

УДК 532.526

АНАЛИЗ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХМЕРНЫХ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР

А. А. ГУРЖИЙ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 20.03.98

Проводится анализ численных и экспериментальных данных процесса перемешивания пассивной примеси при несимметричном взаимодействии (обменном взаимодействии) двухмерных вихревых структур в стратифицированной по плотности жидкости. Сравнительный анализ экспериментальных данных и численных расчетов, основанных на модели точечных вихрей в идеальной жидкости, показывает, что вязкие эффекты при взаимодействии вихревых структур не оказывают заметного влияния на процессы перемешивания в течение всего взаимодействия. Приводится оценка времени, в течение которого модель идеальной жидкости может быть использована при изучении процессов перемешивания в реальных жидкостях.

Проводиться аналіз чисельних та експериментальних даних процесу перемішування пасивної домішки при несиметричній взаємодії (обмінній взаємодії) двомірних вихрових структур в стратифікованій по густині рідині. Порівняльний аналіз експериментальних даних і чисельних розрахунків, які ґрунтуються на моделі точечних вихорів в ідеальній рідині, показує, що в'язкі ефекти при взаємодії вихрових структур не чинять помітного впливу на процеси перемішування протягом всієї взаємодії. Наводиться оцінка часу, протягом якого модель ідеальної рідини може бути використана при вивченні процесів перемішування у реальних рідинах.

The analysis of numerical and experimental data of mixing processes of passive impurity under nonsymmetrical interaction (exchange interaction) of two-dimensional vortex structures in fluid stratified on density is carried out. The comparative analysis of experimental data and numerical results shows that the viscous effects during an interaction of vortex structures don't render an appreciable influence on mixing processes during whole interaction. An estimation of a period of time, during which the model of an ideal fluid can be used for studying processes of mixing in real fluids, is given.

ВВЕДЕНИЕ

Динамика двухмерных вихревых структур представляет собой интересное и привлекательное природное явление. Их зарождение, развитие, взаимодействие и диссипация, так широко наблюдаемые в повседневной жизни, стимулировали интенсивные исследования и стремительный прогресс в понимании процессов, связанных с эволюцией завихренности в сложных гидродинамических течениях [1-3]. Если решение таких задач, как правило численное, сопровождается большими математическими трудностями и требует больших вычислительных ресурсов, то построение модельных представлений в динамике вихревых структур позволяет не только существенно упростить решение, но и более наглядно, доступно проанализировать и объяснить основные закономерности вихревых течений в более общем случае.

Одна из широко используемых моделей двухмерных вихревых течений является модель точечных вихрей и ее обобщение на вязкий случай – диссипативных точечных вихрей [4]. Здесь можно отметить теоретические и экспериментальные исследования крупномасштабных океанических и атмосферных течений [5, 6], изучение структуры отрывных течений за цилиндром [7], взаимодейст-

вие вихрей со свободной [8, 9] и твердой границами [2, 10], анализ энергетических характеристик двухмерных турбулентных течений [11], химических реакций при перемешивании [12] и др.

Во всех модельных представлениях весьма актуальным остается вопрос о степени адекватности исследуемой модели реальному физическому течению. В частности, одной из важных проблем при описании вихревых течений, очевидно, является влияние вязкости на динамику вихревых структур. Анализ упомянутых работ, к сожалению, не позволяет однозначно определить временные рамки, в которых может быть применена модель точечных вихрей в идеальной жидкости. В каждом конкретном случае этот промежуток времени определяется, либо исходя из экспериментальных данных, например [6, 10], либо путем введения диссипативной функции в распределение поля завихренности, например [7, 9].

Целью настоящих исследований является проведение сравнительного анализа процесса несимметричного взаимодействия двухмерных вихревых структур в безграничной жидкости на основе экспериментальных данных и результатов численного моделирования в рамках модели точечных вихрей в идеальной несжимаемой среде для выявления временных масштабов, при которых влиянием вязкости еще можно пренебрегать.

1. ЛАБОРАТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для генерации и визуализации вихревого течения в лабораторных условиях обычно используют метод инъекции подкрашенной жидкости в невозмущенную среду. Вихри способны вовлекать в свое движение часть близлежащей жидкости, образуя вихревое облако [4, 13]. Каждую частицу пассивной жидкости, занимающей этот объем, можно представить вихрем с нулевой интенсивностью. Такое “выделение” частиц (в лагранжевом представлении) часто применяют при анализе эксперимента [6, 10] и при моделировании процессов перемешивания [14, 15] с использованием известных методов, которые позволяют проследить деформацию выделенных областей в произвольном поле скорости [16].

Лабораторный эксперимент проводился в квадратном бассейне $80 \times 80 \times 30$ см, выполненном из плексигласа, 1 (рис. 1). Вертикальная двухслойная стратификация по плотности достигалась путем заполнения бассейна жидкостями с разными плотностями. Сначала бассейн заполнялся наполовину пресной водой с плотностью $\rho_0 = 1000$ кг/м³. Одновременно в резервуаре 2 готовилась соленая вода с плотностью $\rho_1 = 1082$ кг/м³. Когда движение жидкости в бассейне 1 и процесс растворения и перемешивания в резервуаре 2 полностью прекращались, через кран 3 и трубку 4, предварительно положенную на дно бассейна 1, соленую воду заливали в испытательный бассейн 1. Трубка 4 имела большое количество маленьких отверстий с диаметром не более 0.5 мм для сведения к минимуму турбулентных возмущений, вносимых поступающей соленой водой в невозмущенный пресный водный слой.

Заполнение бассейна 1 продолжалось до тех пор, пока уровень раздела между жидкостями не достигал оси инжекторов 5, через которые выдавливалась подкрашенная жидкость. Контроль среза плотности жидкостей по высоте свидетельствовал, что двухслойная стратификация обладала достаточным для проведения эксперимента скачком плотности в течение суток.

Отверстия инжекторов 5 имели ширину 4 мм и высоту 15 мм. На один из инжекторов (правый на рис. 1) жестко крепилась оптическая трубка 6. С ее помощью можно контролировать угол (в горизонтальной плоскости) относительно плоскости симметрии бассейна по шкале 7, размещенной возле левого по схеме инжектора. Для задания импульса жидкости, инжектируемой в бассейн, использовались два одинаковых поршня 8, приводимых в движение тактовым двигателем 9. Режимы

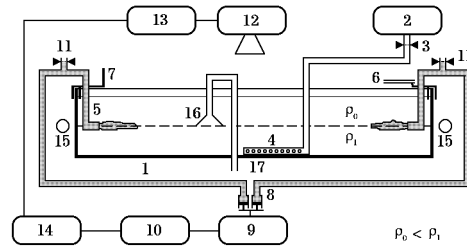


Рис. 1. Схема эксперимента

работы двигателя (продолжительность действия и скорость вытеснения жидкости) устанавливались и контролировались на пусковом устройстве 10.

Перед проведением опыта в инжектируемую систему заливалась подкрашенная флюорином (зеленого цвета) соленая вода, плотность которой должна равняться средней величине между ρ_0 и ρ_1 . В нашем случае $\rho_2 = 1040$ кг/м³. Количество флюориновой добавки (в пределах $10^{-4} \dots 10^{-8}$ г/л) определяет яркость свечения инжектируемой жидкости и существенного влияния на физические свойства жидкости не оказывает. После заполнения системы попавший в нее воздух удалялся через дополнительные клапаны 11.

Инжектируемая жидкость под действием силы Архимеда подвергается сжатию в вертикальной плоскости, постепенно деформируясь в тонкую по высоте структуру, которую в первом приближении можно считать двухмерной [6, 10]. После некоторого промежутка времени под действием вязких сил между стратифицированными слоями генерируется пара вихрей, равномерно движущихся навстречу друг к другу. Взаимодействие вихрей регистрировалось видеокамерой 12 и записывалось на видеомagneфон 13, контроль и синхронизация работы которых осуществлялись персональным компьютером 14.

Использование ламп дневного света 15 позволило значительно увеличить свечение флюорина в инжектируемой жидкости. Свет в испытательный бассейн 1 поступал через тонкую щель в боковой поверхности бассейна, окрашенной в черный цвет, что позволило исключить появление бликов или других световых помех при проведении эксперимента. Очистительная воронка 16 и кран 17 использовались для очистки слоя между жидкостями от флюорина, оставшегося от предыдущих экспериментов.

2. ДИНАМИКА ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ

Движение точечных вихрей описывается системой дифференциальных уравнений первого поряд-

ка. Ниже приводятся основные уравнения динамики точечных вихрей с целью установления обозначений, которые будут использоваться при анализе процессов размешивания. Подробности можно найти в [15, 17].

Эволюция N точечных вихрей с интенсивностью k_α , расположенных в (x_α, y_α) , описывается нелинейной динамической системой

$$\dot{z}_\alpha^* = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta=1}^N \frac{k_\beta}{z_\alpha - z_\beta}, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (1)$$

с начальными условиями $z_\alpha(0) = z_\alpha^0$. Здесь $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$, точка означает дифференцирование по времени, звездочка – комплексное сопряжение, а штрих – пропуск сингулярного члена $\alpha = \beta$.

Движение точечного вихря определяется гамильтоновой динамической системой

$$k_\alpha \dot{x}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, \quad k_\alpha \dot{y}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha} \quad (2)$$

с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N k_\alpha k_\beta \times \ln [(x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2]. \quad (3)$$

Имеются три первых интеграла системы (2), а именно:

$$Q = \sum_{\alpha=1}^N k_\alpha x_\alpha, \quad P = \sum_{\alpha=1}^N k_\alpha y_\alpha, \\ I = \sum_{\alpha=1}^N k_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2). \quad (4)$$

Гамильтониан H также является инвариантом системы.

Уравнение движения пассивной лагранжевой жидкой частицы в поле скорости, наведенном системой точечных вихрей, может быть получено, если рассматривать маркер в $Z = X + iY$ как точечный вихрь нулевой интенсивности [13]. В этом случае уравнение движения пассивной частицы

$$\dot{Z}_\alpha^* = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta=1}^N \frac{k_\beta}{Z - z_\beta}, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (5)$$

с $Z(0) = Z^0$ также может быть представлено в гамильтоновом виде

$$\dot{X} = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad \dot{Y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (6)$$

с

$$\Psi = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^N k_\beta \ln [(X - x_\beta)^2 + (Y - y_\beta)^2]. \quad (7)$$

Можно заключить, что рассматриваемая задача представляет собой гамильтонову систему с одной степенью свободы и эквивалентна кинематической задаче движения пассивной жидкой частицы [13, 15, 17].

3. АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ И ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим несимметричное обменное взаимодействие вихревых диполей. Этот случай интересен тем, что при взаимодействии вихри находятся в неравных условиях: одни вихри лишь незначительно меняют свою траекторию, в то время как другие фактически останавливаются и изменяют направление своего движения на противоположное [17, 18]. На рис. 2 показан пример такого взаимодействия, когда ось левого диполя, движущегося слева направо, повернута по часовой стрелке на угол 7° . В этом случае начальные условия, нормированные на интенсивность первого вихря k_1 и на половинное расстояние между вихрями в диполе $L = 0.5[(x_1^0 + x_2^0)^2 + (y_1^0 - y_2^0)^2]^{1/2}$, принимают вид

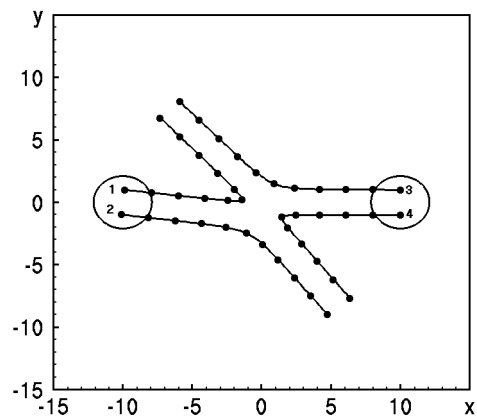


Рис. 2. Обменное взаимодействие при встречном движении двух вихревых пар

$$\begin{aligned} k_1 &= 1.0, & x_1^0 &= -9.882, & y_1^0 &= 0.993, \\ k_2 &= -1.0, & x_2^0 &= -10.118, & y_2^0 &= -0.993, \\ k_3 &= -1.0, & x_3^0 &= 10.000, & y_3^0 &= 1.000, \\ k_4 &= 1.0, & x_4^0 &= 10.000, & y_4^0 &= -1.000. \end{aligned} \quad (8)$$

Точками на рисунке обозначены положения вихрей через эквидистантные промежутки времени $\Delta t = 8\pi$.

В начальный момент времени вихри 1 и 2, образуя вихревую пару (вихревой диполь), движутся поступательно в положительном направлении оси OX . С другой стороны вихри 3 и 4 образуют вихревую пару с аналогичными параметрами и движутся поступательно в противоположном направлении. Сначала расстояние между вихрями намного превышает характерный размер вихревых пар, вихри двигаются поступательно с постоянной скоростью. С течением времени начинает сказываться взаимное влияние вихревых диполей друг на друга, что приводит к замедлению их движения и увеличению расстояния между вихрями, составляющих диполь.

В момент времени $t \approx 40\pi$ вихревые пары максимально приближаются друг к другу и происходит обменное взаимодействие, в результате которого из исходных вихревых диполей образуются новые пары вихрей: (1 и 3, 2 и 4). Скорости поступательного движения новых вихревых диполей направлены в противоположные стороны, вихри покидают зону взаимодействия. С течением времени расстояние между диполями увеличивается, влияние вихревых пар друг на друга уменьшается. В результате вихри движутся с постоянной скоростью, удаляясь на бесконечность в рамках модели идеальной жидкости. Направление движения образованных вихревых диполей зависит от асимметрии их взаимодействия, при симметричном взаимодействии новые вихревые пары движутся по направлению оси OY [2, 13, 18].

Вихревые диполи в процессе своего движения захватывают часть близлежащей жидкости, образуя так называемую атмосферу вихрей или вихревое облако. Этот процесс можно смоделировать, очертив в начальный момент каждую вихревую пару окружностью, внутренняя часть которой будет соответствовать подкрашенной жидкости. Размер окружности в начальный момент времени должен немного превышать максимальный размер облака, $R_0 > \approx 2.09L$ [13]. Начальное положение системы вихрей и части подкрашенной жидкости показано на рис. 2.

Адвекция пассивной примеси в поле скорости, наведенном системой точечных вихрей, описывается уравнением (5). Для построения деформированных областей в процессе взаимодействия вихревых диполей использовался метод кусочной сплайн-интерполяции [16].

На рис. 3, а показан момент подхода вихревых диполей к области, в которой произойдет их вза-

имодействие. Этот слайд выполнен, когда атмосфера вихревой пары уже сформировалась и представляет собой эллипс с полуосями $2.09L$ и $1.73L$ [13]. В этот момент времени (условно назовем его $t_{\text{экс}} = 0.0$ с) влияние вихревых пар друг на друга оказывается незначительным, вихри движутся поступательно со скоростью $V = 0.0093$ м/с. Используя выражение (1) и масштабную линейку, приведенную на рисунке, можно определить модуль интенсивности каждого вихря. В данном случае $k = 2\pi VL \approx 5.54 \cdot 10^{-3}$ м²/с.

Аналогичное положение вихрей можно наблюдать на рис. 4, а, выполненном на основе численных результатов. Условно назовем этот момент времени $t_{\text{чис}} = 0.0$. Интересно отметить, что модель точечных вихрей позволяет качественно описать структуру течения за вихревой парой: образование тройного хвоста.

На рис. 3, б показан слайд, выполненный в момент $t_{\text{экс}} = 6.4$ с. Вихревые пары начинают взаимодействовать, замедляют свое движение. Вихревые облака претерпевают деформацию, однако они еще не коснулись друг друга: имеется тонкая полоска неподкрашенной жидкости, которая разделяет вихревые облака. На рис. 4, б показано положение системы, рассчитанное для момента времени $t_{\text{чис}} = 33.6$. Отметим хорошее соответствие обоих рисунков: при сближении расстояние между вихрями в паре незначительно увеличивается, что приводит к подсосыванию с тыльной стороны части неподкрашенной жидкости в область, занимаемую облаком. Это можно наблюдать как в эксперименте, так и на основе численного моделирования.

Самую компактную область вихри занимают в момент, соответствующий $t_{\text{экс}} = 8.2$ с или $t_{\text{чис}} = 43.4$, показанный на рис. 3, в и 4, в. Те части подкрашенной жидкости, которые соответствуют вихрям 2 и 3, большим деформациям не подвергаются. В то же время, жидкость, принадлежащая другой паре вихрей, 1 и 4, деформируется в каплевидную структуру.

Более тонкую структуру перемешивания подкрашенной жидкости можно наблюдать на рис. 3, г и 4, г ($t_{\text{экс}} = 10.4$ с и $t_{\text{чис}} = 56.5$). Видно на обоих рисунках как нижний в системе вихрь 2 начинает терять часть ему принадлежащей жидкости. При этом соседний вихрь 4, который в данный момент образует с ним пару, пытается закрутить жидкость против часовой стрелки. Этот же процесс можно наблюдать для другой пары, расположенной в верхней части. Интересно отметить хорошее соответствие границ областей подкрашенной жидкости для обоих рисунков.

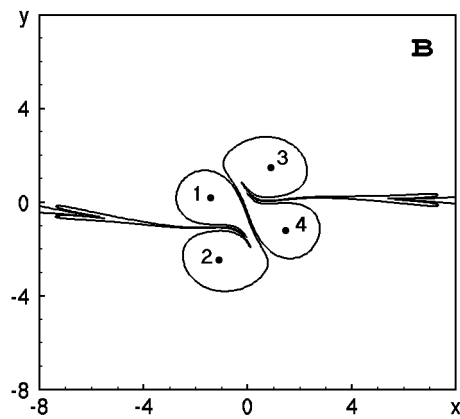
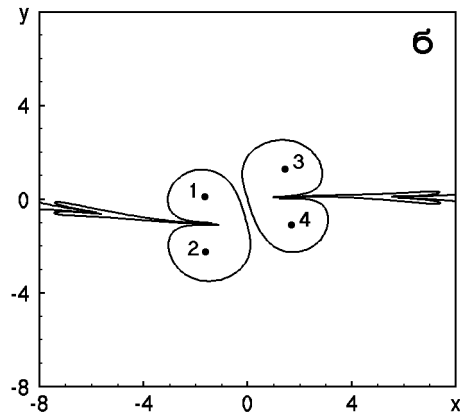
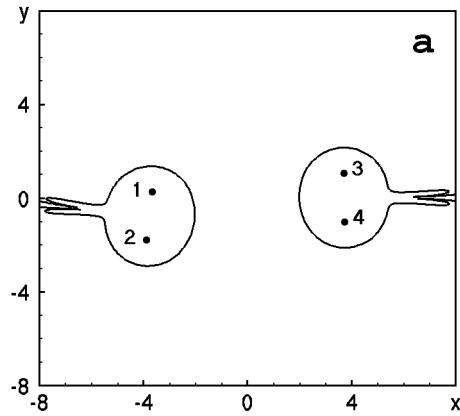
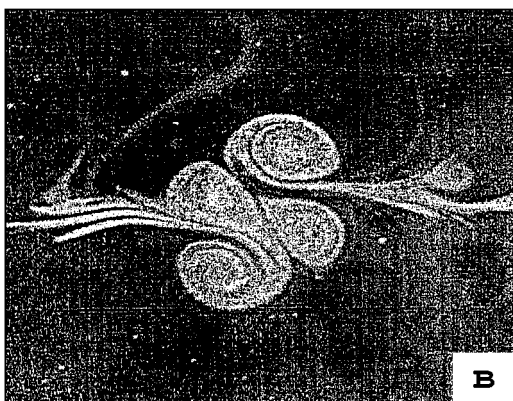
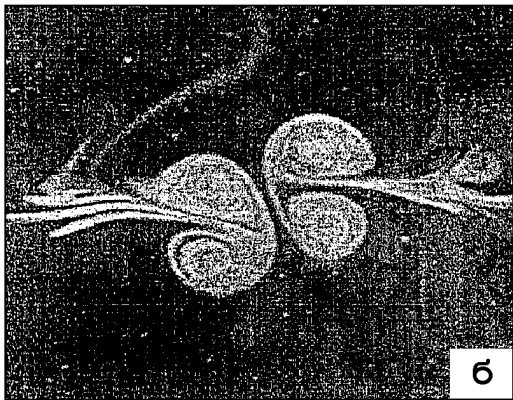
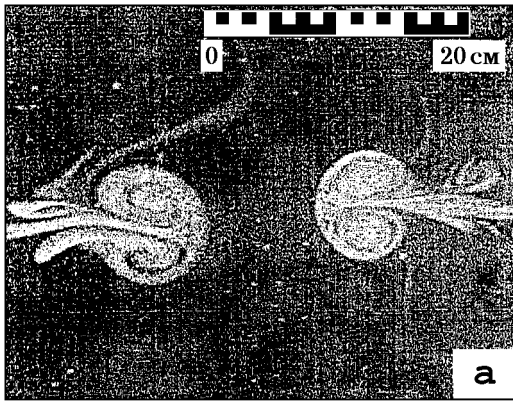
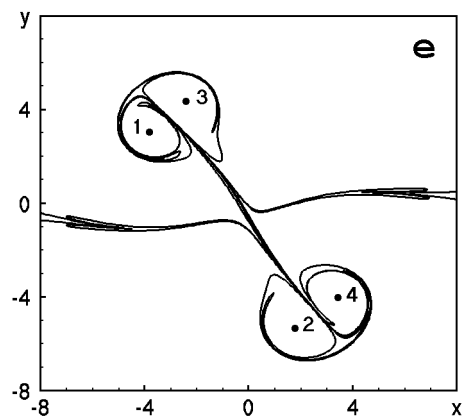
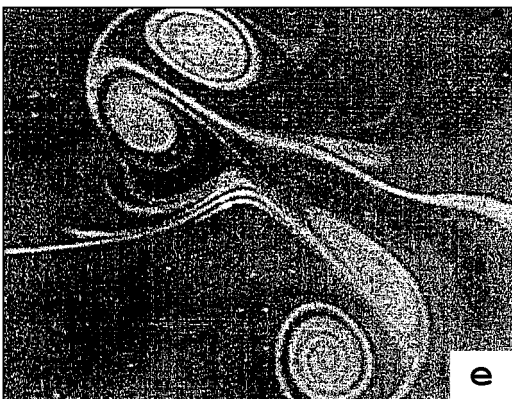
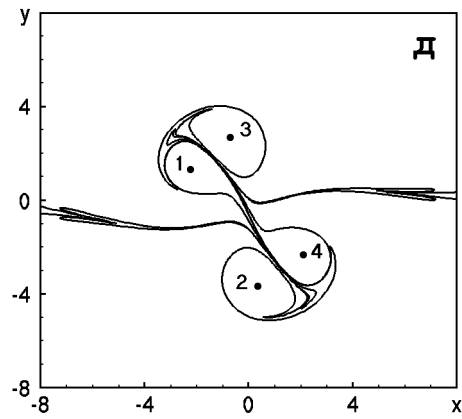
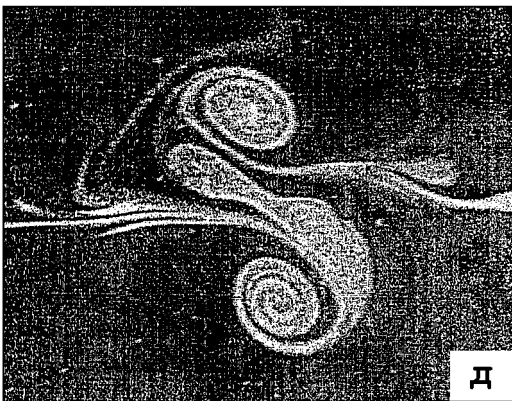
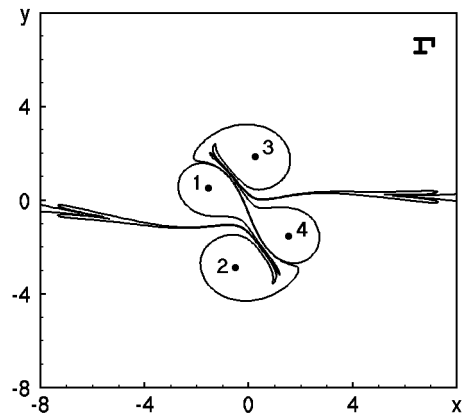
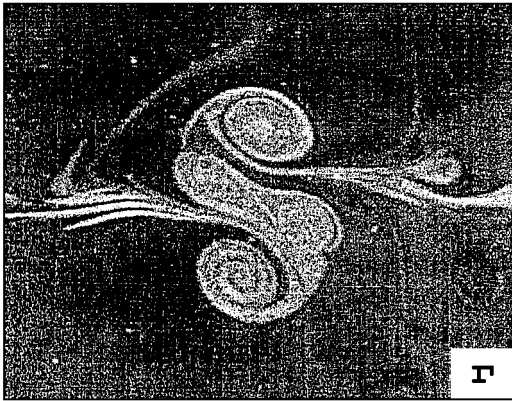


Рис. 3. Процесс перемешивания (продолжение на стр. 21) при встречном обменном взаимодействии двух вихревых пар, для моментов времени $t_{\text{вкс}}$: а - 0.0с, б - 6.4с, в - 8.2с, г - 10.4с, д - 13.8с, е - 32.3с

Рис. 4. Моделирование процесса перемешивания (продолжение на стр. 21) при взаимодействии двух точечных вихревых пар для моментов времени $t_{\text{чис}}$: а - 0.0, б - 33.6, в - 43.4, г - 56.5, д - 75.4, е - 180.0



На рис. 3, д и 4, д запечатлен момент, при котором вихри, образовав новые пары, начинают удаляться друг от друга, $t_{\text{экс}} = 13.8$ с, $t_{\text{чис}} = 75.4$. При этом структура границ той части жидкости, которая соответствует вихрям с номерами 2 и 3, удовлетворительно моделируется численным экспериментом. В то же время, форма границы подкрашенной жидкости, сопутствующей вихрям 1 и 4, уже имеет некоторые отличия. По всей видимости, вязкие эффекты для этих вихрей приводят к уменьшению их интенсивности и, как следствие, только лишь близлежащая к ним жидкость увлекается их движением. Более существенные различия можно найти на завершающей группе рисунков (рис. 3, е, 4, е), соответствующей моментам $t_{\text{экс}} = 32.3$ с и $t_{\text{чис}} = 180.0$. Интенсивность по модулю вихрей 1 и 4 стала меньше, чем вихрей 2 и 3, что привело даже к изменению траекторий движения пар: вихревые пары движутся не прямолинейно, а по траекториям, направления движения которых с течением времени слегка смещаются для обеих пар против часовой стрелки.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Сравнительный анализ экспериментальных данных и результатов численного моделирования процесса адвекции пассивной примеси в поле скорости системы четырех вихрей, участвующих в обменном взаимодействии, свидетельствует о том, что модель точечных вихрей в идеальной жидкости удовлетворительно описывает взаимодействие и перемешивание той части жидкости, которая увлекается вихревыми парами. Однако на финальной стадии взаимодействия, когда вихри удаляются, образовав новые пары, появляются отличия, вызванные влиянием вязкости.

Полагая, что на завершающей стадии взаимодействия влияние вязкости соизмеримо с инерционными эффектами, можно оценить время, в течение которого вязкостный член в уравнении Навье-Стокса станет одного порядка с инерционным членом, а именно $t \approx U/(\nu U'')$, где U – характерный масштаб скорости, ν – кинематический коэффициент вязкости, U'' – масштаб второй пространственной производной поля скорости. Если считать, что распределение поля скорости подчиняется закону $U \sim r^{-1}$, то для пассивной частицы, изначально удаленной от ближайшего вихря на расстоянии R , можно весьма приближенно оценить время, в течение которого энергия, потребляемая вязкостью, будет на порядок меньше начальной ки-

нетической энергией частицы:

$$t \approx 0.1 \frac{R^2}{\nu}. \quad (9)$$

В нашем случае, для вихревого облака с характерным размером $R \approx 1.5$ см, получаем $t \approx 20$ с. Отметим, что предложенная оценка для определения промежутка времени, в течение которого применима модель точечных вихрей в идеальной жидкости, является весьма приближенной. Тем не менее, сравнение экспериментальных данных и результатов численного моделирования позволяет заключить, что полученную оценку можно использовать для ориентировочных расчетов.

Автор выражает глубокую признательность за поддержку и помощь докт. физ.-мат. наук Мадеричу В.С. при проведении эксперимента и докт. физ.-мат. наук Мелешко В.В. при выполнении теоретических исследований и анализе результатов. Работа была проведена в Fluid Dynamics Laboratory, Eindhoven University of Technology (рук. проф. G.J.F. van Heijst) и финансирована the Netherlands Organization for Scientific Research (NWO).

1. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. - М.: Мир, 1986. - 182с.
2. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур. - Киев.: Наук. думка, 1993. - 280с.
3. Салганов Н.В., Горбань В.А. Вихревые структуры в жидкости. Аналитические и численные решения. - Киев.: Наук. думка, 1993. - 244с.
4. Lamb H. Hydrodynamics. - Cambridge University Press, 1967. - 677p.
5. Reznik G.M. Dynamics of singular vortices on a beta-plane // J. Fluid Mech. - 1992. - **240**. - P.405-432.
6. van Heijst G.J.F., Kloosterziel R.C., Williams C.W.M. Laboratory experiment on the tripolar vortex in a rotating fluid // J. Fluid Mech. - 1991. - **225**. - P.301-331.
7. Chang C.-C., Chern R.-L. A numerical study of flow around an impulsively started circular cylinder by a deterministic vortex method // J. Fluid Mech. - 1991. - **233**. - P.243-263.
8. Ohring S., Lugt H.J. Interaction of a viscous vortex pair a free surface // J. Fluid Mech. - 1991. - **227**. - P.47-70.
9. Lugt H.J., Ohring S. The oblique ascent of a viscous vortex pair toward a free surface // J. Fluid Mech. - 1992. - **236**. - P.461-476.
10. Voropayev S.I., Afanasyev Ya.D. Two-dimensional vortex-dipole interactions in a stratified fluid // J. Fluid Mech. - 1992. - **236**. - P.665-689.
11. Benzi R., Colella M., Briscolini M., Santangelo P. A simple point vortex model for two-dimensional decaying turbulence // Phys. Fluids. - 1992. - **A4**. N.5. - P.1036-1039.
12. Cetegen B.M., Aguirre J.P. Analysis of molecular mixing and chemical reaction in a vortex pair // Phys. Fluids. - 1990. - **A2**. N.12. - P.2211-2216.

13. *Meleshko V.V., Konstantinov M.Yu., Gurzhi A.A., Konovalyuk T.P.* Advection of a vortex pair atmosphere in a velocity field of point vortices // *Phys. Fluids*. - 1992. - **A4**. N.12. - P.2779-2797.
14. *Ottino J.M.* The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport. - Cambridge University Press, Cambridge, 1989. - 683p.
15. *Meleshko V.V., van Heijst G.J.F.* Interacting two-dimensional vortex structures: point vortices, contour kinematics and stirring properties // *Chaos, Solitons & Fractals*. - 1994. - **4**. N.6. - P.977-1010.
16. *Гуржій О.А., Мелешко В.В., ван Хейст Г.Я.Ф.* Метод кускової сплайн-інтерполяції в задачі про адвекцію пасивної домішки у відомому полі швидкості // *Доп. АН України*. - 1996. - N.8. - С.48-54.
17. *Aref H.* Integrable, chaotic and turbulent vortex motion in two-dimensional flows // *Ann. Rev. Fluid Mech.* - 1983. - **15**. - P.345-390.
18. *Коновалюк Т.П.* Классификация взаимодействия вихревой пары с точечным вихрем в идеальной жидкости // *Гидромеханика*. - 1990. - **62**. - С.64-69.