственно ведут себя профили скорости в моменты времени $t = \Delta t$ (кривая 2) при $\Delta t = T/20$; $t = 2\Delta t$ (кривая 3); $t = 3\Delta t$ (кривая 4) и т.д. В момент времени $t = 5\Delta t$ (кривая 6) градиент давления равен нулю и в последующие моменты становится отрицательным. Соответственно ведут себя профили скорости 7, ..., 10: скорость отрицательна, жидкость движется справа налево.

В момент $t = 10\Delta t$ (кривая 11) градиент давления (16) имеет минимальное значение, или точнее – максимальное отрицательное, и начинает затем убывать по величине. Поэтому в последующие моменты времени (кривые 12, 13 и т.д.) профили скорости перемещаются вправо, отрицательное движение ослабевает и замещается положительным, снова направленным слева направо. С дальнейшим ходом времени описанные колебания жидкости в

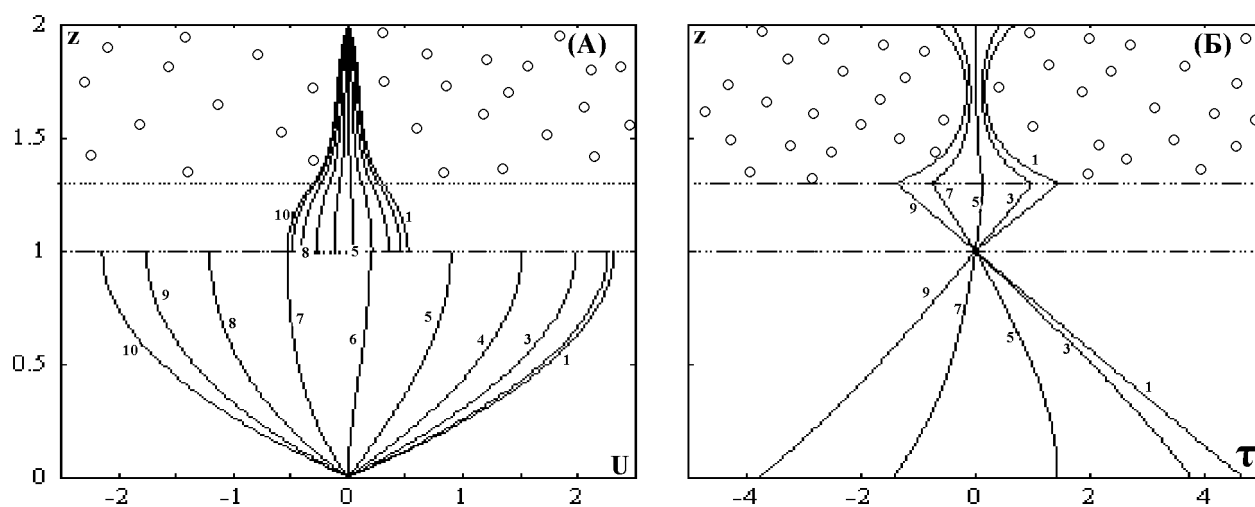


Рис. 1. Последовательные профили скорости потока через сечение плоского канала в моменты времени: 1 - $t=0$, 2 - $t=\Delta t=T/20$, 3 - $t=2\Delta t$ и т.д. при периодическом изменении давления (16) с амплитудой $a=2.5$ и "малой" частотой $\omega=1$.
внизу – канал без ЛПШ,верху – канал с ЛПШ, $\delta=0.7$, $A=50$,
А – первая, Б – вторая половины периода колебаний T

канале периодически повторяются. Отметим, что уже при этом значении частоты имеет место слабое "отставание" движения от изменений давления: при нулевом градиенте давления в момент 6 скорости в канале не равны тождественно нулю.

Распределение трения в канале при такой малой частоте пульсаций (рис. 1(Б)) следует в основном известному закону, убывая линейно от некоторого трения на стенке $\tau_0 = \tau(0; t)$ до нуля на оси канала; лишь в некоторые моменты времени возникает слабое искривление распределений вблизи стенок.

На рис. 2(А) представлены профили скорости жидкости поперек канала при "высокой" безразмерной частоте $\omega=50$ (напомним, что лишь нижние половины рисунков представляют случай отсутствия ЛПШ). Можно видеть, что движение жидкости в моменты времени 5, 6, ..., 9 (см. соответствующие кривые) происходит, постепенно замедляясь, слева направо, после чего в моменты времени 11, 12, ..., 15 движение в канале будет направлено уже в обратную, отрицательную, сторону, затем снова в положительную (эти моменты времени уже не показаны), и так далее периодически. Период этих колебаний $T_2 = 2\pi/\omega_2$ в 50 раз меньше, чем в предыдущем случае.

Можно видеть, что "отставание" потока от изменений давления в случае "высокочастотных" колебаний значительно возросло по сравнению с предыдущим случаем "низкочастотных" осцилляций: в момент времени 6, когда градиент давления равен нулю, профиль скорости только-только "пере-

валил" через крайне правое положение. А в момент времени 10, когда градиент почти достиг максимальной отрицательной величины (и при котором в первом расчетном случае жидкость двигалась влево с почти максимально возможной скоростью), жидкость все еще продолжает течь в положительном направлении, слева направо. Такое отставание по фазе колебаний объясняется, конечно, инерционностью жидкости. Однако вблизи стенок, где скорость жидкости не велика, она "более послушно" следует за изменением градиента. Вследствие этого в моменты времени 5, 6, 7 и затем в моменты 11, ..., 15 на профилях скорости на удалении от оси канала появляются локальные максимумы. Более того, в моменты времени 9 и 10 у стенок появляются зоны противоположно направленного (в данном случае – отрицательно) движения. Этот эффект был обнаружен экспериментально Ричардсоном [8] и назван им "аннулярным" (кольцевым). Он может быть использован целенаправленно при промывке труб, транспорте суспензий или запыленных газов [4]. Интересно, что в центре канала распределение скорости близко к равномерному, а в целом профиль $U(z)$ весьма сложен.

Сказанное подтверждается распределениями трения поперек канала (нижняя половина рис. 2(Б)). Трение почти отсутствует в середине канала, но весьма сложно распределено у его стенок. Амплитуда изменений величины скорости уменьшилась почти в 25 раз при переходе ко второ-

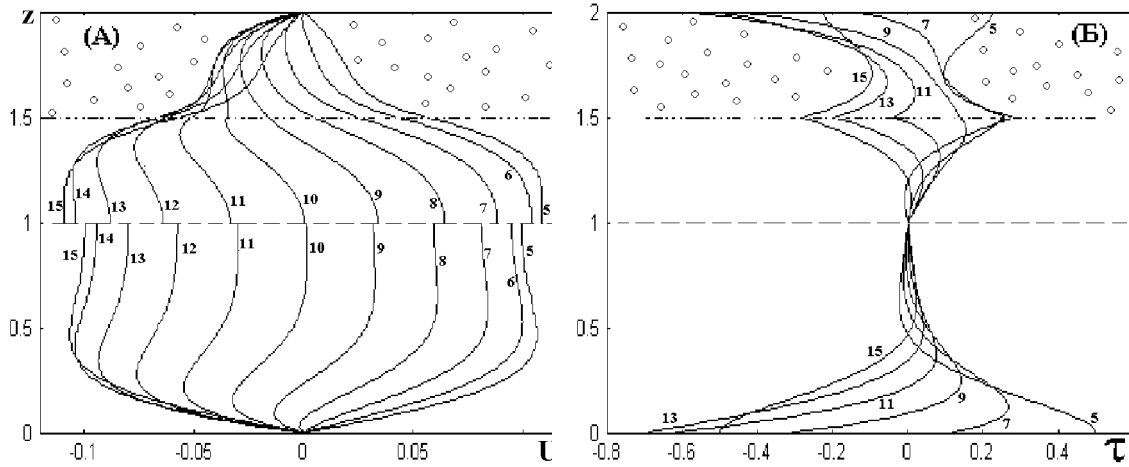


Рис. 2. Последовательные профили скорости потока (А) и трения (Б) в моменты времени: 1 - $t = 0$, 2 - $t = \Delta t = T/20$, 3 - $t = 2\Delta t$, и т.д. одного полупериода при пульсационном изменении давления с амплитудой $a = 2.5$ и "высокой" частотой $\omega = 50$; (Внизу - канал без ЛПШ, вверху - канал с ЛПШ $\delta = 0.5$, $A = 50$)

му расчетному случаю. Но амплитуда трения на стенке $\tau_0(t)$ уменьшилась лишь в 5 раз.

3. ПУЛЬСИРУЮЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛЕ С ЛПШ

Названные эффекты уже описаны в литературе [2–4], хотя и мало известны в теоретической гидромеханике. Посмотрим теперь, какие изменения вносит в поток присутствие в нем легкопроницаемой шероховатости. Расчетные профили течений представлены в верхних половинках рис. 1 и 2 для ЛПШ некоторой плотности $A = 50$, занимающей половину сечения канала (т.е. $\delta = 0.5$), хотя, напомним, расположение ЛПШ в канале и, соответственно, течение в нем, симметричны относительно оси $z = 1$. На рисунках отмечена область у стенок, заполненная препятствиями.

Движение вязкой жидкости в канале с ЛПШ также, естественно, изменяется периодически с периодом $T = 2\pi/\omega$: жидкость течет сначала слева направо, а затем - в отрицательном направлении, справа налево, и т.д. По нумерации профилей скорости на рисунках не сложно определить, к какому моменту времени относится то или иное распределение, ибо в целом их последовательность соответствует случаю без ЛПШ. Итак, если поместить ЛПШ безразмерной $A = 50$ плотности в "низкочастотный" пульсирующий поток (см. рис. 1), то амплитуда изменения скорости уменьшится примерно в два раза. Такой результат совершенно естественен, поскольку ЛПШ представляет собой дополнительное (к трению о стенки) гидравличе-

ское сопротивление в канале. Распределение скоростей состоит теперь из двух частей – "заторможенного" в слое препятствий и параболического в свободной части канала. В каждый момент времени оно имеет примерно такой же вид, какой был бы в стационарном течении (6) с соответствующей величиной градиента давления и при наличии ЛПШ [1]. Если ЛПШ будет более плотной, то, как показывают расчеты, движение в слое препятствий угасает до полного застоя и сосредотачивается лишь в свободной части канала, как если бы – в пределе – канал был бы уменьшенной ширины $1 - \delta$ с гладкими стенками.

А вот помещение ЛПШ в канал с "высокочастотными" изменениями давления ведет к более неожиданным результатам, в корне отличным от стационарного решения. Как показывает рис. 2(А), амплитуда изменений скорости не уменьшилась по сравнению со случаем отсутствия ЛПШ (нижняя половинка рисунков), а даже слегка увеличилась в свободном сечении канала (ср. профили в моменты времени 5 и 6), и также увеличивается амплитуда "локальных максимумов" в заторможенной части течения и размеры областей, охваченных противоположно направленным, возвратным, движением (профили 8, 9 и 10). Можно говорить об усилении аннулярного эффекта. Такое явление эквивалентно уменьшению гидравлического сопротивления канала. Увеличение плотности ЛПШ ($A = 100$ вместо 50) почти ничего не меняет, в отличие от случаев стационарного или низкочастотного движения. Расчет для еще более высокой частоты $\omega = 100$ эти выводы подтверждает: хотя

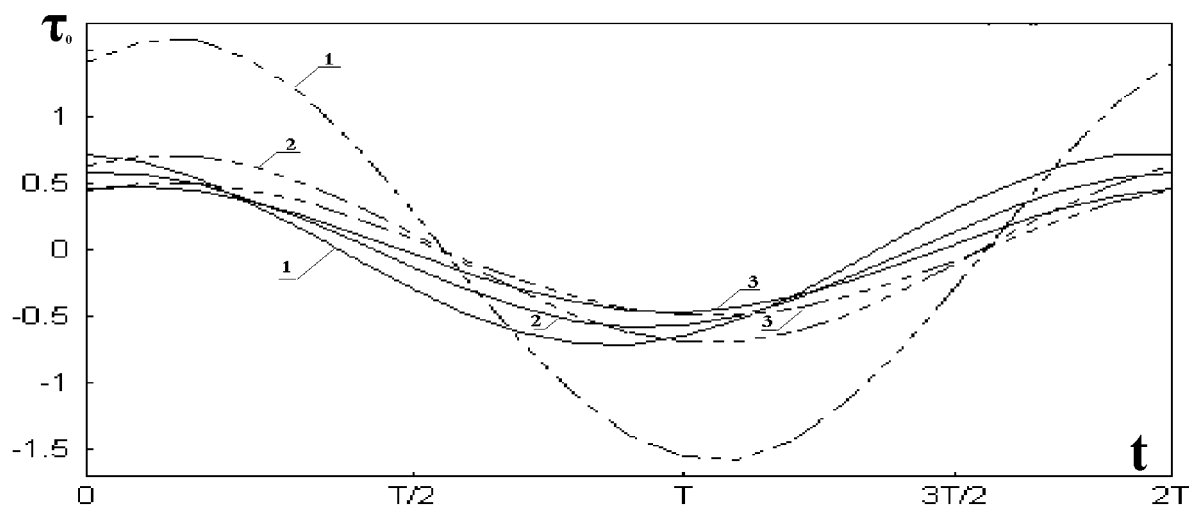


Рис. 3. Изменение во времени напряжения трия на стенке канала τ_0 в отсутствие ЛПШ (штриховые линии) и при ее наличии (сплошные; $A=50$; $\delta=0.5$):
1 - $\omega=10$; 2 - $\omega=50$; 3 - $\omega=100$

безразмерная скорость стала изменяться в более узких пределах, от -0.045 до 0.045 , но ЛПШ делает "крайние" профили скорости более наполненными и увеличивает габариты области противотока. Наличие ЛПШ уменьшает также сдвиг фаз между колебаниями давления и скорости.

Параметр задачи δ , $\delta \in [0, 1]$, характеризует долю сечения канала, занятого ЛПШ. Расчеты показали, что его увеличение при высокой частоте ω почти не тормозит жидкость. Это также отлично от случая малой частоты.

Изменение во времени напряжения трия пульсирующего потока на стенке канала $\tau_0(t)$ представлено на графике рис. 3. Можно видеть, что трение на стенке во всех расчетных случаях изменяется периодически, по закону косинуса, но с некоторым сдвигом фазы по отношению к давлению (16). Увеличение частоты пульсаций уменьшает амплитуду $\tau_0(t)$, но в отсутствие ЛПШ (штриховые линии) этот эффект проявляется сильнее, чем при ее присутствии (сплошные линии), ибо ЛПШ сама по себе ведет к уменьшению пристенного трения. Сравнивая пару кривых с одинаковыми номерами, еще раз отмечаем наличие сдвига фаз с пульсациями давления.

4. ИНТЕРПРЕТАЦИИ РЕШЕНИЯ

Две практические интерпретации могут быть даны рассмотренной выше задаче. При чисто гармоническом изменении давления (16) действительно имеет место возвратно-поступательное движе-

ние жидкости в канале, к которому относятся все вышеприведенные иллюстрации. Следует только оговорить, что при этом масштаб скорости W может быть задан лишь в виде $W = \nu/H$, поскольку средний градиент давления отсутствует, $p'_0 \equiv 0$. Это означает, что безразмерная амплитуда колебаний давления во всех приведенных формулах имеет следующий смысл:

$$\bar{a} = \frac{a_p H^3}{\nu^2}.$$

Если же в канале действует и средний градиент давления $p'_0 \neq 0$, то приведенные выше профили скорости и трия накладываются на стационарные распределения (6) как некоторые флуктуации. В таком случае безразмерная амплитуда имеет иной смысл:

$$\bar{a} = \frac{\rho a_p}{p'_0}.$$

Средний по времени расход жидкости остается неизменным. Однако иное заключение следует ожидать, если допустить более реальный, квадратичный закон силы (2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обнаруженное влияние ЛПШ на пульсирующий поток может быть, в итоге, охарактеризовано в зависимости от того, используется ли ЛПШ для воздействия на пульсирующий поток или, наоборот, пульсации давления используются для управления потоком в канале с ЛПШ:

1.1. Если поместить ЛППШ в периодически пульсирующий поток, то при низкой частоте пульсаций она вызовет резкое уменьшение пропускаемого расхода жидкости (т.е. увеличение гидравлического сопротивления канала);

1.2. Если поместить ЛППШ в высокочастотный пульсирующий поток, то это не уменьшит амплитуду вариации скорости. Возможно поэтому биологические самоуправляемые системы реагируют на возникновение препятствий (вследствие, например, болезни или старения) учащением движения.

1.3. В последнем случае, однако, расширяются пристеночные области с противоположно направленным движением, что может иметь негативные последствия для биологических систем.

2.1. Если же необходимо управлять движением в канале с имеющейся ЛППШ, то накладывание пульсаций давления представляет собой один из возможных методов. При этом также следует принять во внимание различное поведение жидкости при низких и высоких частотах изменения давления.

1. Гаев Е.А. Влияние особенностей легкопроницаемой шероховатости на гидродинамику ламинарного потока // Гидромеханика. – 1984. – N 50. – С. 44–52. Англ. перевод: Effect of Easily Penetrable Roughness on the Hydrodynamics of Laminar Flow – Fluid Mech. - Soviet Research (USA), 19, N 3, May - June 1990, pp. 1-12.
2. Попов Д.Н. Нестационарные гидромеханические процессы. – М.: Машиностроение, 1982. – 240 с.
3. Галицкий Б.М., Рыжов Ю.А., Якуш Е.В. Тепловые и гидродинамические процессы в колеблющихся потоках. – М.: Машиностроение, 1977. – 256 с.
4. Файзуллаев Д.Ф., Наврузов К. Гидродинамика пульсирующих потоков. – Ташкент: Фан, 1986. – 192 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969. – 742 с.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
8. Richardson E.G. Amplitude of sound waves in pipes // Proc. Roy. Soc., Ser. A. – 1926. – 112. – P. 522–541.