

УДК 536.25

## РАЗВИТИЕ КОНВЕКЦИИ В ГОРИЗОНТАЛЬНО НЕОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

О.Д. НИКИШОВА, В.В. ОЛЕКСЮК

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 15.03.99

Рассматривается развитие конвекции в горизонтально неоднородном по температуре потоке жидкости конечной глубины. Показано, что в потоке возникают конвективные течения, которые могут приводить к существенному искажению первоначального профиля температуры. Разработана методика численного решения задачи развития конвективных течений, позволяющая производить оценку степени искажения профиля температуры в зависимости от параметров потока и определять длину начального участка, на котором эти искажения незначительны. Приведены результаты конкретных расчетов.

Розглядається розвиток конвекції у горизонтально неоднорідному по температурі потоці рідини скінченної глибини. Показано, що в потоці виникають конвективні течії, які можуть приводити до суттєвого викривлення первинного профілю температури. Розроблена методика чисельного рішення задачі розвитку конвективних течій, яка дозволяє проводити оцінювання ступіню викривлення профілю температури у залежності від параметрів потоку та визначати довжину початкової ділянки, на якій ці викривлення є незначними. Приведено результати конкретних розрахунків.

Development of the thermal convection in a flow with non-homogeneous distribution of the temperature in horizontal direction is considered. It is found that convective flows arise in fluid. They can result in the considerable distortion of the initial distribution of the temperature. The method of numerical modeling of the development of the convective flows is worked out. Using the method allows to determinate the distortion value and the length of the section, where the distortions are negligible, depending on the flow parameters. The results of the concrete calculations are presented.

### ВВЕДЕНИЕ

Во многих исследованиях, касающихся возникновения и развития естественной конвекции в неоднородных средах под влиянием сил тяжести, изучаются случаи, когда имеются ограничивающие поверхности. Речь идет о развитии возмущений в течениях вдоль нагретой вертикальной стенки [1], в том числе и о возникновении горизонтально ориентированных слоистых структур в устойчиво-стратифицированной по солёности среде (боковая конвекция) [2, 3]. К ним же относятся исследования неустойчиво-стратифицированных слоёв жидкости между горизонтальными поверхностями, когда верхняя граница является свободной или твердой поверхностью (неустойчивость Релея) [4].

Неустойчивые распределения температуры могут возникать в потоках жидкости в экспериментальных установках. Развитие неустойчивости приводит к возникновению конвективных движений, которые могут оказывать заметное влияние на общую картину течений жидкости. Особенно важен учет таких движений при проведении измерений температуры в потоках жидкости.

В большинстве работ, посвященных изучению развития конвективной неустойчивости, рассматриваются неустойчивые распределения плотно-

сти (температуры) по вертикали [4]. Развитие конвективных движений, вызванных горизонтальными неоднородностями температуры жидкости, изучено недостаточно. Отметим, что возникновение неоднородности распределения температуры вдоль горизонтального направления в этих задачах, как правило, связано с соответствующими граничными условиями [5].

При проведении экспериментальных исследований развития гидромеханических возмущений в потоках жидкости возникает необходимость проведения оценки влияния на этот процесс тепловых возмущений, вызванных работой насосов или нагревом (охлаждением) текущей жидкости через стенки установки. Так, периодический нагрев жидкости вдоль оси течения в лотке должен вызывать возникновение вторичных течений из-за гравитационной неустойчивости потока. Подобные вопросы возникают при регистрации температурных возмущений, существующих во внешнем потоке жидкости, регистрирующими приборами, находящимися внутри пограничного слоя.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

С целью определения влияния этих течений на поток жидкости в лотке и определения степени

искажения сигналов, обусловленного влиянием пограничного слоя, рассматривается задача о движении вязкой теплопроводной жидкости в канале. Предполагается, что температура жидкости меняется вдоль координаты  $x$ , направленной по потоку, по периодическому закону:

$$T = T_s + A_T \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}, \quad (1)$$

где  $T_s$  – средняя температура жидкости,  $A_T$  – амплитуда изменений температуры,  $\lambda$  – длина волны.

Очевидно, что периодический нагрев жидкости вдоль оси течения в лотке должен вызывать возникновение вторичных течений из-за гравитационной неустойчивости таких неоднородных структур и их постепенное разрушение из-за конвективного перемешивания. Отметим, что при проведении экспериментальных исследований предпринимают определенные меры для того, чтобы уменьшить влияние конвективных течений на поток жидкости. Так, при установке нагревателя непосредственно в лоток применяют карманы в боковых стенках, устанавливают фальшдно и т.д. Поэтому толщины пограничных слоев, образующихся на дне и на боковых стенках лотка после нагревателя, в этом случае малы. Тогда при изучении развития конвективных течений в ядре потока в пределах рабочей части лотка можно пренебречь влиянием пограничных слоев.

Предполагается, что температура однородна по ширине лотка, т.е. можно рассматривать течение как двумерное. В связи с тем, что амплитуда нагрева жидкости считается относительно малой, неоднородность плотности жидкости, обусловленная неоднородным нагревом тоже мала, тогда можно записать

$$\rho = \rho_s + \rho', \quad (2)$$

причем  $\rho' \ll \rho_s$ . В приближении Буссинеска двумерное движение неоднородной несжимаемой вязкой жидкости описывается системой уравнений [6]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{g\rho'}{\rho_0}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \chi_T \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (6)$$

Здесь горизонтальная ось  $x$  направлена вдоль оси лотка вниз по течению,  $y$  – перпендикулярно вверх с началом отсчета на дне лотка, ускорение силы тяжести  $g$  направлено вдоль оси  $y$  вниз. К уравнениям (3)–(6) добавим линеаризованное уравнение состояния

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha T'(x, y)]. \quad (7)$$

Введем завихренность  $\zeta$  и функцию тока  $\psi$ :

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (9)$$

Продифференцируем уравнение (3) по  $y$  и уравнение (4) по  $x$ . Вычтем из первого второе и, с учетом (5), получим:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu \Delta \zeta - g\alpha \frac{\partial T'}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\zeta = \Delta \psi, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial y} = \chi_T \Delta T', \quad (12)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Будем считать, что жидкость в лотке в начальный момент времени неподвижна, т.е. среднее течение отсутствует.

Будем рассматривать развитие конвективных течений в области, размер которой в горизонтальном направлении равен длине волны периодических температурных неоднородностей. В качестве начальных условий принимаем распределение температуры в виде

$$T' = A_T \cos \left( \frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{при } t = 0, \quad (13)$$

т.е. в начальный момент такие температурные периодические неоднородности имеются по всей длине лотка, а второе слагаемое учитывает стратификацию жидкости. Приведем систему (10)–(12) к безразмерному виду, используя характерные величины длины  $\lambda$ , температуры  $T_* = A_T$ , скорости  $q = \sqrt{\alpha A_T g h}$ , где  $h$  – глубина канала, завихренности  $\zeta_* = q/\lambda$ , времени  $t_* = \lambda/q$ :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \zeta - \text{Ri} \frac{\partial T'}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pe}} \Delta T', \quad (15)$$

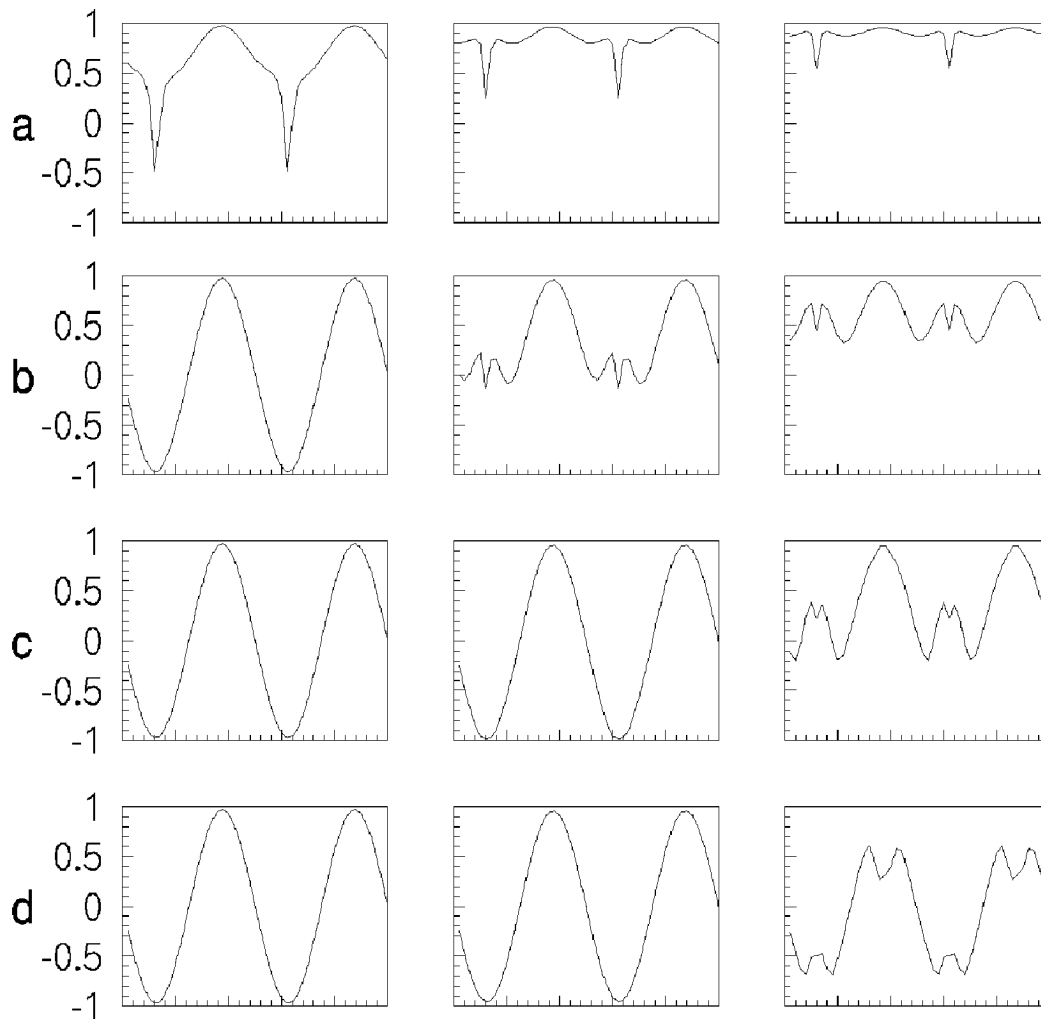


Рис. 1. Результаты расчета изотерм распределений температуры в плоскости  $x, y$  для различных расстояний от начального сечения

$$\zeta = \Delta\psi, \quad (16)$$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}; v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (17)$$

где  $Re = q\lambda/\nu$ ;  $Pe = PrRe$ ;  
 $Pr = \nu/\chi_T$ ;  $Ri = g\alpha A_T \lambda/q = \lambda/h$ .

Поскольку в начальный момент времени конвективное движение жидкости в канале отсутствует, то

$$\psi = 0, \quad \zeta = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (18)$$

Предполагаем, что на длине волны выполняются условия периодичности для всех функций:

$$Q(x) = Q(x + \lambda). \quad (19)$$

Предположим также, что на дне ( $y = 0$ ) и поверхности ( $y = h$ ) канала выполняются адиабатические условия

$$\partial T/\partial y = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad \text{и} \quad y = h \quad (20)$$

и условия непротекания

$$v = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad \text{и} \quad y = h. \quad (21)$$

Поскольку отсутствует осредненный расход вдоль оси  $x$ , то

$$\psi = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad \text{и} \quad y = h. \quad (22)$$

Уравнения (14)–(17) с граничными условиями (19)–(22) и начальными условиями (13), (18) решались конечно-разностным явным по времени методом.

Аппроксимация уравнений выполнялась со вторым порядком точности по пространству и первым порядком точности по времени. Конвективные члены аппроксимировались с уче-

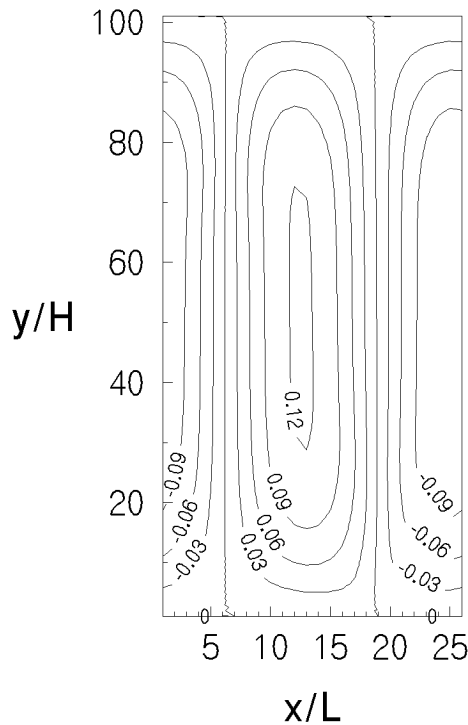


Рис. 2. Картина распределения функции тока по длине волны возмущений для  $x = 1.5\text{ м}$

том направления скорости – схема ”по ветру” [7]. Для расчетов применялась сетка  $26 \times 108$ . Шаг по времени выбирался так, чтобы выполнялось условие фон-Неймана [7]:

$$\frac{\Delta t}{\text{Re}} \left( \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} + \text{Re} \frac{u_{max}}{\Delta x} + \text{Re} \frac{v_{max}}{\Delta y} \right) \leq 1, \quad (23)$$

где  $\Delta x, \Delta y$  – величины шага вдоль оси  $x$  и  $y$ . Формула Тома [7] применялась для граничных условий для вихря. Аппроксимация для эллиптического уравнения (16) для  $m$ -го временного слоя имеет вид

$$\zeta_{i,j}^m = \frac{\psi_{i+1,j}^{n-1,m} - 2\psi_{i,j}^{n,m} + \psi_{i-1,j}^{n,m}}{\Delta x^2} +$$

$$+ \frac{\psi_{i,j+1}^{n-1,m} - 2\psi_{i,j}^{n,m} + \psi_{i,j-1}^{n,m}}{\Delta y^2}, \quad (24)$$

$$\psi_{i,j}^n = \psi_{i,j}^{n-1} (1 - \chi) + \chi \psi_{i,j}^{n-1}, \quad (25)$$

где  $n$  – параметр итераций. Решение находилось с помощью итераций. Значение функции тока на предыдущем временном слое использовалось в качестве первого приближения. Для улучшения сходимости вводился коэффициент релаксации  $\chi$  [8]. Значение  $\chi=1,7$  было найдено из условия минимального числа итераций для достижения заданной точности:

$$\max \left| \frac{\psi_{i,j}^{n,m} - \psi_{i,j}^{n-1,m}}{\psi_{i,j}^{n,m}} \right| \leq 2 \cdot 10^{-2}.$$

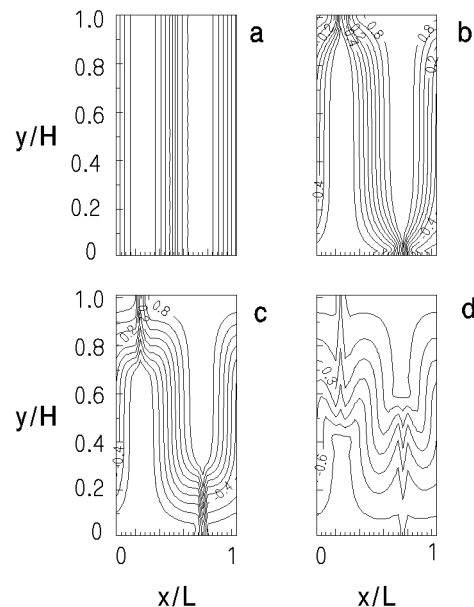


Рис. 3. Результаты расчета распределений температуры по длине волны для разных значений  $y$

Вычислительный процесс производился следующим образом.

Значения  $\zeta, u, v, T$ , полученные на предыдущем временном слое, использовались для нахождения  $\zeta$  и  $T$  на следующем временном слое, затем с помощью итераций находилась функция тока и рассчитывались значения  $u$  и  $v$ .

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты проведенного численного расчета конвективных течений были использованы для анализа эволюции периодических температурных неоднородностей в движущемся потоке жидкости

в лотке. Для этого рассматривались конвективные течения в ячейке, размер которой вдоль оси  $x$  равен  $\lambda$  и которая перемещалась с потоком со скоростью  $U_0$ . Сопоставлялись моменты времени в проведенном численном расчете с расстоянием, на которое данная ячейка переместилась вдоль оси  $x$  от нагревателя, т.е. в размерном виде имеем  $x = U_0 t$ . Результаты расчета изотерм распределений температуры в плоскости  $x, y$  для различных расстояний от начального сечения представлены на рис. 1.

Расчеты проводились для скорости основного потока  $U_0$ , равной 1.56 см/с и для амплитуды возмущений температуры  $A_T = 0.00167^\circ\text{C}$ . Рис. 1, *a* соответствует начальному распределению температуры по длине волны (синусоидальное распределение), рис. 1, *b* соответствует моменту времени, когда возмущение сместилось вниз по потоку на расстояние 1 м, рис. 1, *c* – смещению на 1.5 м, рис. 1, *d* – смещению на 2.0 м. Видно, что конвективные движения вызывают нарушения первоначального распределения температуры сначала вблизи горизонтальных границ, затем эти нарушения возникают и в центральной части лотка. Отметим, что на расстоянии 1 и 1.5 м от начального сечения в центральной части канала распределение температуры сохраняет первоначальный вид. В качестве примера картина распределения функции тока по длине волны возмущений для  $x = 1.5$  м представлена на рис. 2. Следует отметить, что форма распределений функции тока для других сечений подобна приведенной.

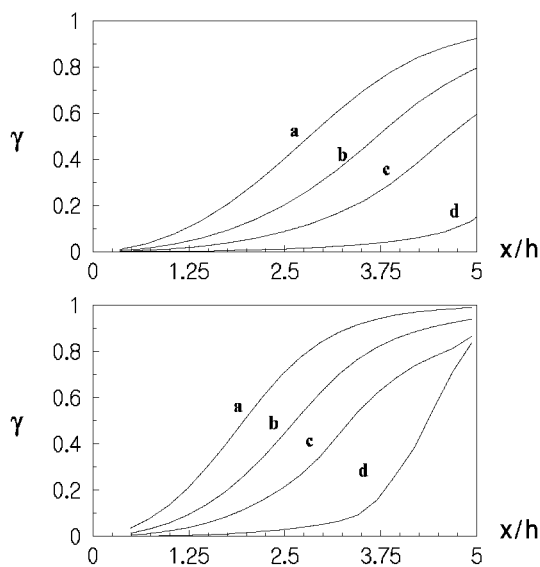


Рис. 4. Изменение интегрального параметра  $\gamma$  по длине для разных значений  $y$

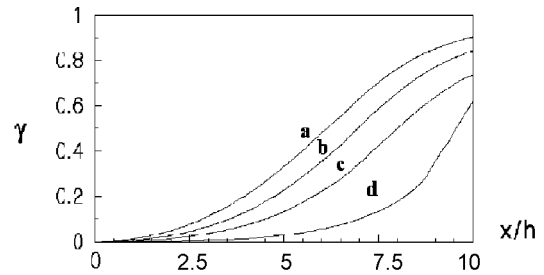


Рис. 5. Зависимость параметра  $\gamma$  от глубины потока

В качестве интегрального параметра  $\gamma$ , характеризующего развитие конвективных течений, принималась сумма абсолютных значений разностей расчетного распределения температуры от начального синусоидального распределения для заданной координаты  $y$ . На рис. 3 представлены результаты расчета распределений температуры по длине волны для значений  $y$ , равных  $0.95h$  (рис. 3, *a*);  $0.8h$  (рис. 3, *b*);  $0.6h$  (рис. 3, *c*);  $0.5h$  (середина лотка) (рис. 3, *d*). Для каждого значения  $y$  распределения температуры представлены для значений  $x$ , равных 1; 1,5 и 2 м. Как и на рис. 1, нарушения первоначального распределения температуры сначала возникают вблизи верхней и нижней границ потока, затем эти нарушения по мере развития конвективных течений проникают в центральную часть потока. Изменение интегрального параметра  $\gamma$  по длине для значений  $y$ , приведенных выше, т.е.  $0.95h, 0.8h, 0.6h, 0.5h$  (середина лотка), представлено на рис. 4–5. Рис. 4, *a* соответствует амплитуде возмущений, равной  $A_T = 0.017^\circ\text{C}$ , рис. 4, *b* –  $A_T = 0.034^\circ\text{C}$ , глубина  $h$  в обоих случаях равна 40 см. Зависимость параметра  $\gamma$  от  $x/h$  для глубины потока  $h = 20$  см продемонстрирована на рис. 5. Здесь амплитуда возмущений температуры  $A_T = 0.017^\circ\text{C}$ , кривые *a* – *d* соответствуют обезразмеренным значениям уровней  $y/h$ , что и на рис. 4.

Разработанная схема расчетов позволяет рассчитывать картину конвективных течений, которые вызваны неоднородностью распределения температуры вдоль потока. Для интегральной оценки степени нарушений распределений температуры в потоке жидкости в лотке, которые вызваны влиянием сил плавучести, предлагается использовать введенный критерий  $\gamma$ , который характеризует отклонение распределения температуры по длине волны от синусоиды. Ясно, что значение этого критерия зависит от параметров течения и распределения температуры во входном сечении.

В результате выполненных расчетов можно сделать вывод, что при проведении экспериментальных исследований в потоке жидкости с горизонтально-неоднородным распределением температуры при указанных выше параметрах, которые в частности соответствуют экспериментальному оборудованию Института гидромеханики НАН Украины, в центральной части канала первоначальное распределение температуры практически сохраняется на расстоянии 1.5 м от входа в канал.

Эта величина может быть принята за длину рабочего участка. При больших расстояниях от входа влияние конвективных течений приводит к очень большим искажениям первоначального профиля температуры и проведение экспериментальных исследований в этой части не рекомендуется.

1. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости.- М.: Мир, 1981.- 638 с.
2. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях.- М.: Мир, 1977.- 431 с.
3. Чашечкин Ю.Д. Лабораторное моделирование свободных стратифицированных течений // Материалы I Всес. шк.: "Методы гидрофизических исследований", 1983.- Горький.- 1984.- С. 29-45.
4. Буссе Ф. Г. Переход к турбулентности в конвекции Рэлея - Бенара // Гидродинамическая неустойчивость и переход к турбулентности.- М.: Мир, 1984.- 124 с.
5. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений.- М.: Наука, 1989.- 319 с.
6. Мониин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч.1.- М.: Наука, 1965.- 639 с.
7. Роуч П. Вычислительная гидромеханика.- М.: Мир, 1980.- 616 с.
8. Калиткин Н.Н. Вычислительные методы.- М.: Наука, 1978.- 512 с.