

УДК 551.465

О ВЫРОЖДЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ СКОРОСТИ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. НИКИШОВ, Р. В. ХРИСТЮК

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 15.09.97

Методом многих масштабов получены выражения, описывающие поведение амплитуд возмущений скорости в устойчиво-стратифицированной жидкости на различных этапах заключительной стадии вырождения. Проведено сравнение скоростей затухания типов движений (внутренние волны, слоистые и вихревые структуры). Найлены критические значения горизонтальных размеров возмущений, которые дают возможность определить типы движения, являющиеся наиболее долгоживущими.

З допомогою методу багатьох масштабів отримано співвідношення, що описують поведінку амплітуд збурень швидкості у стійко-стратифікованій рідині на різних етапах заключної стадії виродження. Проведено порівняння швидкостей затухання типів рухів (внутрішні хвилі, шарові та вихрові структури). Знайдені критичні значення горизонтальних розмірів збурень, що дає можливість визначати типи рухів, які живуть найбільший час.

Relationships describing the behaviour of the amplitudes of the velocity perturbations in a stably stratified fluid are determined by using the multi-scale methods. Different intervals of the final stage is considered. The decay rates of different types of motions (internal waves, layer and vortical structures) are compared to one another. Critical values of the horizontal scales of perturbances are found. This allows to determine the long-lived perturbances.

ВВЕДЕНИЕ

Влияние сил плавучести, связанное с наличием стратификации в морях и океанах, вызывает существенные изменения в характере генерации и развития турбулентности. В частности, это может приводить к локализации турбулентности в отдельных областях в океане [5]. Более того, в зависимости от величины турбулентного числа Фруда $Fr_T = (L_0/L)^{2/3}$ [8] влияние сил плавучести может стать преобладающим и турбулентные движения в этом случае не развиваются. Здесь L – характерный масштаб турбулентных вихрей, L_0 – масштаб Озмидова [5] (предельный вертикальный размер турбулентных вихрей в стратифицированной жидкости), $L_0 = (\varepsilon/N^3)^{1/2}$, ε – скорость диссипации турбулентной энергии, N – частота плавучести.

Эволюция и развитие турбулентности также в значительной мере определяется наличием стратификации. В однородной жидкости затухание движений обусловлено вязкостью жидкости, которая влияет, главным образом, на вихри малых масштабов, размер которых близок к масштабу Колмогорова $L_k = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, где ν – кинематический коэффициент вязкости. В стратифицированной среде вырождение турбулентных движений происходит не только из-за вязкости, но и под влиянием сил плавучести, которые вызывают ограничение роста вихрей в вертикальном направлении

и переход кинетической энергии вихрей в потенциальную энергию перемешанных пятен. Силы плавучести оказывают существенное влияние на поведение крупных вихрей. В то же время влияние их на вихри малых масштабов проявляется опосредовано, за счет уменьшения интенсивности потока энергии по спектру. Поведение вихрей малых масштабов при этом остается локально-изотропным. По мере вырождения турбулентности влияние сил плавучести в конечном счете сказывается на эволюции вихрей малых масштабов и их поведение, как и крупных вихрей, начинает носить анизотропный характер.

Влияние сил плавучести в стратифицированной жидкости приводит к формированию слоистых структур и квазигоризонтальных вихрей на заключительном этапе вырождения турбулентности. При этом в жидкости продолжают существовать внутренние волны, которые генерировались на более ранних этапах развития турбулентности. Масштабный анализ уравнений движения в приближении Буссинеска без учета диссипативных слагаемых был выполнен в работах [11, 13]. Было показано, что поле скорости коллапсирующей турбулентности может расщепляться на внутренние волны и квазигоризонтальную турбулентность. Теоретические вопросы сосуществования и взаимодействия внутренних волн и квазигоризонтальных структур рассматривался в работах [10, 14, 15], в которых было проведено разделение поля течения на распространяющуюся и нераспространяющуюся

ся части на основе анализа потенциальной завихренности этих течений. Авторы полагали, что квазигоризонтальные слои совпадают с вихревой частью течения, которая является нераспространяющейся.

В [4, 9] проведено расширение масштабного анализа уравнений движения в приближении Буссинеска с учетом диссипативных слагаемых. Были рассмотрены слоистые структуры, для которых характерна сильная анизотропия масштабов. Динамика этих структур определяется действием сил плавучести при малых числах Фруда и Рейнольдса. Проведено соответствующее обоснование возможности их выделения, приведены уравнения, описывающие их развитие.

Линейный анализ различных типов движений (внутренних волн, квазигоризонтальных вихрей и слоистых структур) был выполнен в работе [12]. Авторы показали, что существующие вязкие течения обусловлены действием сил плавучести и на их поведение существенное влияние оказывают процессы молекулярной теплопроводности (диффузии солености).

Линейный анализ уравнений движения в приближении Буссинеска для двух предельных режимов движения был выполнен в [3]. Первый режим характеризуется балансом инерционных и вязких эффектов и малым влиянием сил плавучести. Второй – балансом эффектов плавучести и вязкости и малым влиянием инерционных сил. Для каждого режима получены выражения, описывающие поведение амплитуд возмущений и скорости их затухания σ в зависимости от горизонтального и вертикального размеров возмущений и параметров стратифицированной жидкости. Отметим, что при определении σ в последнем случае возникает задача сингулярных возмущений. Общее решение, характеризующее поведение амплитуд для обоих этапов ниже получено с помощью метода многих масштабов. Линейная стадия развития возмущений в стратифицированной жидкости изучалась также в ряде работ [1, 2, 7, 12], в которых основное внимание уделялось последнему этапу заключительной стадии вырождения.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим заключительную стадию вырождения турбулентности в устойчиво стратифицированной по температуре и солености среде. Предполагаем, что средние градиенты распределения температуры и солености постоянны по глубине и справедливо приближение Буссинеска. Кро-

ме того, полагаем, что в начале рассматриваемой стадии имеется достаточно широкий спектр масштабов возмущений. На этой стадии затухания возмущений скорости движения малы, а градиенты плотности, температуры и солености близки к окружающим. Это позволяет использовать линеаризованные уравнения движения и переноса [1].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} &= -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \vec{V} + \vec{g} \frac{\rho}{\rho_0}, \\ \nabla \vec{V} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + W \frac{N_T^2}{\alpha g} &= \chi_T \Delta T, \\ \frac{\partial S}{\partial t} - W \frac{N_S^2}{\beta g} &= \chi_S \Delta S, \\ \rho &= -\rho_0 \alpha T + \rho_0 \beta S. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\vec{V} = (U, V, W)$ – вектор скорости жидкости; p – отклонение давления от гидростатического значения; ρ_0 – характерное значение плотности; ρ, T, S – возмущенные значения плотности, температуры и солености соответственно; ν – кинематический коэффициент вязкости; χ_T и χ_S – молекулярные коэффициенты диффузии температуры и солености соответственно; $\vec{g} = (0, 0, -g)$ – вектор ускорения свободного падения; $N_S^2 = -\beta g dS_n/dz$, $N_T^2 = \alpha g dT_n/dz$, индекс "n" обозначает невозмущенные значения величин. После ряда преобразований систему уравнений (1) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_1 \vec{V} &= -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \vec{g} \frac{\rho}{\rho_0}, \\ \Delta p &= -g \frac{\partial \rho}{\partial z}, \\ L_2 L_3 \rho &= \frac{\rho_s}{g} L_4 W, \end{aligned} \quad (2)$$

где введены операторы $L_1 = \partial/\partial t - \nu \Delta$, $L_2 = \partial/\partial t - \chi_T \Delta$, $L_3 = \partial/\partial t - \chi_S \Delta$, $L_4 = N_S^2 L_2 + N_T^2 L_3$.

Действуя последовательно операторами L_2, L_3, Δ на первое уравнение системы (2) и учитывая другие уравнения, можно получить уравнение для составляющей вертикальной компоненты скорости W :

$$L_1 L_2 L_3 \Delta \vec{V} = L_4 \left(\nabla \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\vec{g}}{g} \Delta W \right). \quad (3)$$

В случае стратификации только по температуре аналогичное уравнение имеет вид

$$L_1 L_2 \Delta \vec{V} = N_T^2 \left(\nabla \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\vec{g}}{g} \Delta W \right). \quad (4)$$

Полагаем, что существует решение $W(x, y, z, t)$ в виде нормальных мод $W = W(t) \exp(i\vec{k}\vec{r})$. Тогда для безразмерной амплитуды $\tilde{W}(t) = W(t)/W_{ch}$, где W_{ch} – характерное значение вертикальной компоненты скорости, получаем (в дальнейшем знак “~” опускаем)

$$\frac{d^2 W}{d\tau^2} + (1 + b_T) \frac{dW}{d\tau} + b_T W + \epsilon W = 0, \quad (5)$$

где $b_T = \chi_T/\nu$; безразмерное время $\tau = \nu k^2 t$; параметр $\epsilon = N^2 m^2 / \nu^2 k^6$ характеризует отношение сил плавучести и сил вязкости, а также вертикального и горизонтального размеров возмущений, ($N \equiv N_T$); $m = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ – горизонтальное волновое число; $k = \sqrt{m^2 + k_3^2}$ – волновое число; k_1, k_2, k_3 – компоненты волнового вектора.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2.1. Вертикальная скорость

Рассмотрим случай $\epsilon \ll 1$. Ищем решение в виде $W = W(\epsilon, \tau, \epsilon\tau, \epsilon^2\tau, \dots)$. Вводя масштабы времени [6] $T_0 = \tau, T_1 = \epsilon\tau, T_2 = \epsilon^2\tau, T_3 = \epsilon^3\tau$, представляем решение в следующем виде: $W = W(\epsilon, T_0, T_1, T_2, T_3) + O(\epsilon^4\tau)$. Разлагаем W по степеням ϵ

$$W = W_0(T_0, T_1, T_2, T_3) + \epsilon W_1(T_0, T_1, T_2, T_3) + \epsilon^2 W_2(T_0, T_1, T_2, T_3) + \epsilon^3 W_3(T_0, T_1, T_2, T_3) + O(\epsilon^4\tau, \epsilon^4).$$

Находим производные $d/d\tau, d^2/d\tau^2$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \epsilon^3 D_3 + \dots, \\ \frac{d^2}{d\tau^2} &= D_0^2 + \epsilon 2D_0 D_1 + \epsilon^2 (2D_0 D_2 + D_1^2) + \\ &+ \epsilon^3 2(D_0 D_3 + D_1 D_2) \dots, \end{aligned}$$

где $D_i = \partial/\partial T_i$. Подставляем эти выражения в соотношение (5) и приравниваем нулю множители перед различными степенями ϵ :

$$(D_0^2 + (1 + b_T)D_0 + b_T)W_0 = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (D_0^2 + (1 + b_T)D_0 + b_T)W_1 + \\ (2D_0 D_1 + (1 + b_T)D_1 + 1)W_0 = 0, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D_0^2 + (1 + b_T)D_0 + b_T)W_2 + \\ + (2D_0 D_1 + (1 + b_T)D_1 + 1)W_1 + \\ + (D_1^2 + 2D_0 D_2 + (1 + b_T)D_2)W_0 = 0, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D_0^2 + (1 + b_T)D_0 + b_T)W_3 + \\ + (2D_0 D_1 + (1 + b_T)D_1 + 1)W_2 + \\ + (D_1^2 + 2D_0 D_2 + (1 + b_T)D_2)W_1 + \\ + (2D_0 D_3 + 2D_1 D_2 + (1 + b_T)D_3)W_0 = 0. \quad (9) \end{aligned}$$

Решение уравнения (6) ищем в виде $\exp(\lambda T_0)$, откуда для характеристических чисел получаем

$$\lambda^2 + (1 + b_T)\lambda + b_T = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -b_T$ и

$$W_0 = a_0 \exp(-T_0) + b_0 \exp(-b_T T_0), \quad (10)$$

где неизвестные α_0 и β_0 являются функциями переменных T_1, T_2, T_3 , т.е. $\alpha_0 = \alpha_0(T_1, T_2, T_3)$ и $\beta_0 = \beta_0(T_1, T_2, T_3)$. Подставляя это решение в уравнение (7), находим

$$\begin{aligned} (D_0^2 + (1 + b_T)D_0 + b_T)W_1 = \\ = \left(\kappa_T \frac{\partial \alpha_0}{\partial T_1} - \alpha_0 \right) \exp(-T_0) - \\ - \left(\kappa_T \frac{\partial \beta_0}{\partial T_1} + \beta_0 \right) \exp(-b_T T_0), \quad (11) \end{aligned}$$

где $\kappa_T = (1 - b_T)$. Собственные числа однородного уравнения такие же, как и собственные числа квазиполинома, стоящего в правой части. Следовательно, в решении будут участвовать слагаемые вида $T_0 \exp(-T_0)$, которые приводят к нерегулярности разложения. Для того, чтобы избавиться от них, приравниваем тождественно к нулю правую часть уравнения (11):

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial T_1} = \frac{\alpha_0}{\kappa_T}, \quad \frac{\partial \beta_0}{\partial T_1} = -\frac{\beta_0}{\kappa_T}. \quad (12)$$

Тогда

$$\begin{aligned} W_0 = \eta_0 \exp\left(-T_0 + \frac{T_1}{\kappa_T}\right) + \\ + \theta_0 \exp\left(-b_T T_0 - \frac{T_1}{\kappa_T}\right), \quad (13) \end{aligned}$$

$$W_1 = \alpha_1 \exp(-T_0) + \beta_1 \exp(-b_T T_0). \quad (14)$$

Здесь $\eta_0 = \eta_0(T_2, T_3), \theta_0 = \theta_0(T_2, T_3), \alpha_1 = \alpha_1(T_1, T_2, T_3), \beta_1 = \beta_1(T_1, T_2, T_3)$.

Из уравнения (8) получаем

$$\begin{aligned} (D_0^2 + (1 + b_T)D_0 + b_T)W_2 = \\ = -\exp(-T_0) \left[\alpha_1 - \kappa_T \frac{\partial \alpha_1}{\partial T_1} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\eta_0}{\kappa_T^2} - \kappa_T \frac{\partial \eta_0}{\partial T_2} \right) \exp\left(\frac{T_1}{\kappa_T}\right) \right] - \\ - \exp(-b_T T_0) \left[\beta_1 + \kappa_T \frac{\partial \beta_1}{\partial T_1} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\theta_0}{\kappa_T^2} + \kappa_T \frac{\partial \theta_0}{\partial T_2} \right) \exp\left(-\frac{T_1}{\kappa_T}\right) \right]. \quad (15) \end{aligned}$$

Чтобы избежать в решении членов вида $T_0 \exp(-T_0)$, приравняем тождественно к нулю правую часть этого уравнения:

$$\begin{aligned} & \kappa_T \frac{\partial \alpha_1}{\partial T_1} - \alpha_1 = \\ & = \left(\frac{\eta_0}{\kappa_T^2} - \kappa_T \frac{\partial \eta_0}{\partial T_2} \right) \exp\left(\frac{T_1}{\kappa_T}\right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & -\kappa_T \frac{\partial \beta_1}{\partial T_1} - \beta_1 = \\ & = \left(\frac{\theta_0}{\kappa_T^2} + \kappa_T \frac{\partial \theta_0}{\partial T_2} \right) \exp\left(-\frac{T_1}{\kappa_T}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Члены вида $T_1 \exp(\lambda T_1)$ также приводят к нерегулярности решения. Чтобы избавиться от них, тождественно приравняем к нулю правые части уравнений (16) и (17). Тогда получаем

$$\kappa_T \frac{\partial \eta_0}{\partial T_2} = \frac{\eta_0}{\kappa_T^2}, \quad \kappa_T \frac{\partial \theta_0}{\partial T_2} = -\frac{\theta_0}{\kappa_T^2}, \quad (18)$$

$$\eta_0 = \phi_0 \exp\left(\frac{T_2}{\kappa_T^3}\right), \quad \theta_0 = \psi_0 \exp\left(-\frac{T_2}{\kappa_T^3}\right), \quad (19)$$

$$\alpha_1 = \eta_1 \exp\left(\frac{T_1}{\kappa_T}\right), \quad \beta_1 = \theta_1 \exp\left(-\frac{T_1}{\kappa_T}\right), \quad (20)$$

где $\eta_1 = \eta_1(T_2, T_3)$, $\theta_1 = \theta_1(T_2, T_3)$, $\phi_0 = \phi_0(T_3)$, $\psi_0 = \psi_0(T_3)$.

Откуда

$$\begin{aligned} W_0 = & \phi_0 \exp\left(-T_0 + \frac{T_1}{\kappa_T} + \frac{T_2}{\kappa_T^3}\right) + \\ & + \psi_0 \exp\left(-b_T T_0 - \frac{T_1}{\kappa_T} - \frac{T_2}{\kappa_T^3}\right), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} W_1 = & \eta_1 \exp\left(-T_0 + \frac{T_1}{\kappa_T}\right) + \\ & + \theta_1 \exp\left(-b_T T_0 - \frac{T_1}{\kappa_T}\right), \end{aligned} \quad (22)$$

$$W_2 = \alpha_2 \exp(-T_0) + \beta_2 \exp(-b_T T_0), \quad (23)$$

где $\alpha_2 = \alpha_2(T_1, T_2, T_3)$, $\beta_2 = \beta_2(T_1, T_2, T_3)$.

Подставляя найденные выражения в уравнение (9), получаем

$$\begin{aligned} & (D_0^2 + (1 + b_T)D_0 + b_T)W_3 = \\ & = -\exp(-T_0) \left\{ \alpha_2 - \kappa_T \frac{\partial \alpha_2}{\partial T_1} + \right. \\ & + \exp\left(\frac{T_1}{\kappa_T}\right) \left(\frac{\eta_1}{\kappa_T^2} - \kappa_T \frac{\partial \eta_1}{\partial T_2} \right) + \\ & + \exp\left(\frac{T_1}{\kappa_T} + \frac{T_2}{\kappa_T^3}\right) \left[\frac{2\phi_0}{\kappa_T^4} - \kappa_T \frac{\partial \phi_0}{\partial T_3} \right] \left. \right\} - \\ & - \exp(-b_T T_0) \left\{ \beta_2 + \kappa_T \frac{\partial \beta_2}{\partial T_1} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \exp\left(-\frac{T_1}{\kappa_T}\right) \left(\frac{\theta_1}{\kappa_T^2} + \kappa_T \frac{\partial \theta_1}{\partial T_2} \right) + \\ & + \exp\left(-\frac{T_1}{\kappa_T} - \frac{T_2}{\kappa_T^3}\right) \left[\frac{2\psi_0}{\kappa_T^4} + \kappa_T \frac{\partial \psi_0}{\partial T_3} \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Осуществляя последовательно процедуру избавления решения от членов вида $T_0 \exp(\lambda T_0)$, $T_1 \exp(\lambda T_1)$, $T_2 \exp(\lambda T_2)$, находим

$$\phi_0 = c_1 \exp\left(\frac{2T_3}{\kappa_T^5}\right), \quad \psi_0 = c_2 \exp\left(-\frac{2T_3}{\kappa_T^5}\right), \quad (25)$$

$$\eta_1 = \phi_1 \exp\left(\frac{T_2}{\kappa_T^3}\right), \quad \theta_1 = \psi_1 \exp\left(-\frac{T_2}{\kappa_T^3}\right), \quad (26)$$

$$\alpha_2 = \eta_2 \exp\left(\frac{T_1}{\kappa_T}\right), \quad \beta_2 = \theta_2 \exp\left(-\frac{T_1}{\kappa_T}\right), \quad (27)$$

где c_1 и c_2 – постоянные величины; $\eta_2 = \eta_2(T_2, T_3)$; $\theta_2 = \theta_2(T_2, T_3)$; $\phi_1 = \phi_1(T_3)$; $\psi_1 = \psi_1(T_3)$.

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} W = & c_1 \exp\left(-T_0 + \frac{T_1}{\kappa_T} + \frac{T_2}{\kappa_T^3} + \frac{2T_3}{\kappa_T^5}\right) + \\ & + c_2 \exp\left(-b_T T_0 - \frac{T_1}{\kappa_T} - \frac{T_2}{\kappa_T^3} - \frac{2T_3}{\kappa_T^5}\right) + \\ & + \epsilon \phi_1(T_3) \exp\left(-T_0 + \frac{T_1}{\kappa_T} + \frac{T_2}{\kappa_T^3}\right) + \\ & + \epsilon \psi_1(T_3) \exp\left(-b_T T_0 - \frac{T_1}{\kappa_T} - \frac{T_2}{\kappa_T^3}\right) + \\ & + \epsilon^2 \left[\eta_2(T_2, T_3) \exp\left(-T_0 + \frac{T_1}{\kappa_T}\right) + \right. \\ & + \theta_2(T_2, T_3) \exp\left(-b_T T_0 - \frac{T_1}{\kappa_T}\right) \left. \right] + \\ & + \epsilon^3 [\alpha_3(T_1, T_2, T_3) \exp(-T_0) + \\ & + \beta_3(T_1, T_2, T_3) \exp(-b_T T_0)] + O(\epsilon^4 \tau, \epsilon^4). \end{aligned} \quad (28)$$

Заметим, что

$$\phi_1(T_3) = \phi_1(0) + \left(\frac{\partial \phi_1(T_3)}{\partial T_3} \right)_{T_3=0} T_3 + O(\epsilon^3 \tau),$$

т.е.

$$\epsilon \phi_1(T_3) = \epsilon \phi_1(0) + O(\epsilon^4 \tau).$$

Отсюда следует, что функции

$$\begin{aligned} & \epsilon \phi_1(T_3), \quad \epsilon \psi_1(T_3), \quad \epsilon^2 \eta_2(T_2, T_3), \quad \epsilon^2 \theta_2(T_2, T_3), \\ & \epsilon^3 \alpha_3(T_1, T_2, T_3), \quad \epsilon^3 \beta_3(T_1, T_2, T_3) \end{aligned}$$

в данном приближении можно считать постоянными.

Пусть $W(0) = W_0^{in}$ и $dW(0)/d\tau = W_1^{in}$ – некоторые начальные условия уравнения (5). Используя

эти условия, приравниваем нулю множители перед различными степенями ϵ в решении (28) и находим неизвестные постоянные. При этом нетрудно убедиться, что постоянные перед всеми степенями ϵ , за исключением быть может нулевой степени – равны нулю. В итоге получим (в размерном виде)

$$W = a \exp \left[\left(-\nu k^2 + \frac{\gamma \omega^2}{\nu k^2} + \frac{\gamma^3 \omega^4}{\nu^3 k^6} + \frac{2\gamma^5 \omega^6}{\nu^5 k^{10}} \right) t \right] + b \exp \left[\left(-\chi_T k^2 - \frac{\gamma \omega^2}{\nu k^2} - \frac{\gamma^3 \omega^4}{\nu^3 k^6} - \frac{2\gamma^5 \omega^6}{\nu^5 k^{10}} \right) t \right] + O(\epsilon^4 \tau, \epsilon^4), \quad (29)$$

где $\gamma = \nu / (\nu - \chi_T)$, $\omega = mN/k$.

2.2. Предельные случаи

В дальнейшем для исследования поведения составляющей скорости W ограничимся порядком $O(\epsilon^3 \tau, \epsilon^3)$ в решении (29).

1). Пусть $t \sim 1/\nu k^2$, т.е. $\tau \sim 1$, тогда

$$W = a \exp \left[\left(-1 + \frac{\epsilon}{\kappa_T} + \frac{\epsilon^2}{\kappa_T^3} \right) \tau \right] + b \exp \left[\left(-b_T - \frac{\epsilon}{\kappa_T} - \frac{\epsilon^2}{\kappa_T^3} \right) \tau \right] + O(\epsilon^3). \quad (30)$$

На данном этапе эволюция возмущений характеризуется системой двух фундаментальных решений (мод) [3]. Первое решение связано с вязкостным механизмом вырождением, второе – с диффузионным механизмом. Первое решение вырождается быстрее, чем второе, при этом скорость затухания первого решения уменьшается под влиянием сил плавучести, а скорость затухания второго решения наоборот увеличивается. Нетрудно убедиться, что выражение (30), характеризующее данный этап эволюции, соответствует балансу инерционных и вязких сил [3] с точностью до $O(\epsilon)$:

$$\frac{d^2 W}{d\tau^2} + (1 + b_T) \frac{dW}{d\tau} + b_T W + O(\epsilon) = 0.$$

2). Рассмотрим теперь последний этап эволюции, который описан в работах [1, 2, 8]. $t \sim 1/\epsilon \nu k^2 = \nu k^4 / N^2 m^2$, т.е. $\tau \sim 1/\epsilon$. Положим $\tau = q/\epsilon$, где $q \sim 1$, тогда

$$W = a \exp \left(-\frac{q}{\epsilon} \right) \exp \left(\frac{q}{\kappa_T} + \frac{\epsilon q}{\kappa_T^3} \right) +$$

$$+ b \exp \left(-\frac{b_T q}{\epsilon} \right) \exp \left(-\frac{q}{\kappa_T} - \frac{\epsilon q}{\kappa_T^3} \right) + O(\epsilon^2). \quad (31)$$

Функция $\exp(-q/\epsilon)$ спадает быстрее, чем любая степень ϵ и, если b_T – мало ($b_T \sim \epsilon$), то на данной стадии поведение W будет определяться вторым решением. Следовательно, с течением времени первое решение вырождается и основным становится второе решение [3]. Нетрудно заметить, что выражение (31) удовлетворяет уравнению баланса сил вязкости и сил плавучести с точностью до $O(\epsilon^2)$:

$$(1 + b_T) \frac{dW}{d\tau} + b_T W + \epsilon W + O(\epsilon^2) = 0.$$

Как показано в [1, 12], что скорость затухания второго решения имеет экстремум в зависимости от соотношения между горизонтальным и вертикальным размерами возмущений. При фиксированном m минимальное значение скорости затухания, определяемое соотношением масштабов возмущения

$$k^6 = CN^2 m^2 / (\chi_T (\nu - \chi_T)), \quad (32)$$

описывается выражением

$$\sigma_{\min} = -\frac{C+1}{C^{2/3}} (N^2 m^2)^{1/3} \frac{\chi_T^{2/3}}{(\nu - \chi_T)^{1/3}}, \quad (33)$$

которое при $C = 2$ переходит в найденное в работе [12].

2.3. Компоненты скорости и завихренности

Рассмотрим теперь горизонтальные составляющие вектора скорости \vec{V} . Решения для горизонтальных составляющих $U(x, y, z, t)$ и $V(x, y, z, t)$ ищем в виде

$$U(x, y, z, t) = U(\tau) \exp(i\vec{k}\vec{r}), \\ V(x, y, z, t) = V(\tau) \exp(i\vec{k}\vec{r}),$$

где $\tau = \nu k^2 t$ – безразмерное время. Из системы (2) для горизонтальных составляющих $U(\tau)$ и $V(\tau)$ получаем

$$\frac{d^2 U}{d\tau^2} + (1 + b_T) \frac{dU}{d\tau} + b_T U = \frac{N^2 k_1 k_3}{\nu^2 k^6} W(\tau) = \epsilon \frac{k_1 k_3}{m^2} W(\tau), \quad (34)$$

$$\frac{d^2 V}{d\tau^2} + (1 + b_T) \frac{dV}{d\tau} + b_T V = \frac{N^2 k_2 k_3}{\nu^2 k^6} W(\tau) = \epsilon \frac{k_2 k_3}{m^2} W(\tau), \quad (35)$$

где $W(\tau) = a \exp(d_1\tau) + b \exp(d_2\tau)$ – найденное выше решение уравнения (5), а d_1 и d_2 удовлетворяют уравнению

$$d^2 + (1 + b_T)d + b_T + \epsilon = 0.$$

Решения U и V уравнений (34) и (35) ищем в виде $U = U_h + U_{in}$ и $V = V_h + V_{in}$, где U_h и V_h – общие решения однородных уравнений, а U_{in} и V_{in} – частные решения неоднородных уравнений. Частные решения ищем в виде $U_{in} = A \exp(d_1\tau) + B \exp(d_2\tau)$ и $V_{in} = C \exp(d_1\tau) + D \exp(d_2\tau)$, тогда $A = -ak_1k_3/m^2$, $B = -bk_1k_3/m^2$, $C = -ak_2k_3/m^2$, $D = -bk_2k_3/m^2$. Откуда окончательно получаем

$$U(\tau) = [C_1 \exp(-\tau) + C_2 \exp(-b_T\tau)] - \frac{k_1k_3}{m^2} [a \exp(d_1\tau) + b \exp(d_2\tau)], \quad (36)$$

$$V(\tau) = [\tilde{C}_1 \exp(-\tau) + \tilde{C}_2 \exp(-b_T\tau)] - \frac{k_2k_3}{m^2} [a \exp(d_1\tau) + b \exp(d_2\tau)], \quad (37)$$

$$W(\tau) = [a \exp(d_1\tau) + b \exp(d_2\tau)]. \quad (38)$$

Найдем составляющие вектора завихренности:

$$\zeta_x(\tau) = i \left(-k_3 V_h(\tau) + \frac{k_2 k^2}{m^2} W(\tau) \right), \quad (39)$$

$$\zeta_y(\tau) = i \left(k_3 U_h(\tau) - \frac{k_1 k^2}{m^2} W(\tau) \right), \quad (40)$$

$$\zeta_z(\tau) = i (k_1 V_h(\tau) - k_2 U_h(\tau)). \quad (41)$$

Видно, что вертикальная компонента завихренности в данном случае связана с принципиально другим типом движения, а именно с долгоживущими квазигоризонтальными вихрями, ось которых направлена вертикально вверх [8]. Вырождение этих вихрей характеризуются экспоненциальными зависимостями $\exp(-\nu k^2 t)$ и $\exp(-\chi_T k^2 t)$, причем коэффициенты затухания амплитуд в данном случае по порядку такие же, как и коэффициенты затухания внутренних волн и слоистых структур. Эволюция же горизонтальных компонент завихренности (39) и (41) обусловлена вырождением внутренних волн или слоистых структур (второе слагаемое) либо квазигоризонтальных вихрей (первое слагаемое). Отметим, что минимальная скорость затухания достигается при $k_3 = 0$. Следовательно, горизонтальные компоненты завихренности в этом случае определяются только внутриволновыми движениями либо слоистыми структурами.

Таким образом, методом многих масштабов получено выражение, которые описывает поведение возмущений вертикальной компоненты скорости

на упомянутых выше этапах заключительной стадии вырождения турбулентности. На основе этого выражения найдены зависимости, которые описывают затухание горизонтальных компонент скорости и составляющих вектора завихренности.

2.4. Стратификация по температуре и солености

Аналогичные выражения для описания поведения возмущений скорости и завихренности получены также в случае стратификации по температуре и по солености. Ниже приведены основные результаты для этого случая. Из системы (2) получаем следующее уравнение для W :

$$\begin{aligned} & \frac{d^3 W}{d\tau^3} + (1 + b_T + b_s) \frac{d^2 W}{d\tau^2} + \\ & + (b_T + b_s + b_T b_s) \frac{dW}{d\tau} + b_T b_s W + \\ & + (\epsilon + \delta) \frac{dW}{d\tau} + (b_s \epsilon + b_T \delta) W = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

где введены два малых параметра

$$\epsilon = \frac{m^2 N_T^2}{\nu^2 k^6} = \frac{\omega_T^2}{\nu^2 k^4} \ll 1,$$

$$\delta = \frac{m^2 N_s^2}{\nu^2 k^6} = \frac{\omega_s^2}{\nu^2 k^4} \ll 1.$$

Применяя метод многих масштабов, введем следующие масштабы времени: $T_0 = \tau$, $T_1 = \epsilon\tau$, $T_2 = \epsilon^2\tau$, $\Theta_1 = \delta\tau$, $\Theta_2 = \delta^2\tau$, $\Theta_3 = \epsilon\delta\tau$. Решение ищем в виде:

$$\begin{aligned} W = & W_{00} + \epsilon W_{10} + \epsilon^2 W_{20} + \\ & + \delta W_{01} + \delta^2 W_{02} + \epsilon\delta W_{11} + \\ & + O(\epsilon^3, \delta^3, \epsilon^2\delta, \epsilon\delta^2, \epsilon^3\tau, \delta^3\tau, \epsilon^2\delta\tau, \epsilon\delta^2\tau), \end{aligned} \quad (43)$$

где $W_{ij} = W_{ij}(T_0, T_1, T_2, \Theta_1)$. Разлагая производные с точностью до третьего порядка малости и подставляя соответствующие выражения в (42), приравниваем нулю множители, стоящие перед различными степенями ϵ и δ . В итоге получаем

$$\begin{aligned} W = & A \exp(\sigma_1 t) + \\ & + B \exp(\sigma_2 t) + C \exp(\sigma_3 t) + \\ & + O(\epsilon^3, \delta^3, \epsilon^2\delta, \epsilon\delta^2, \epsilon^3\tau, \delta^3\tau, \epsilon^2\delta\tau, \epsilon\delta^2\tau), \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\sigma_1 = -\nu k^2 + \frac{1}{\kappa_T} \frac{\omega_T^2}{\nu k^2} + \frac{1}{\kappa_T^3} \frac{\omega_T^4}{\nu^3 k^6} +$$

$$+ \frac{1}{\kappa_s} \frac{\omega_s^2}{\nu k^2} + \frac{1}{\kappa_s^3} \frac{\omega_s^4}{\nu^3 k^6} + \frac{\kappa_T + \kappa_s}{\kappa_T^2 \kappa_s^2} \frac{\omega_T^2 \omega_s^2}{\nu^3 k^6}, \quad (45)$$

$$\sigma_2 = -\chi_T k^2 - \frac{1}{\kappa_T} \frac{\omega_T^2}{\nu k^2} - \frac{1}{\kappa_T^3} \frac{\omega_T^4}{\nu^3 k^6} + \frac{1}{\kappa_T^2 \kappa_{sT}} \frac{\omega_T^2 \omega_s^2}{\nu^3 k^6}, \quad (46)$$

$$\sigma_3 = -\chi_s k^2 - \frac{1}{\kappa_s} \frac{\omega_s^2}{\nu k^2} - \frac{1}{\kappa_s^3} \frac{\omega_s^4}{\nu^3 k^6} - \frac{1}{\kappa_s^2 \kappa_{Ts}} \frac{\omega_s^2 \omega_T^2}{\nu^3 k^6}, \quad (47)$$

$\kappa_s = 1 - b_s$, $b_s = \chi_s/\nu$, $\kappa_{sT} = b_s - b_T$. Из выражения (44) следует, что наличие дополнительной стратификации (по солености) приводит к появлению третьего решения, т.е. вырождение возмущений на финальной стадии будет определяться системой трех фундаментальных решений [3]. Отметим также, что найденное выражение характеризует поведение возмущений вертикальной компоненты скорости на описанных ранее этапах рассматриваемой стадии.

На основе этого выражения были найдены соответствующие зависимости, которые характеризуют эволюцию возмущений других компонент скорости и компонент завихренности (из-за громозкости выражения не приводятся).

3. СКОРОСТИ ЗАТУХАНИЯ

В заключении проведем сравнение скоростей затухания изучаемых типов движений. Ограничимся случаем температурной стратификации.

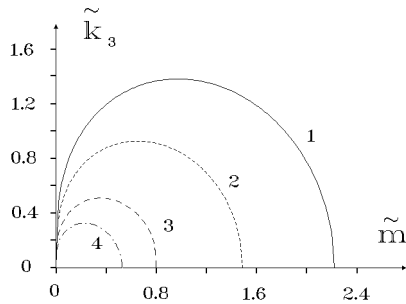


Рис.1. Диаграмма скоростей затухания возмущений

На рис. 1 изображена зависимость (32) (кривая 1), характеризующая минимальную скорость затухания слоистых структур, которая определяется балансом эффектов диффузии и коллапса. Здесь $\tilde{k}_3 = k_3 L_\nu$ и $\tilde{m} = m L_\nu$, $L_\nu = (\nu/N)^{1/2}$ – вязкий масштаб стратифицированной жидкости [1,

3]. Отметим, что для условий термоклина (период Брента-Вайсяля $T_{B-V} \approx 40$ мин) масштаб $L_\nu \approx 2$ см, для резкого термоклина $T_{B-V} \approx 4$ мин – $L_\nu \approx 0.7$ см. Слоистые структуры, у которых $\tilde{m} > (\tilde{m}_{cr})_1 = (CPr^2/(Pr-1))^{1/4}$, т.е. точки пересечения кривой с осью абсцисс, не имеют указанного минимума скорости затухания. Здесь $Pr = \nu/\chi_T$ – число Прандтля.

Кривая (2) разделяет области существования слоистых структур (выше кривой) и внутренних волн (ниже кривой) [1]. При $\tilde{m} > (\tilde{m}_{cr})_2 = (2Pr/(Pr-1))^{1/2}$ из-за сильного влияния вязких и диффузионных эффектов могут существовать только слоистые структуры.

Сравнивая скорость затухания внутренних волн в вязкой, стратифицированной жидкости $\sigma = -(\nu + \chi_T)k^2/2$ [7, 12] с минимумом скорости затухания слоистых структур (33), можно показать, что внутренние волны с параметрами $\tilde{k}_3 < \tilde{k}_3^*$, где

$$\tilde{k}_3^* = \sqrt{\frac{2C_1 Pr}{Pr+1} \left(\frac{1}{Pr(Pr-1)} \right)^{1/3} \tilde{m}^{2/3} - \tilde{m}^2},$$

затухают медленнее, чем слоистые структуры, обладающие минимальной скоростью затухания при заданном значении \tilde{m} . Здесь $C_1 = (C + 1)/C^{2/3}$.

Если же $\tilde{k}_3 > \tilde{k}_3^*$, то волны затухают быстрее. Зависимость \tilde{k}_3^* от \tilde{m} изображена кривой 3. При $\tilde{m} > (\tilde{m}_{cr})_3$, где

$$(\tilde{m}_{cr})_3 = \left[8C_1^3 \left(\frac{Pr}{Pr+1} \right)^3 \frac{1}{Pr(Pr-1)} \right]^{1/4},$$

которой соответствует точка пересечения кривой 3 с осью абсцисс, наиболее долгоживущими являются слоистые структуры. Отметим, что при $C = 2$ выражение для $(\tilde{m}_{cr})_3$ совпадает с приведенным в работе [7].

Сравнивая скорости затухания вихревых структур $\sigma = -\nu k^2$ с минимальной скоростью затухания слоистых структур с заданным значением \tilde{m} , находим, что при $\tilde{m} > (\tilde{m}_{cr})_4$, где

$$(\tilde{m}_{cr})_4 = \left(\frac{C^3}{Pr(Pr-1)} \right)^{1/4},$$

вихревые структуры затухают быстрее. При $\tilde{m} < (\tilde{m}_{cr})_4$ вихревые структуры, у которых вертикальное число $k_3 < \tilde{k}_3^{**}$, где

$$\tilde{k}_3^{**} = \sqrt{C_1 \left(\frac{1}{Pr(Pr-1)} \right)^{1/3} \tilde{m}^{2/3} - \tilde{m}^2},$$

затухают медленнее слоистых структур. И наоборот, при $k_3 > k_3^{**}$, дольше живут слоистые структуры. Зависимость k_3^{**} от \tilde{m} представлена на рис. 1 кривой 4, ее точка пересечения с осью абсцисс определяет положение $(\tilde{m}_{cr})_4$. Эти результаты показывают, при каких значениях параметров горизонтальные компоненты завихренности (39), (40) определяются квазигоризонтальными движениями, а в каких случаях внутренними волнами и слоистыми структурами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе методом многих масштабов получены выражения, описывающие поведение амплитуд возмущений компонент скорости в вязкой жидкости, в которой имеется стратификация по плотности. Эти выражения характеризуют затухание возмущений на заключительной стадии их эволюции. Проведено сравнение скоростей затухания возможных типов движений (внутренние волны, слоистые и вихревые структуры). Показано что в зависимости от масштабов возмущений в жидкости с течением времени будет наблюдаться тот или иной тип движения. Определены критические значения горизонтальных размеров возмущений, которые дают возможность определить типы движения, являющиеся наиболее долгоживущими в рассматриваемой среде.

В заключении отметим, что выполненная работа финансировалась Государственным фондом фундаментальных исследований при ГКНТ Украины N 13.3/144, 1994.

1. Гетман Е.Н., Никишов В.И. О вырождении слоистых структур в стратифицированной жидкости // Гидромеханика.– 1989.– Вып. 60.– С. 15 – 20.
2. Городцов В.А. О слоистых структурах на конечной стадии затухания турбулентности в стратифицированных жидкостях // Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа.– 1985.– N. 4.– С. 69 – 76.
3. Мадерич В.С., Никишов В.И., Стеценко А.Г. Динамика внутреннего перемешивания в стратифицированной среде.– К: Наукова думка, 1988.– 239 с.
4. Мадерич В.С., Никишов В.И. Перемешивание и рестратификация в устойчиво стратифицированной жидкости // Гидромеханика.– 1996.– Вып. 70.– С. 69 – 77.
5. Монин А.С., Озмидов Р.В. Океанская турбулентность.– Л: Гидрометеопиздат, 1981.– 320 с.
6. Найфе А.Х. Методы возмущений.– М: Мир, 1976.– 455 с.
7. Франк А.М. Вырождающаяся турбулентность в стратифицированной жидкости.– Препринт ВЦ СО АН СССР; 18: Красноярск, 1984.– 22 с.
8. Gregg M.C. Diapycnal mixing in the thermocline: a review // J. Geophys. Res.– 1987.– vol.92, No. C5.– P. 5249 – 5286.
9. Grinchenko V.T., Maderich V.S., Nikishov V.I. Mixing and restratification in stably stratified fluids // Proc. of the Coll. of oceanic vortices (ed. G.J.F. van Heijst), Amsterdam, 11-13 May, 1993.– N.-H., Amsterdam, 1994.– 75 – 83.– P.
10. Lelong M.-P., Riley J.J. Internal wave-vortical interactions in strongly stratified flows // J. Fluid Mech.– 1991.– vol. 232.– P. 1 – 19.
11. Lilly D.K. Stratified turbulence and the mesoscale variability of the Atmosphere // J. Atm. Sci.– 1983.– vol.40.– P. 749 – 761.
12. Linden P.F., Pearson H.I. The final of decay of turbulence in stably stratified fluid // J. Fluid Mech.– 1983.– 134.– P. 195 – 203.
13. Riley J.J., Metcalfe R.W., Weissman W.A. Direct numerical simulation of homogeneous turbulence in density stratified fluids // Proc. AIP Conf. on nonlinear properties of internal waves (ed. B.J. West), AIP.– 1981.– 79 – 112.– P.
14. Staquet Ch., Riley J.J. On the velocity field associated with potential vorticity // Dyn. Atm. and Oceans.– 1989.– vol. 14.– P. 93 – 123.
15. Staquet Ch. Wave/vortex decomposition in stably stratified flows // Theoret. and Comput. Fluid Dyn.– 1993.– No.5.– P. 195 – 213.