

УДК 532.526;621.311

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ СВОЙСТВА ЛАМИНАРНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ НАД ИСКРИВЛЕННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Е. И. НИКИФОРОВИЧ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 08.01.99

Исследуется влияние центробежных сил на переходные процессы в ламинарных пограничных слоях и пространственно-временные характеристики их дву- и трехмерных вихревых структур. Для простоты радиус кривизны обтекаемой поверхности R считается постоянным и предполагается, что число Рейнольдса $Re_R = RU_0/\nu$ велико. Используя методы сращиваемых асимптотических разложений с малым параметром, равным обратному числу Рейнольдса, получены дву- и трехмерные уравнения пограничного слоя и предложены сценарии его развития в терминах пространственно-временных масштабов вихревых структур. В частности, исследованы пространственно-временные свойства дву- и трехмерных пограничных слоев в зависимости от определяющих параметров задачи. Формализовано и обосновано понятие восприимчивости для данного класса задач.

Досліджується вплив відцентрових сил на перехідні процеси в ламинарних пограничних шарах і просторово-часові характеристики їх дво- та тривимірних вихревих структур. Заради простоти радіус кривизни R поверхні, що обтікається, вважається постійним і вважається, що число Рейнольдса $Re_R = RU_0/\nu$ є великим. Використовуючи методи зрощування асимптотичних розкладань з малим параметром, що дорівнює зворотному числу Рейнольдса, отримані дво- та тривимірні рівняння пограничного шару і запропоновані сценарії його розвитку в термінах просторово-часових масштабів вихревих структур. Зокрема, досліджені просторово-часові властивості дво- та тривимірних пограничних шарів в залежності від визначальних параметрів задачі. Формалізовано та обгрунтовано поняття сприйнятливості для даного класу задач.

The results of investigations under centrifugal forces transitional boundary layers as well as the spatio-temporal properties of boundary layers vortical structures are presented. It has been shown that in case of boundary layer flows under centrifugal forces the small parameter depending on the value of these forces can be introduced. Using methods of matching asymptotical expansions the scenarios of the boundary layers development (including transition processes from 2D to 3D) in terms of space scales of their vortical structures have been proposed. In particular, the knowledge about (i) formation mechanisms of 3D vortical structures in boundary layers; (ii) spatio-temporal properties of 2D and 3D vortical structures depending on basic flow parameters were obtained.

ВВЕДЕНИЕ

Современные технологические приложения гидромеханики во многих случаях связаны с проблемами управления пограничными слоями, т.е. с возможностью варьирования величинами потоков импульса и/или энергии между жидкостью и обтекаемым телом. Известно, что независимо от природы вынуждающей движущей силы и широкого разнообразия геометрических особенностей обтекаемых поверхностей, развитие ламинарных пограничных слоев (например, развитие пограничных слоев при свободной или смешанной конвекции на плоских поверхностях, под действием электромагнитных или центробежных сил и т.п.) имеет ряд общих особенностей, характеризующих переход ламинарного режима в полностью развитое турбулентное течение. В частности, общими чертами ламинарных пограничных слоев являются: (i) наличие области двумерного пограничного слоя, который в подавляющем числе случаев может быть описан уравнениями Прандтля и (ii) пе-

рехода к трехмерному пограничному слою в виде продольных вихрей с промежуточной стадией двумерных волн Толлмина - Шлихтинга [1]. Очевидно, что каждая из указанных областей характеризуется специфическим типом вихревой структуры и определяет различные закономерности процессов переноса в них. Поэтому с этой точки зрения, управление пограничным слоем означает управление пространственными масштабами указанных областей, используя активные либо пассивные методы, такие как вдув/отсос, нагрев/охлаждение, вихрегенераторы и т.п. [2]. Теоретические исследования переходных процессов в пограничном слое (под переходными процессами здесь и далее подразумеваются упомянутые выше переходы – двумерный ПС – волны Толлмина-Шлихтинга – продольные вихри в ламинарных пограничных слоях) проводятся в настоящее время в рамках теории устойчивости. Генерация волн Толлмина-Шлихтинга и продольных вихрей рассматривается как результат неустойчивостей основного течения [2]. Несмотря на очевидные успехи дан-

ной теории, ее практическое применение к вопросам управления носит полуэмпирический характер, т.е. она не может определить зависимость пространственно-временных масштабов областей пограничного слоя с различной вихревой структурой от определяющих параметров задачи, и следовательно, не позволяет сформулировать в них законы переноса. А это, в свою очередь, не дает возможности установить “оптимальные” методы управления величинами потоков импульса (или что то же, трения) и энергии на обтекаемой поверхности. Интуитивное разрешение данной проблемы было сформулировано в рамках понятия “восприимчивости пограничного слоя” [3] – как и где внешние возмущения входят в пограничный слой и генерируют его первичную или вторичную неустойчивости. И в настоящее время делаются попытки соединить эти два подхода для практического решения вопросов управления. Вместе с тем многообразие течений со схожим развитием пограничных слоев (см. выше), подразумевает существование некоторого универсального физического механизма, контролирующего их развитие. Другими словами это означает, что существование областей ламинарного пограничного слоя с различной вихревой структурой и размерностью является внутренним свойством таких пограничных слоев и их пространственно-временные характеристики могут быть выражены через определяющие параметры конкретной задачи. В данной главе рассмотрен случай развития пограничного слоя над вогнутой поверхностью, так называемая проблема Гертлера, с целью:

- описать пространственно-временные свойства такого пограничного слоя в терминах определяющих параметров задачи;
- предложить сценарии переходных процессов в нем;
- формализовать концепцию восприимчивости, используя развитый в работе подход к описанию переходных процессов в пограничном слое;
- предложить сценарии развития пограничных слоев под действием центробежных сил в терминах определяющих параметров задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение слоя толщины d вязкой несжимаемой тяжелой жидкости над твердой вогнутой поверхностью постоянной кривизны R

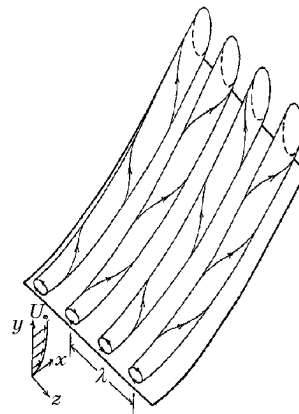


Рис. 1. Схема движения жидкости в цилиндрической системе координат

(рис. 1). В системе координат, связанной с обтекаемой поверхностью, уравнения неразрывности и Навье-Стокса имеют вид

$$\frac{R}{R-y} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{R-y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{U} \text{grad} U - \frac{UV}{R-y} = -\frac{R}{R-y} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\Delta U - \frac{2R}{(R-y)^2} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{U}{(R-y)^2} \right] + F_x, \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \vec{U} \text{grad} V + \frac{U^2}{R-y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[\Delta V - \frac{2R}{(R-y)^2} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{V}{(R-y)^2} \right] + F_y, \quad (3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{U} \text{grad} W = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta W + F_z, \quad (4)$$

здесь x – продольная координата; y – нормальная к поверхности координата; z – поперечная координата; $\vec{U} = \{U, V, W\}$ – вектор скорости; p – давление в жидкости; ρ и ν – плотность и кинематическая вязкость среды; $\vec{F} = \{F_x = -g \sin(x/R), F_y = -g \cos(x/R), F_z = 0\}$ – сила тяжести;

$\vec{U} \cdot \nabla = \frac{R}{R-y} U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial z}$ – конвективный оператор и $\nabla = \frac{R^2}{(R-y)^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R-y} \frac{\partial}{\partial y} \left((R-y) \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Дальнейший анализ будет проводиться в предположении, что (i) $L_y/R \ll 1$, здесь L_y – характерный масштаб изменения скорости и давления по нормальной координате, существование которого в данной задаче, конечно, необходимо доказать.

Предположение (i) позволяет в исходной системе уравнений (1)–(4) выражения вида $R - y$ заменить на R . Введя обычным способом динамическое давление p_d по формуле

$$p_d = p - (R - y)\rho g \quad (5)$$

с учетом введенного предположения (i), исходная система уравнений (1)–(4) примет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{U} \text{grad} U = -\frac{R}{R-y} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla U + F_{bx}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \vec{U} \text{grad} V = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla V + F_{by}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{U} \text{grad} W = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta W + F_{bz}, \quad (9)$$

здесь ∇, Δ – конвективный оператор и оператор Лапласа, записанный в декартовой системе координат, а объемная сила \vec{F}_b имеет вид

$$\begin{aligned} F_{bx} &= \frac{UV}{R} - \nu \left[\frac{2}{R} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{U}{R^2} \right], \\ F_{by} &= -\frac{U^2}{R} - \nu \left[\frac{2}{R} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{V}{R^2} \right], \\ F_{bz} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, рассматриваемая задача обтекания криволинейной поверхности, описываемая системой уравнений (1)–(4), при сделанных выше предположениях трансформировалась в задачу обтекания плоской пластины с непотенциальными объемными силами вида (10), учитывающими эффекты кривизны. Наличие непотенциальной объемной силы (10) в системе уравнений (6)–(9) создает принципиальные отличия задачи обтекания плоской и криволинейной поверхностей потоком вязкой жидкости. Математически эти силы определяют объемные источники завихренности, мощность которых зависит от величины этих сил и пространственных масштабов их изменения в продольном и нормальном направлениях. Как будет показано ниже, нелинейное взаимодействие объемных источников завихренности, связанных с кривизной поверхности и поверхностных, возникающих вследствие условия прилипания из-за вязкости, приводит к возникновению вниз по потоку вытянутых в продольном направлении вихревых структур, пространственно-временные характеристики которых явным образом зависят от величины объемных и вязких сил.

Для дальнейшего анализа получим условия для толщины набегающего потока d , при которых она является не существенной или, другими словами, условия, при которых толщина слоя и ускорение свободного падения g не являются определяющими параметрами задачи. Их влияние может сказываться по двум причинам – во-первых, зависимостью силы тяжести от продольной координаты x вследствие кривизны поверхности и, во-вторых, влиянием гидростатического давления на распределение давления в ядре потока. Для этого рассмотрим решение задачи в ядре потока, т.е. при $y/L_y \gg 1$. Из физических соображений вязкость в этой области несущественна и распределение скоростей совпадает с распределением скоростей в набегающем потоке, т.е. $U_e = U_0, V_e = W_e = 0$ (индекс "e" относится к соответствующим величинам в ядре потока; U_0 – скорость набегающего потока). Распределение динамического давления имеет вид

$$p_{de} \sim -\frac{\rho U_0^2}{R} y. \quad (11)$$

Как и следовало ожидать из общих соображений, наличие свободной границы при $y = d$ с постоянным давлением не оказывает влияния на распределение динамического давления в ядре потока при условии, что $d \gg L_y$. Т.е. если слой жидкости достаточно толстый по сравнению с характерным масштабом изменения скоростей в нормальном направлении, то наличие свободной границы не оказывает влияния на формирование пограничного слоя или, что то же самое, ускорение свободного падения в данной задаче не является определяющим параметром. Если же толщина набегающего потока оказывается сравнимой с вертикальным масштабом вихревых структур пограничного слоя, то, конечно же, ускорение свободного падения должно войти в число определяющих параметров задачи. Однако этот случай требует особого рассмотрения и в данной работе затрагиваться не будет.

Граничные условия для поставленной задачи имеют обычный вид – условия прилипания на обтекаемой поверхности и однородный поток и линейность по y давления вдали от нее.

Легко показать, что в этом случае единственным безразмерным параметром в данной задаче является число Рейнольдса $Re_R = RU_0/\nu$, рассчитанное по радиусу кривизны. Асимптотика $Re_R \rightarrow \infty$ при фиксированных значениях U_0 и ν соответствует, очевидно, случаю плоской поверхности. Из общих соображений следует, что все макроскопические эффекты, связанные с влиянием объемной силы (10) на структуру течения долж-

ны явным образом зависят от Re_R . Поэтому естественно попытаться описать развитие течения над вогнутой поверхностью с использованием асимптотических методов, рассматривая в качестве малого параметра $\varepsilon = Re_R^{-1}$. Основная идея исследования состоит в следующем: развитие пограничного слоя над вогнутой поверхностью с характерными стадиями перехода к полностью развитому турбулентному течению рассматривается как естественное развитие течения с анизотропией пространственных масштабов и с существенной зависимостью этих масштабов от продольной координаты. Это означает, что развитие структуры таких пограничных слоев происходит под действием сил, изменяющихся в продольном направлении. Как уже указывалось, в задаче имеются две объемные силы различной природы – первая сила связана с наличием кривизны и определяется полем скорости и радиусом кривизны; вторая сила генерируется вследствие наличия вязкости и определяется ее величиной и градиентом скорости. В общем случае закономерности изменения этих сил вдоль поверхности различны и, следовательно, можно выделить области с преобладающим влиянием одной из них и области, где структура течения определяется их взаимодействием. Получить зависимости пространственных масштабов этих областей от определяющих параметров задачи можно, исследуя рамки применимости получаемых приближенных уравнений в результате асимптотического анализа полной системы уравнений (6)–(9). Физический смысл областей, течение в которых описывается различными приближениями, состоит в том, что структура течений в них существенно различна, включая их размерность.

Таким образом, используя математическую формализацию известных экспериментальных данных по течениям над вогнутыми поверхностями и методы асимптотического анализа полной системы уравнений Навье-Стокса, можно изучить пространственно-временные свойства двух- и трехмерных вихревых структур пограничного слоя и на их основе описать сценарии его развития, включая переходные процессы.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ДВУМЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ $\varepsilon \rightarrow 0$. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МАСШТАБОВ ДВУМЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Физически очевидно, что по крайней мере на начальном участке поверхности пограничный слой для равномерного набегающего потока должен

быть двумерным (конечно, при отсутствии искусственных трехмерных возмущений достаточной интенсивности). Рассмотрим его развитие с учетом объемной силы (10) и попытаемся описать ее влияние на структуру возникающего пограничного слоя. Существование кривизны или пространственного масштаба, с ней связанного, создает существенное отличие рассматриваемой задачи от задачи обтекания плоской пластины, поскольку появляется возможность ввести в рассмотрение новый тип пространственных масштабов вида $R \cdot f(\varepsilon)$, здесь $f(\varepsilon)$ – некоторая пока произвольная функция от ε . Введем в рассмотрение пространственные масштабы вида $\varepsilon^m R$ в продольном направлении и $\varepsilon^l R$ – в поперечном (константы m и l произвольные, но поскольку рассматривается приближение пограничного слоя при $\varepsilon \rightarrow 0$, то $l > m$). Определим безразмерные величины по формулам

$$\begin{aligned} U^* &= U/U_0, V^* = V/U_0, p_d^* = p_d/\rho U_0^2, \\ x^* &= \varepsilon^{-m} x/R, y^* = \varepsilon^{-l} y/R, \end{aligned} \quad (12)$$

и решение системы стационарных двумерных уравнений, получаемых из (6)–(8) будем искать в виде следующих разложений по малому параметру ε :

$$\begin{aligned} U^* &= U/U_0 = U^*(x^*, y^*) + \\ &+ \varepsilon^p U_1^*(x^*, y^*) + \dots, \\ V^* &= V/U_0 = \varepsilon^n V^*(x^*, y^*) + \\ &+ \varepsilon^q V_1^*(x^*, y^*) + \dots, \\ p_d^* &= p_d/\rho U_0^2 = \varepsilon^k p_{d0}^*(x^*, y^*) + \\ &+ \varepsilon^r p_{d1}^*(x^*, y^*) + \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

здесь p, n, q, k, r – некоторые произвольные константы, и все функции порядка единицы по определению. В дальнейшем будут рассматриваться только безразмерные величины, поэтому для удобства звездочки опускаются. Случаи использования размерных величин будут оговариваться особо.

В качестве граничных условий, как обычно, принимаются условия прилипания на обтекаемой поверхности при $y = 0$ и условия срачивания внутреннего и внешнего решений при $y \rightarrow \infty$ [4]. Для показателя малого параметра в разложении давления и вида внешнего решения для давления (11) из этого условия сразу следует равенство $k = l$. Подставляя разложения (13) в исходную систему уравнений и используя условие ее наименьшего вырождения при $\varepsilon \rightarrow 0$ и учета центробежной силы для нулевых приближений, можно получить единственные значения

$$l = 2/3, m = 1/3, n = 1/3 \quad (14)$$

и следующую систему уравнений для нулевого приближения

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} = 0, \quad (15)$$

$$U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} = \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}, \quad (16)$$

$$U_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial y} = -\frac{\partial p_{d0}}{\partial y} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} - U_0^2. \quad (17)$$

Из вида системы уравнений (15)–(17) следует, что в нулевом по ε приближении задачи определения полей скорости и давления расщепляются, и задача определения поля скорости формально совпадает с задачей Блазиуса. Действительно, уравнения (15) и (16) допускают существование однопараметрической группы преобразований вида [5, 6]

$$\psi_0 = A_0^{-1} \psi_{01}(A_0^m x, A_0^{m-1} y), \quad (18)$$

здесь ψ_0 – функция тока, т.е. $U_0 = \partial \psi_0 / \partial y$, $V_0 = -\partial \psi_0 / \partial x$; A_0 – произвольное гладкое преобразование; m – любое рациональное число. Для однородного набегающего потока легко получить автомодельное решение вида

$$\psi_0(x, y) = \sqrt{x} f_0(y/\sqrt{x}), \quad (19)$$

и теперь легко видеть, что в нулевом приближении распределение скоростей совпадает с распределением скоростей Блазиуса и не зависит от малого параметра. Таким образом, на начальном участке течения поле скорости в пограничном слое описывается автомодельным решением Блазиуса.

Результаты проведенного анализа показывают, что совпадение нулевого приближения рассматриваемой задачи с приближением Прандтля для плоской пластины во многом является формальным, поскольку с математической точки зрения способ их получения является совершенно различным. Действительно, в задаче Блазиуса существует только один пространственный масштаб, равный ν/U_0 и уравнения пограничного слоя в этом случае представляют асимптотику уравнений Навье-Стокса для больших безразмерных значений $x^* = xU_0/\nu \text{Re}_x$. Наличие только одного пространственного масштаба и приводит к существованию автомодельности уравнений пограничного слоя над плоской поверхностью и равенству нулю нормального градиента давления в нем. Из этого условия и условия однородности внешнего потока следует также равенство нулю градиента давления в продольном направлении. В рассматриваемом случае ситуация существенно иная. Наличие кривизны (или объемной силы (10)) приводит

к существованию пространственных масштабов в продольном (L_x) и нормальном (L_y) направлениях

$$\begin{aligned} L_x &= \varepsilon^{1/3} R = \text{Re}^{-1/3} R, \\ L_y &= \varepsilon^{2/3} R = \text{Re}^{-2/3} R, \end{aligned} \quad (20)$$

что в общем случае не допускает существования автомодельности системы уравнений (15)–(17). Легко видеть, что нулевое приближение для давления, определяемое уравнением (17), не является автомодельным, или другими словами, масштаб L_x определяет расстояние от передней кромки поверхности, где начинает проявляться действие кривизны на развивающийся пограничный слой, и вопрос о справедливости уравнений (15)–(17) для $x \gg L_x$ требует особого рассмотрения. Следовательно, с математической точки зрения масштабы (20) определяют границы применимости автомодельного решения, а с физической – пространственные масштабы автомодельного пограничного слоя. Этот вывод также следует из самого способа получения уравнений (15)–(17) – выбор масштабов (20) является единственным, при котором можно учесть влияние кривизны в нулевом приближении. Однако, как уже указывалось, это влияние в нулевом приближении сказывается лишь на распределении давления в пограничном слое. Первое приближение поля скоростей, естественно, зависит явным образом от ε в том числе и посредством влияния нулевого приближения для давления. С этой точки зрения вырождение искомой задачи в двумерном случае является регулярным, т.е. при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение задачи стремиться к решению уравнений Блазиуса, а первое приближение может быть получено уже с учетом этого решения. Другими словами, поля скорости и давления в двумерном пограничном слое на начальном участке обтекания вогнутой поверхности может быть представлено как малое возмущение соответствующих полей, определяемых решением Блазиуса. Чтобы оценить это возмущение, рассмотрим уравнения пограничного слоя для первого приближения разложений (13). Не приводя вычислений, получим $p = 2/3$, $q = 1$, $r = 4/3$, и уравнения для первого приближения принимают вид

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0 U_1}{\partial x} + V_0 \frac{\partial U_1}{\partial y} + V_1 \frac{\partial U_0}{\partial y} = \\ = \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - \frac{\partial p_{d0}}{\partial x} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + U_0 V_0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$U_1 \frac{\partial V_0}{\partial x} + U_0 \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_0 V_1}{\partial y} = -\frac{\partial p_{d1}}{\partial y} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} - 2U_0 U_1 + \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} - \frac{\partial U_0}{\partial x}, \quad (23)$$

а разложение полей скорости и давления в пограничном слое имеет вид

$$\begin{aligned} U^* &= U_0 + \varepsilon^{2/3} U_1 + \dots, \\ V^* &= \varepsilon^{1/3} V_0 + \varepsilon V_1 + \dots, \\ p_d^* &= \varepsilon^{2/3} p_{d0} + \varepsilon^{4/3} p_{d1} + \dots, \end{aligned} \quad (24)$$

здесь U_0 , V_0 и p_{d0} определяются из системы уравнений (15)–(17), и таким образом, поправка к продольной скорости за счет воздействия кривизны имеет порядок $\varepsilon^{2/3}$, к поперечной – ε и к давлению – $\varepsilon^{4/3}$. Отметим, что полученная система уравнений (21)–(23) является линейной и задачи определения первых приближений полей скорости и давления снова расщепляются. Кроме того, эти уравнения совпадают по форме с уравнениями линейной теории устойчивости, но с существенным отличием. Граничная задача (21)–(23) с условиями сращивания не является задачей на собственные значения, а описывает восприимчивость пограничного слоя Блазиуса к возмущениям, генерируемым центробежными силами. Это отличие от уравнений теории устойчивости с физической точки зрения является весьма важным и может быть пояснено следующим образом: отличительной чертой рассматриваемого течения является формирование вниз по потоку продольных вихрей, которые, очевидно, не могут быть описаны с помощью регулярных разложений искомых двумерных полей по малому параметру ε . С другой стороны, именно кривизна, характеризуемая параметром ε , определяет формирование продольных вихрей и их пространственные характеристики. Это означает, что в области их существования нулевые приближения искомых полей должны явным образом зависеть от ε . Это позволяет предположить, что решение Блазиуса не является равномерно пригодным далеко от передней кромки в данной задаче, а само решение искомой задачи имеет сингулярный характер по продольной координате. Т.е. решение в области трехмерных продольных вихрей должно асимптотически сращиваться с решением (24) и процесс сращивания этих двух решений должен описывать физический процесс перехода от двух к трехмерному режиму в форме продольных вихрей. Безусловно, переход к трехмерности требует наличия некоторых возмущений по оси z . Теоретически без таких возмущений решение Блазиуса в рассматриваемой задаче справедливо для сколь угодно больших значений

x , а влияние кривизны сказывается только на распределении давления.

Учитывая, что система уравнений (15)–(17) и (21)–(23) с соответствующими граничными условиями не зависит от определяющих параметров задачи, можно получить функциональную зависимость длины двумерного пограничного слоя от определяющих параметров задачи. Действительно, из общих соображений теории подобия [7] следует, что протяженность зоны двумерного пограничного слоя L_2 должна иметь вид

$$L_2 = AL_x = A\varepsilon^{1/3}R = ARe^{-1/3}R, \quad (25)$$

здесь A – некоторая универсальная константа, численное значение которой может быть получено из эксперимента или результатов численных расчетов. Необходимо отметить, что ее значение зависит от разрешающей способности измерительной аппаратуры и параметров начальных возмущений в поперечном направлении, поскольку в действительности не существует резкого перехода от дву- к трехмерности. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен ниже.

В заключении данного параграфа сделаем важное замечание. Как уже указывалось, в рамках двумерного пограничного слоя влияние центробежных сил проявляется только как малое возмущение течения Блазиуса. Нетрудно показать, что невозможность учета центробежных сил в нулевом приближении связана с предположением о двумерности пограничного слоя, а именно с двумерностью уравнения неразрывности. Именно это уравнение накладывает жесткую связь на пространственные масштабы изменения скоростей и самих скоростей. Наблюдаемое противоречие данного решения с результатами экспериментальных данных и привело к постановке вопроса об устойчивости течения Блазиуса в рассматриваемой задаче. Такой подход совершенно правомерен для задачи обтекания плоской пластины. Однако в рассматриваемой ситуации положение оказывается гораздо сложнее и более естественным в соответствии с полученными выше результатами является вопрос о справедливости решения Блазиуса вдали от передней кромки. Отказ от предположения двумерности позволяет учесть влияние центробежных сил уже в нулевом приближении по ε , что является подтверждением сделанных выше предположений. В определенном смысле отказ от двумерности означает неустойчивость двумерных решений и трехмерность может рассматриваться как асимптотическое поведение пограничного слоя с центробежными силами при больших временах или, что то же самое, вдали от острой кромки.

Следующий параграф и посвящен рассмотрению данного вопроса.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ПРИ $\epsilon \rightarrow 0$

Выше было показано, что развитие пограничного слоя над вогнутой поверхностью при однородном набегающем потоке в нулевом приближении по $\epsilon = \text{Re}_R^{-1}$ описывается автомодельным уравнением Блазиуса, т.е. влияние кривизны на поле скоростей несущественно. Ситуация принципиально меняется в трехмерном случае. Как уже указывалось, для рассматриваемой задачи экспериментально доказано возникновение вниз по потоку трехмерных вихревых структур, имеющих форму продольных вихрей. Поскольку причиной их возникновения являются центробежные силы, то естественно предположить, что пространственно-временные характеристики вихревых структур и само решение явным образом зависит от малого параметра ϵ . Т.е. предположим, что в области трехмерного пограничного слоя решение имеет вид

$$\begin{aligned} U^* &= U/U_0 = U_0^*(x^*, y^*, z^*) + o(1), \\ V^* &= V/U_0 = \epsilon q V_0^*(x^*, y^*, z^*) + o(\epsilon^q), \\ W^* &= W/U_0 = \epsilon p W_0^*(x^*, y^*, z^*) + o(\epsilon^p), \\ p_d^* &= p_d/\rho U_0^2 = \epsilon r p_{d0}^*(x^*, y^*, z^*) + o(\epsilon^r), \end{aligned} \quad (26)$$

здесь по определению U_0^*, V_0^*, W_0^* и p_{d0}^* – функции порядка единицы, а безразмерные переменные определены формулами $x^* = \epsilon^{-m} x/R$, $y^* = \epsilon^{-n} y/R$, $z^* = \epsilon^{-l} z/R$. Показатели малого параметра ϵ суть произвольные числа, подлежащие определению из условия наименьшего вырождения полной системы уравнений Навье-Стокса при $\epsilon \rightarrow 0$ и срачивания решений (26) с внешним однородным потоком. Подставляя разложения (26) в систему уравнений (6)–(9) и учитывая (11) и условия однородности потока при $y \gg 1$, в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ можно получить единственный набор показателей степеней ϵ :

$$m = q = p = 1/3, \quad n = l = r = 2/3, \quad (27)$$

при котором учитываются эффекты кривизны, вязкости и нелинейности.

Система уравнений для нулевого приближения принимает вид

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} + \frac{\partial W_0}{\partial z} = 0, \quad (28)$$

$$\vec{U}_0 \text{grad} U_0 = \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}, \quad (29)$$

$$\vec{U}_0 \text{grad} V_0 = \frac{\partial p_{d0}}{\partial y} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} - U_0^2, \quad (30)$$

$$\vec{U}_0 \text{grad} W_0 = -\frac{\partial p_{d0}}{\partial z} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial z^2}, \quad (31)$$

здесь $\vec{U}_0 = \{u_0, V_0, W_0\}$, а звездочки у безразмерных величин для удобства опущены. Граничные условия при $y = 0$ и $y \rightarrow \infty$ очевидны. Граничное условие для (28)–(31) по продольной координате будет рассмотрено ниже.

Полученные уравнения (28)–(31) являются уравнениями пограничного слоя, поскольку в правых частях этих уравнений не учитываются вторые производные по продольной координате в силу их более высокого порядка малости по параметру ϵ . По той же причине в уравнении (29) для продольной скорости не учитывается изменение давления. Однако, по сравнению с двумерными уравнениями (15)–(17) система уравнений трехмерного пограничного слоя (28)–(31) имеет принципиальное отличие – задачи определения нулевого приближения по ϵ полей скорости и давления не расщепляются. Это означает, что решение в нулевом по ϵ приближении в области трехмерного пограничного слоя явно зависит от ϵ , а его характерные пространственные масштабы имеют вид

$$\begin{aligned} L_x &= R \text{Re}_R^{-1/3} && \text{– по продольной} \\ & && \text{координате,} \\ L_y &= L_z = && \text{– по нормальной} \\ &= L_0 = R \text{Re}_R^{-2/3} && \text{и поперечной} \\ & && \text{координате.} \end{aligned} \quad (32)$$

Отметим, что в асимптотическом анализе априори не предполагалось равенство масштабов в нормальном и поперечном направлениях. Кроме того, продольный и поперечный масштабы трехмерного пограничного слоя совпадают с соответствующими масштабами двумерного пограничного слоя. Точно также совпадает и вид разложений искомых полей по малому параметру. Это означает, что в общем случае развитие пограничного слоя над вогнутой поверхностью описывается в рамках трехмерных уравнений пограничного слоя (28)–(31) с пространственными масштабами (32). Очевидно, что система уравнений (28)–(31) переходит в систему уравнений (15)–(17) двумерного пограничного слоя при $\partial/\partial z = 0$ или, другими словами, решения Блазиуса и Фолкнера-Скана также удовлетворяют полученным трехмерным уравнениям пограничного слоя. Следовательно, их решение при $x \rightarrow 0$ должно сопрягаться с решением Блазиуса при $x \rightarrow \infty$. Математическая процедура сопряжения этих двух решений с физической точки зрения

означает описание перехода от дву- к трехмерному пограничному слою. Следует отметить, что в рассматриваемой задаче возникновение трехмерных вихревых структур не является результатом неустойчивости двумерного решения, а представляет собой результат естественного развития течения под действием центробежных сил. Действительно, рассмотрим физический смысл полученных пространственных масштабов (32). Поскольку возникновение этих масштабов связано с наличием кривизны обтекаемой поверхности, а центробежные силы в исходных уравнениях являются объемными источниками завихренности, то полученные масштабы допускают простую физическую интерпретацию – $\{L_x, L_y, L_z\}$ представляют собой характерные пространственные масштабы трехмерных вихревых структур, генерируемых в пограничном слое в результате взаимодействия вязких и центробежных сил. Т.е. наличие трехмерности позволяет обеспечить баланс между вязкими и центробежными силами и именно центробежная сила приводит к генерации трехмерности. Другими словами, на начальном участке обтекания главную роль в генерации завихренности играет вязкость посредством условий прилипания на обтекаемой поверхности – завихренность генерируется на поверхности и распространяется вглубь жидкости под действием вязкости и конвективного переноса.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ, ВОСПРИИМЧИВОСТЬ И РАМКИ ПРИМЕНИМОСТИ УРАВНЕНИЙ ПС

Чтобы продемонстрировать более общий характер предлагаемого подхода к описанию развития ПС на вогнутой поверхности, рассмотрим в его рамках известные результаты теории устойчивости и восприимчивости. Основные идеи применения теории устойчивости к рассматриваемой проблеме изложены в обзоре [1] и дальнейшие рассуждения будут основаны на этом обзоре. Основная идея теории устойчивости, как известно, состоит в исследовании поведения возмущений основного течения во времени или в пространстве. В зависимости от предположений, касающихся структуры основного течения, могут быть получены различные виды уравнений для возмущений и соответственно предложены различные методы их решения. Во всех случаях задача в итоге сводится к задаче на собственные значения, в которой в каче-

стве собственных чисел выступает число Гертлера

$$G = \frac{U_0 \theta}{\nu} \sqrt{\frac{\theta}{R}}, \quad (33)$$

здесь θ – толщина вытеснения импульса. С формальной точки зрения такая задача является совершенно корректной и в ее рамках получено много полезных результатов (о недостатках этой теории см. п.1). Однако переход от исходных уравнений ПС к задаче на собственные значения содержит ряд неочевидных предположений, главным из которых является введение в теорию формально неопределенной величины толщины потери импульса θ (или толщина ПС). С точки зрения эксперимента определение величины θ очевидно, однако с формальной точки зрения она оказывается не определенной.

В рамках развитого подхода получено, что пространственный масштаб изменения характеристик задачи в нормальном к поверхности направлении (или толщина потери импульса, толщина ПС) должен быть пропорционален масштабу L_0 или в общем случае

$$\theta = f(x) R \cdot \text{Re}_R^{-2/3}, \quad (34)$$

здесь $f(x)$ – функция порядка 1. С учетом (34) число Гертлера принимает вид

$$G = f^{3/2}(x), \quad (35)$$

т.е. результаты теории устойчивости являются локальными (для фиксированных значений x) независимо от того, учитываются ли эффекты не параллельности основного течения или нет. Более того, из приведенного рассмотрения сразу следует, что в теории устойчивости эффекты не параллельности не существенны, если изменения скоростей и давления в продольном направлении достаточно гладкие. Однако с точки зрения предлагаемого подхода именно эти эффекты определяют генерацию продольных вихрей. Используя результаты теории устойчивости, можно оценить расстояние x_0 , где возникают продольные вихри.

Действительно, линейная теория устойчивости дает значение $G = 0.6$ для продольных вихрей, т.е.

$$f(x_0) = (0.6)^{2/3}. \quad (36)$$

Выше показано, что в нулевом приближении развитие ПС совпадает с развитием ПС над плоской поверхностью и, следовательно, для нижней оценки x_0 можно выбрать зависимость Блазиуса толщины потери импульса θ в продольном направлении [8]

$$\theta = 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}. \quad (37)$$

Учитывая выражения (34), (36) и (37) легко получить

$$x_0 = 12R \cdot \text{Re}_R^{-1/3}. \quad (38)$$

Очевидно, что уравнение (38) является оценкой снизу на расстояние, на котором возникают продольные вихри. Другими словами, продольные вихри могут генерироваться на расстояниях $x_c > x_0 = 1.2R\text{Re}_R^{-1/3}$.

Отметим, что зависимость x_0 от определяющих параметров совпадает с зависимостью (25).

Полученный результат позволяет следующим образом интерпретировать результаты теории устойчивости: как было показано, в общем случае рассматриваемое течение является трехмерным и описывается уравнениями (28)–(31), для которых двумерное решение Блазиуса также является решением (точнее асимптотикой при $x \rightarrow 0$). Другими словами, предположения теории устойчивости означают, что решение может быть представлено в виде

$$\vec{u} = \vec{u}_{bl}(\eta) + \varepsilon^{2/3} \vec{u}_{3D}(x, y, z), \quad (39)$$

и уравнения для определения $\vec{u}_{3D}(x, y, z)$ будут в точности совпадать с уравнениями теории устойчивости при $G = 1$. Тогда результаты теории устойчивости, определяющие растущие при $x \rightarrow \infty$ решения \vec{u}_{3D} , являются результатами возникновения секулярных членов в разложении (39) и определяющими область, в которой справедливо (а не устойчиво) решение $\vec{u}_{bl}(\eta)$. Главное отличие предлагаемого подхода от теории устойчивости состоит в четком определении пространственно-временных масштабов задачи, их зависимости от определяющих параметров задачи и совершенно ясном физическом смысле. Чтобы проиллюстрировать более четко физический смысл, рассмотрим диаграмму устойчивости Гертлера [9].

5. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА С ТЕОРИЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ (ДИАГРАММА ГЕРТЛЕРА)

Для сравнения результатов предлагаемого подхода и выводов теории устойчивости в исследуемой проблеме, рассмотрим полученные масштабы L_0 и X_c в рамках диаграммы устойчивости Гертлера (рис. 2). Как известно [2, 10], диаграмма Гертлера определяет минимальный масштаб продольных вихрей λ_z в широком диапазоне определяющих параметров безразмерной зависимостью $\Lambda_0 = U_0/\nu(\lambda_z^3/R)^{1/2} = 30$. Из общих соображений очевидно, что поперечный масштаб задачи должен быть пропорционален масштабу L_0 , т.е. $\lambda_z = cL_0$,

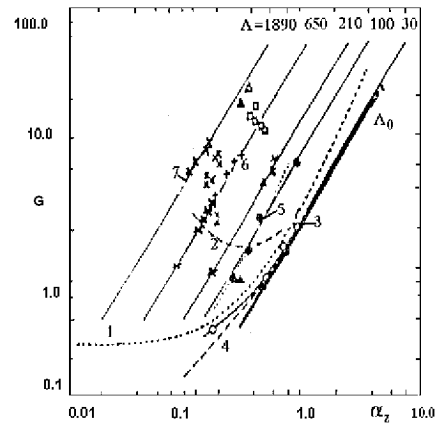


Рис. 2. Диаграмма Гертлера. 1, 2 – вычисления [11], нейтральные кривые и кривые скорости максимального роста соответственно; 3, 4 – экспериментальные данные для кривой нейтральной устойчивости, полученные [12]; 5, 6, 7 – вихри с максимальной скоростью роста (экспериментальные результаты [13], [14], и [15] соответственно).

здесь c – константа. Подставляя это выражение в Λ_0 , легко получить значение $c \sim 9$. Таким образом, минимальный поперечный масштаб продольных вихрей в задаче Гертлера определяется следующей зависимостью от определяющих параметров задачи $\lambda_z = 9R\text{Re}_R^{-2/3}$ и результаты теории устойчивости подтверждаются выводами предложенной теории.

6. СЦЕНАРИИ РАЗВИТИЯ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

Полученные результаты позволяют прояснить формальный смысл понятия восприимчивости и описать возможные сценарии развития ПС в терминах пространственных масштабов. Для этого рассмотрим взаимодействие однородного потока вязкой жидкости $\vec{u}_0 = \{1, 0, 0\}$ с различными типами возмущения. Очевидно, что однородный поток является точным решением полных уравнений Навье-Стокса с соответственными начальными и граничными условиями. В качестве первого примера рассмотрим развитие ПС над плоской пластиной. С точки зрения внесения возмущений в основной поток, пластина представляет собой возмущение однородного потока посредством условий прилипания, т.е. условия прилипания представляют собой возмущения, вносимые в основной поток. Результатом взаимодействия этих возмущений с основным потоком является

пограничный слой Блазиуса, т.е. решение Блазиуса описывает восприимчивость основного течения к возмущениям, вносимым пластиной. Единственным пространственным масштабом, связанным с этим типом возмущения, является вязкий масштаб $L_X = \nu/u_0$. Этим, в частности, объясняется, что существует единственное критическое число Re , характеризующее переход к турбулентности. Действительно, из общих соображений очевидно, что пространственные масштабы любых явлений в данной задаче должны быть пропорциональны L_x , т.е. расстояние x_c , где происходит переход к турбулентности, должно иметь вид: $x_c = AL_x$, откуда $A = Re_c = \text{const}$ и которое может быть определено из эксперимента. Кроме того, именно наличие только одного пространственного масштаба приводит к существованию автомодельного решения.

Теперь рассмотрим течения Falkner-Skan, которые также являются автомодельными. Условием существования автомодельности ПС в этом случае является специальный вид “внешнего” течения, а именно $u_\infty \approx \chi_m$. С рассматриваемой точки зрения это можно рассматривать как специфическое возмущение однородного потока, а формирующийся ПС – как результат восприимчивости ПС Блазиуса к возмущениям, генерируемым внешним потоком. С физической точки зрения в данной задаче имеются два типа возмущений однородного потока – 1) условия прилипания на пластине и 2) возмущения специального вида основного потока вдали от пластины. Условием существования автомодельного решения и является согласованность этих двух типов возмущений. Таким образом, решение Falkner-Skan описывает нелинейное взаимодействие двух типов возмущений, результатом которого и является искомый ПС с пространственным масштабом $L = \nu/u_0$.

И, наконец, рассмотрим течение Гертлера. С точки зрения внесения возмущений в основной поток, течение Гертлера характеризуется двумя возмущениями – 1) условием прилипания и 2) возмущением, вносимым центробежной силой. Именно результат нелинейного взаимодействия этих возмущений и приводит к формированию продольных вихрей и затем переходу к турбулентности. Пространственные масштабы такого течения имеют вид (32), и оно не является автомодельным.

Таким образом, восприимчивость ПС с формальной точки зрения есть результат нелинейного взаимодействия различного типа возмущений с основным потоком. Это обстоятельство позволяет предложить новую стратегию в управлении ПС, которая заключается не в исследовании устойчи-

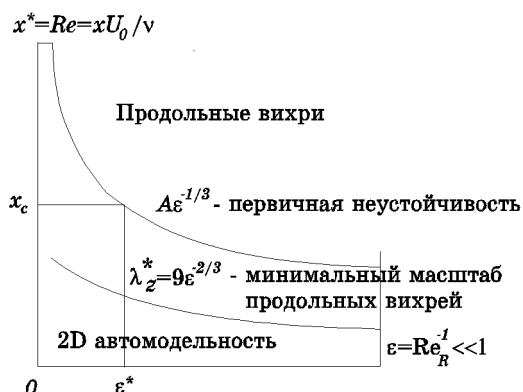


Рис. 3. Теоретические сценарии развития пограничных слоев над вогнутой и плоской поверхностями

вости основного течения, а в исследовании областей справедливости уравнений ПС с учетом вносимых возмущений. Получение зависимостей пространственных масштабов областей с различным типом гидродинамической структуры от определяющих параметров задачи (включая естественно параметры возмущений) вместе с различными (целенаправленными) экспериментальными исследованиями позволит получить эффективные критерии для их управления.

Проведенный анализ позволяет с единой точки зрения объяснить физический механизм возникновения и существования различных типов течений (ПС Блазиуса и Falkner-Skan, волны Толмина-Шлихтинга, продольные вихри) в ПС с центробежными силами как результат нелинейного взаимодействия различного типа возмущений с однородным внешним потоком. Рассмотренная задача может быть охарактеризована тремя собственными (или внутренними) пространственными масштабами – “свободных” возмущений, вязких возмущений и возмущений, вызванных центробежными силами. На рис. 3 представлена возможная схема различных сценариев развития ПС над вогнутой поверхностью.

Вертикальная ось представляет безразмерное расстояние от острой кромки (текущее значение числа Рейнольдса); горизонтальная ось соответствует значению определяющего параметра задачи – Re_R^{-1} . С физической точки зрения данные координатные оси характеризуют величины возмущений, вносимых в однородный поток вязкими и центробежными силами. Было показано, что течение под действием центробежных сил является существенно трехмерным, и генерируемые вихри

оказываются вытянутыми в продольном направлении. Основной причиной возникновения продольных вихрей служит действие центробежных сил. Однако на начальном участке течения является двумерным и автомодельным. Поэтому теоретические сценарии развития пограничного слоя над вогнутой поверхностью могут быть представлены следующим образом: случай $\varepsilon = 0$ соответствует плоской пластине и для этого значения определяющего параметра развитие пограничного слоя описывается уравнениями Прандтля. Плоская пластина вследствие условий прилипания генерирует возмущения, нелинейное взаимодействие которых с однородным потоком формирует течение Блазиуса. Аналогичным образом может быть рассмотрено течение Falkner - Skan. Оба типа автомодельных решений представляют асимптотические решения уравнений Навье-Стокса вдали от передней кромки и с теоретической точки зрения с увеличением x они должны становиться все более точными. Ситуация принципиально меняется в случае $\varepsilon \neq 0$. Для каждого значения $\varepsilon \neq 0$ можно получить оценку пространственного масштаба двумерного пограничного слоя и минимальный масштаб продольных вихрей. Верхняя кривая на рис. 3 делит плоскость на две части – верхняя часть соответствует трехмерной области течения с продольными вихрями, а нижняя – двумерной области с автомодельным решением. Нижняя кривая определяет минимальный масштаб продольных вихрей для данного значения $\varepsilon \neq 0$. Таким образом, представленная на рис. 3 диаграмма описывает теоретические сценарии развития пограничных слоев над вогнутой и плоской поверхностями и, с одной стороны, показывает сингулярное вырождение задачи при вырождении размерности (при $\varepsilon \neq 0$ течение является трехмерным, а при $\varepsilon = 0$ – двумерным), с другой стороны, что природа продольных вихрей связана с нелинейным взаимодействием детерминированных вязких и центробежных возмущений. Верхняя кривая описывает восприимчивость пограничного слоя Блазиуса к внешним возмущениям, создаваемым центробежными силами.

Выше был приведен анализ теоретических сценариев развития пограничных слоев под действием центробежных сил и этот анализ позволяет понять физическую природу реальных течений над искривленными поверхностями. На рис. 4 представлена диаграмма, описывающая возможные сценарии развития пограничных слоев под действием центробежных сил в терминах определяющих параметров задачи. Вначале рассмотрим случай $\varepsilon = 0$ – плоская пластина. Реальное течение ха-

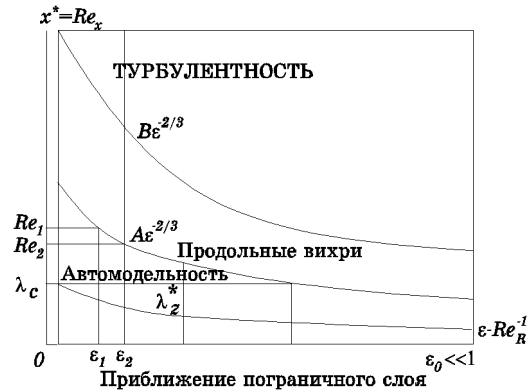


Рис. 4. Сценарии развития пограничных слоев под действием центробежных сил в терминах определяющих параметров задачи

рактеризуется критическими числами Рейнольдса $Re_{1,2}$ – безразмерной длины пластины, где происходит переход к турбулентности. Этот переход отражает существование случайных возмущений в основном потоке и представляет результат нелинейного взаимодействия между случайными и детерминированными (вследствие условий прилипания) возмущениями. Другими словами, возмущения основного потока определяют качество реального потока и обтекаемой поверхности (с точки зрения их соответствия теоретическим начальным и граничным условиям). Поэтому теория устойчивости является совершенно естественной для описания перехода к турбулентности на плоской пластине и достаточно хорошо предсказывает критическое число Рейнольдса. Ситуация становится существенно иной в случае вогнутой поверхности. Как было показано выше, генерация продольных вихрей связана с нелинейным взаимодействием детерминированных возмущений и поэтому в принципе не может быть описана с помощью теории устойчивости.

Развитие реального течения над вогнутой поверхностью может быть представлено следующим образом: при $\varepsilon < \varepsilon_2$ сценарий развития пограничного слоя определяется взаимодействием случайных свободных и детерминированных вязких возмущений и подобен сценарию развития пограничного слоя на плоской пластине. Отличия могут появиться в области $x^* > Re_1$. В этой турбулентной области может проявиться влияние центробежных сил. Однако этот вопрос требует особого рассмотрения. В области $\varepsilon > \varepsilon_2$ осуществляется переход от дву- к трехмерности (как на предыду-

шей диаграмме). Здесь переход означает, что эффекты трехмерности становятся достаточно большими и могут быть определены экспериментально. Этот переход, называемый первичной неустойчивостью, определяется нелинейным взаимодействием детерминированных возмущений. Генерируемые продольные вихри и являются основным течением для этого случая. Эти вихри растут в продольном направлении, а их интенсивность уменьшается. В итоге интенсивность свободных возмущений становится сравнимой с интенсивностью продольных возмущений и их нелинейное взаимодействие приводит к переходу к турбулентности (вторичная неустойчивость). Зависимость точек первичной и вторичной неустойчивостей от определяющих параметров задачи имеет вид

$$x^* = A\varepsilon^{-1/3} \text{ – первичная неустойчивость, (40)}$$

$$x^* = B\varepsilon^{-1/3} \text{ – вторичная неустойчивость, (41)}$$

здесь A и B – константы, которые могут быть определены экспериментально. Эти константы имеют различный физический смысл – константа A определяет переход к трехмерности ламинарного пограничного слоя и как указывалось, ее значение во многом определяется точностью измерительных приборов. Константа B по своему физическому смыслу соответствует критическому числу Рейнольдса для плоской пластины и зависит от параметров случайных возмущений набегающего потока. Представленная диаграмма позволяет предложить некоторые идеи, касающиеся оптимальных методов управления пограничным слоем и указать возможные пути такого управления, используя искусственные возмущения. Поскольку генерация продольных вихрей и их минимальный масштаб определяются взаимодействием поверхностного и объемного источников завихренности, то идея оптимального метода управления пограничного слоя состоит в возможности сбалансирования вязких и центробежных источников завихренностей. Это означает: 1) увеличение толщины пограничного слоя и/или 2) приложение некоторого объемного источника завихренности (с этой точки зрения искусственные источники возмущений – вихрегенераторы, не генерирует сами продольные вихри. Они делают сравнимыми интенсивности объемных и поверхностных источников завихренностей). Для каждого значения определяющего параметра ε и значения точки генерации X_c , продольных вихрей, всегда можно указать возможный и оптимальный путь такой реализации.

7. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Для определения численных значений констант A и B в функциональных зависимостях (40)–(41), характеризующих длину двумерного пограничного слоя и точку перехода к турбулентности, требуются результаты экспериментальных исследований по развитию пограничного слоя над вогнутой поверхностью без искусственных источников возмущений. Количество таких экспериментов крайне мало численно и связано это в первую очередь с техническими трудностями определения начала возникновения продольных вихрей. Ниже будут использованы результаты работ [1]. В табл. 1 приведены характерные условия экспериментов и параметры установок. В частности, X_{3D} и X_{cr} означают расстояния от передней кромки обтекаемой пластины до точки обнаружения продольных вихрей и перехода к турбулентности соответственно. Используя формулы (40)–(41), можно получить численные значения A и B в представленных экспериментах. Отметим, что в [3] экспериментальная установка состояла из плоского участка длиной 0.3 м и сопряженного с ним участка вогнутой поверхности с $R = 0.55$ м. Наличием плоского участка объясняется увеличение значения A в данном эксперименте по сравнению со случаями чисто вогнутой поверхности в экспериментах [16]. Учитывая, что определение точек возникновения продольных вихрей и перехода к турбулентности не может быть сделано с достаточной точностью, то полученные численные значения констант A и B следует считать вполне удовлетворительными. С определенной степенью точности длина двумерного участка пограничного слоя может быть описана зависимостью

$$L_{2D} = 20R \cdot \text{Re}_R^{-1/3}, \quad (42)$$

а для точки перехода к турбулентности X_{cr} для рассматриваемой задачи может быть использован простой критерий

$$X_{cr} = 36R \cdot \text{Re}_R^{-1/3}. \quad (43)$$

Отметим, что в эксперименте [1] с $U_0 = 0.125$ м/с внешний поток был возмущен случайным образом. Но как и следовало ожидать, это не сказалось на генерации продольных вихрей.

Кроме указанных параметров, в экспериментах [10, 16] были определены длины волн в поперечном направлении $\lambda_z = 2.3$ см. Учитывая, что из общих соображений $\lambda_z = CR \cdot \text{Re}_R^{-2/3}$, то можно

Таблица 1. Результаты экспериментальных исследований естественного (без искусственных возмущений) развития пограничных слоев над вогнутой поверхностью

Источники	Рабочее тело	U , м/с	ν , м ² /с	R , м	Re_R	X_{3D} , м	X_{cr} , м	$\lambda_z \cdot 10^2$, м	A	B	C
[14]	1. вода	0.5	10^{-6}	0.5	$2.5 \cdot 10^5$	0.16	–	–	20	–	–
	2. вода ¹	0.1125		0.51	$6.25 \cdot 10^4$	0.31	–	–	24	–	–
	3. вода	0.25		0	$2.5 \cdot 10^5$	–	0.6	–	–	38	–
	4. вода	0.28		1.0	$2.8 \cdot 10^5$	–	0.58	–	–	38	–
[13]	воздух	5.0	$1.5 \cdot 10^{-5}$	3.2	$1.05 \cdot 10^6$	0.5	1.0	2.3	16	32	74
[3]	вода	0.1	10^{-6}	0.55	$5.5 \cdot 10^4$	0.46	–	2.3	31	–	60

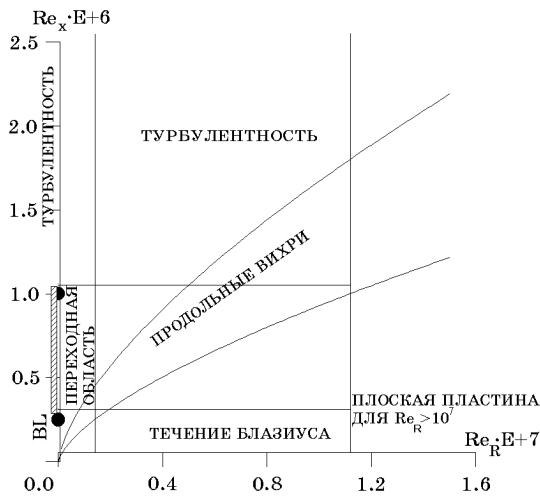


Рис. 5. Экспериментальные зависимости сценариев развития пограничных слоев над вогнутой поверхностью

оценить численное значение C и получить функциональную зависимость длин волн генерируемых продольных вихрей от определяющих параметров задачи

$$\lambda_z = (60 - 70)R \cdot Re_R^{-2/3}. \quad (44)$$

Выражение для λ_z определяет параметры генерируемых продольных вихрей в пограничном слое, которые существенным образом влияют на процессы переноса в нем (в частности, на трение). На рис. 5 представлена полуэмпирическая диаграмма сценариев развития пограничного слоя над вогнутой поверхностью в зависимости от Re_R конкретной задачи, Re_x – безразмерное расстояние от передней кромки. Следует учесть, что данная диаграмма справедлива для

$$1 \ll Re_R \ll (Re_{cr}/20)^{3/2}. \quad (45)$$

Т.е. для каждого значения Re_R , характеризующего параметры течения и поверхности и удовле-

¹эксперимент со случайными входящими возмущениями; $A, B = X_{3D}, X_{cr}/R \cdot Re_R^{1/3}, C = \lambda_z/R \cdot Re_R^{2/3}$

творяющего условиям (45), можно оценить длину $Re_{bl} = 20Re_R^{2/3}$ участка с двумерным пограничным слоем Блазиуса и соответствующими законами переноса, протяженность $L_{3D}^* = L_{3D}U_0/\nu = 16Re_R^{2/3}$ и длину волны $\lambda_z^* = \lambda_z U_0/\nu = 65Re_R^{1/3}$ генерируемых продольных вихрей.

Отметим также, что для вогнутых поверхностей переход к турбулентности возможен на расстояниях как меньше, так и больше соответствующего расстояния от начальной кромки в случае плоской поверхности. Так, для $Re_R^{**} < (Re_{cr}/36)^{3/2}$ переход к турбулентности осуществляется быстрее, чем на плоской пластине, а для $Re_R^{**} > (Re_{cr}/36)^{3/2}$ длина ламинарного пограничного слоя становится больше соответствующей длины ламинарного пограничного слоя над плоской поверхностью. На рис. 5 представлена графическая иллюстрация табличных результатов. Из них, в частности, следует, что при $Re_R > 10^7$ сценарий развития пограничного слоя над вогнутой поверхностью не отличается от развития пограничного слоя над плоской пластиной. Кроме этого, данный рисунок иллюстрирует сильную зависимость возможных сценариев развития пограничных слоев в зависимости от качества начальных и граничных условий и объясняет их многообразие в различных экспериментах. Полученные характеристики могут быть использованы в целях управления пограничным слоем над искривленными поверхностями.

ВЫВОДЫ

Асимптотический анализ полных уравнений Навье-Стокса в проблеме Гертлера позволил более глубоко понять физический механизм переходных процессов в пограничных слоях под действием объемных сил. Показано, что генерация продольных вихрей суть результат нелинейного взаимодействия двух источников завихренности – объемного, определяемого центробежными си-

лами и поверхностного, связанного с условиями прилипания. Наличие центробежной силы приводит к существенной трехмерности пограничного слоя. Представленный анализ позволяет объединить и математически формализовать такие понятия, как устойчивость, восприимчивость пограничного слоя и справедливость приближений пограничного слоя и указать оптимальные пути его управления, используя определяющие параметры задачи. Кроме того, предложенный подход определяет естественную классификацию возмущений:

1. Начальные и граничные условия, объемные силы – этот тип возмущений может быть точно описан макроскопическими уравнениями;
2. Свободные возмущения (случайные) – отражают качество потока обтекаемой поверхности;
3. Искусственные возмущения, создаваемые вихрегенераторами. Анализ поясняет физический механизм различных типов течений (течения Блазиуса и Фолкнер-Скана, волны Толлмина-Шлихтинга, продольные вихри), генерируемых в пограничных слоях с центробежными силами и явным образом определяет зависимость пространственных масштабов задачи от определяющих параметров. В результате, процесс перехода к турбулентности может быть представлен как непрерывный процесс изменения вихревой динамики, определяемой балансом различных сил.

1. *Saric W. S.* Goertler vortices // *Annu. Rev. Fluid Mech.*– 1994.– 26.– P. 379–409.
2. *Saric W.* Low-speed boundary-layer transition experiments // *Experiments, Theory & Computations.*– Oxford, Eds. T.C. Corke, G. Erlebacher, M.Y. Hussaini, 1994.– P. 14–114.
3. *Pexieder A.* Effects of system rotation on the centrifugal instability of the boundary layer on a curved wall: an experimental study // *These N 1507.*– , 1996.– P. 112.
4. *Morkovin M.V.* On the many faces of transition // *Viscous Drag Reduction.*– ed.: C.S. Wells, Plenum, 1969.– P. 32.
5. *Nikiforovich E. I., Yurchenko N. F.* Boundary-layer flows with centrifugal forces // *ERCOTAC Bulletin.*– Lausanne, Swiss, 1997, March, 32.– P. 61–65.
6. *Nikiforovich E.I.* A new approach to the study of organized vortical motion effected by body forces // *AGARD Workshop “High speed body motion in water”.*– Kiev, 1–3 Sept. 1997, AGARD–R–827, 1997.– P. 12.
7. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости.– М.: Мир, 1967.– 157 с.
8. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике.– Москва: Наука, 1967.– 428 с.
9. *Goertler H.* Uber eine dreidimensionale Instabilitat laminarer Grenzschichten an konkaven Wanden // *Nach. Ges.Wiss. Gottingen Math.-Phys. Kl.*– 1940.– 2 Bd, N 1.– S. 1–26.
10. *Blackwelder R.F.* Coherent structures associated with turbulent transport // *Transport Phenomana in Turbulent Flows.*– Hemisphere Publ. Corp., ed. M.Hirata and N.Kasagi, 1988.– P. 69–88.
11. *Florian J.M., Saric W.S.* Stability of Goertler vortices in boundary layers // *AIAA J.*– 1982.– 10, N 3.– P. 316–324.
12. *Aihara Y.* Goertler vortices in the nonlinear region // *Theoretical and Experimental Fluid Mechanic.*– Springer-Verlag, Berlin, 1979.– P. 331–338.
13. *Swearingen J.D., Blackwelder R.F.* The growth and breakdown of streamwise vortices in the presence of a wall // *J. Fluid Mech.*– 1987.– 182.– P. 225–290.
14. *Bippes H.* Experimental study of the laminar-turbulent transition of a concave wall in a parallel flow // *NASA TM. 75243.*– Langley Research Center, 1978.– P. 68.
15. *Tani I.* Production of longitudinal vortices in the boundary layer along a curved wall // *J. Geophysical Research.*– 1962.– 67, N 8.– P. 3075–3080.
16. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя.– Москва: Наука, 1969.– 742 с.