ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2009. Том 11, N 4. С. 60 – 68

УДК 532.546

# УСТАНОВИВШАЯСЯ БЕЗНАПОРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В НЕСВЯЗНОМ НЕСУФФОЗИОННОМ ГРУНТЕ МЕЖДУ ВОДОТОКАМИ (ДРЕНАМИ)

**В. Л. ПОЛЯКОВ**

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

*Получено 23.08.2008*

Аналитическими методами выполнено исследование стационарной безнапорной фильтрации между водотоками в несвязном несуффозионном грунте, который подвергся фильтрационным деформациям без мобилизации его частиц. Сформулированы условия реализации трех основных способов деформаций. Для них поставлены математические задачи и получены их строгие решения. На основе выведенных расчетных формул и на многочисленных примерах детально проанализирована значимость указанных деформаций для фильтрационного процесса (расхода).

Аналітичними методами виконано дослідження стаціонарної безнапірної фільтрації між водотоками в незв'язному несуфозійному грунті, який зазнав фільтраційних деформацій без мобілізації його часток. Наведено умови реалізації трьох основних способів деформацій. Для них сформульовані математичні задачі і отримано їх точні розв'язки. На основі побудованих розрахункових формул і на багаточисленних прикладах детально проаналізовано значущість вказаних деформацій для фільтраційного процесу (витрати).

A steady groundwater flow between two channels (drains) is studied by analytical methods in cohesive less sand soil which is subjected to hydrodynamic deformations without solid particles mobilization. The conditions of three main deformation mechanisms realization are presented. Mathematical tasks are formulated for them and their exact solutions are obtained. Importance of the deformations above for groundwater process is analysed based on a great number of examples.

## ВВЕДЕНИЕ

Огромный опыт, накопленный при длительной эксплуатации разнообразных дренажей в природной среде, свидетельствует о происходящих при этом необратимых изменениях фильтрационных свойств грунтов. Важно отметить, что подобные изменения касаются не только несвязных, но и некоторых связных грунтов. В обширной литературе [1-5] экспериментальными и теоретическими методами обстоятельно рассматривались особенности развития фильтрационного режима суффозионных грунтов на фоне дренажей при мобилизации (иммобилизации) мелких (неструктурных) частиц. Вместе с тем проницаемость грунтов может меняться в результате интенсивного фильтрационного течения, но при неизменной их пористости. Такой тип фильтрационных деформаций заключается в переориентации структурных частиц неправильной формы. Указанные частицы стремятся под действием фильтрационной силы занять оптимальное в гидродинамическом смысле положение, при котором минимизируется сопротивление течению жидкости со стороны скелета среды. Очевидно, что при механических деформациях подобного типа невозможны вынос твердого вещества в приемники или образование в грунте слабопроницаемых прослоек. Деформации в несвязных несуффозионных грунтах на действующих дренажных системах способствуют ощутимой интенсификации их работы [6, 7] и не имеют некоторых нежелательных последствий, свойственных суффозии и кольматажу. Поэтому представляется существенным в практическом отношении корректный учет деформаций второго типа еще на стадии проектирования дренажа. Таким образом, реально заметно удешевить строительство мелиоративного дренажа, приняв во внимание при выборе его параметров (расстояние между дренами, глубина их укладки) прогнозируемый рост проницаемости грунта. Упорядочение структуры грунта за счет вращательного движения частиц его скелета без изменения своего местоположения, судя по имеющимся экспериментальным данным [6, 8], протекает постепенно, так что характерное время этого процесса соизмеримо с аналогичным временем фильтрационного процесса. На это указывают значимые, но далеко не окончательные изменения коэффициента фильтрации $k$ в течение одного рабочего цикла дренажа. Выраженная нестационарность в поведении коэффициента $k$ с позиций механики грунтов объясняется отсутствием равновесия между фильтрационной силой, действующей на отдельную структурную частицу, и силами ее взаимодействия (сцепления) с соседними частицами. Однако для приложений имеет значение только конечный результат, который выражается в увеличении фундаментальной водно-физической характеристики $k$ с ростом интегральной гидродинамической силы. Последняя же характеризуется градиентом напора $I$. Поэтому экспериментальные исследования применительно к несуффозионным грунтам были, в первую очередь, направлены на выявление связи между $k$ и $I$. В конечном итоге было установлено, что коэффициент фильтрации таких грунтов вследствие их деформирования способен возрасти от исходного значения $k_0$ до предельного $k_u$ при изменении градиента напора $I$ в пределах от критического $I_k$ до предельного $I_u$, так что формально

$$k = k_0 \quad \text{при} \quad I \leq I_k, \qquad k = k_u \quad \text{при} \quad I \geq I_u. \tag{1}$$

Изменение же $k$ в интервале $[I_k, I_u]$, строго говоря, носит нелинейный характер. Однако в первом приближении здесь приемлемой оказывается аппроксимация $k$ линейной функции

$$k = a + bI. \tag{2}$$

Согласно (1), коэффициенты в выражении (2) будут

$$a = 1 - \frac{k_u - k_0}{I_u - I_k} I_k, \qquad b = \frac{k_u - k_0}{I_u - I_k}. \tag{3}$$

Именно выражения (1), (2) использованы в стационарных задачах фильтрации в деформированных несуффозионных грунтах между водотоками (дренами), точные решения которых получены в [9, 10] и данной работе. Построение указанных решений в значительной степени осложняется из-за дополнительной нелинейности в связи с применением (2) и кусочной формой приближения коэффициента $k$. Следует заметить, что от фрагментарного описания зависимости $k(I)$ можно отказаться, воспользовавшись такими элементарными функциями и их комбинациями, которые бы отражали плавное асимптотическое приближение $k$ к своим предельным значениям с ростом и уменьшением градиента $I$ и быстрое изменение $k$ при средних значениях $I$. Перспективными в этом плане представляются обратные тригонометрические функции. Безусловно, что такой подход имеет и сильные, и слабые стороны. Но для решаемых ниже задач предпочтительнее первый подход, базирующийся на соотношениях (1), (2).

## 1. ПОСТАНОВКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ И ИХ РЕШЕНИЕ

Аналитическими методами анализируется установившееся безнапорное фильтрационное течение в несвязном грунте с упорядоченной структурой, направленное от протяженного источника жидкости к параллельно расположеному приемнику (стоку). В их качестве могут выступать природные и искусственные водотоки (река, канал, водохранилище), а также длинные разноуровневые горизонтальные дрены. Все эти водные объекты или полностью (до водоупора) прорезают водоносную толщу (совершенные, фильтрационное сопротивление $\Phi$ равно 0), или чаще частично (несовершенные, $\Phi > 0$). Уровень в водотоках, а тем более напор в дренах часто в течение длительного времени является стабильным. Это дает основание прежде всего рассмотреть заметно более простую стационарную задачу о плоской фильтрации между водотоками с заданными на них напорами. Гидродинамическое и конструктивное несовершенство обоих водотоков учитывается в соответствии с [11, 12] путем введения в исходную модель общих фильтрационных сопротивлений $\Phi_d$, $\Phi_s$. При безнапорной фильтрации в перемычках, земляных плотинах и дамбах, междренном пространстве напор $h$ обычно меняется относительно плавно, и в зависимости от соотношения между граничными градиентами напора

$$I_d = I(0) = \frac{dh}{dx}|_{x=0}, \quad I_L = I(L) = \frac{dh}{dx}|_{x=L}$$

(здесь $L$ – расстояние между водотоками) и характерными значениями $I_k$, $I_u$ возможны пять способов деформирования несуффозионного грунта. Следует подчеркнуть, что установить строение области фильтрации в деформированном грунте при заранее неизвестном фильтрационном расходе удается только после его определения. Соответствующие условия, регламентирующие существование зон предельной деформации ($I_d < I < I_u$) и недеформированного грунта ($I_k < I \leq I_L$), приводятся ниже. Что касается самой возможности возникновения деформаций, то подходящее условие вытекает из решения аналогичной задачи в недеформированном грунте. Так как при этом максимальный градиент напора $I_{d0}$ имеет место на водоприемнике, то условие деформирования грунта под действием несовершенных водотоков принимает следующий вид:

$$I_{d0} > I_k, \tag{4}$$

$$I_{d0} = \frac{M_s^2 - M_d^2}{2\sqrt{(L + 2\Phi_d + 2\Phi_s)(LM_d^2 + 2\Phi_s M_d^2 + 2\Phi_d M_s^2)}}.$$

В первую очередь, исследуется наиболее сложный способ деформирования грунта, который реализуется при условии

$$I_d > I_u > I_k > I_L. \tag{5}$$

Тогда установившееся движение грунтовых вод со свободной поверхностью в однородной пористой среде при кусочно-линейной аппроксимации коэффициента фильтрации описывается системой нелинейных уравнений фильтрации:

$$\frac{d}{dx}\left(h_u \frac{dh_u}{dx}\right) = 0, \qquad 0 \le x < L_u; \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(a + b\frac{dh}{dx}\right) h \frac{dh}{dx}\right] = 0, \qquad L_u \le x \le L_k; \tag{7}$$

$$\frac{d}{dx}\left(h_0 \frac{dh_0}{dx}\right) = 0, \qquad L_k < x \le L. \tag{8}$$

Таким образом, область фильтрации условно делится на три зоны: первую зону – предельной деформации ($0 \le x < L_u$), вторую зону – частичной деформации ($L_u \le x \le L_k$), третью зону – недеформированного грунта ($L_k < x \le L$), а $h_u$, $h$, $h_0$ – напоры в соответствующих (первой, второй и третьей) зонах.

Оператор краевых условий включает, во-первых, условия на водоприемнике и водоисточнике, учитывающие их несовершенство:

$$x = 0, \qquad h_u^2 - 2\Phi_d \frac{dh_u^2}{dx} = M_d^2; \tag{9}$$

$$x = L, \qquad h_0^2 - 2\Phi_s \frac{dh_0^2}{dx} = M_s^2, \tag{10}$$

где $M_d$, $M_s$ – уровни в приемнике и источнике соответственно. Во-вторых, включает условия сопряжения напоров и расходов на внутренних границах области движения:

$$x = L_u,\ h_u = h;\ k_u \frac{dh_u}{dx} = \left(a + b\frac{dh}{dx}\right)\frac{dh}{dx}; \tag{11}$$

$$x = L_k,\ h = h_0;\ \left(a + b\frac{dh}{dx}\right)\frac{dh}{dx} = k_0 \frac{dh_0}{dx}, \tag{12}$$

где $k_u$ – коэффициент фильтрации в зоне предельной деформации. Наконец, для установления изначально неизвестного положения внутренних границ задаются дополнительные условия:

$$x = L_u, \qquad \frac{dh_u}{dx} = I_u; \tag{13}$$

$$x = L_k, \qquad \frac{dh_0}{dx} = I_k. \tag{14}$$

Сначала дважды интегрируются уравнения (6), (8) и с использованием условий (9), (10) находятся выражения для односторонних расходов и напоров в пределах крайних зон, содержащие две пока неопределенные постоянные:

$$k_u h_u \frac{dh_u}{dx} = k_u A, \tag{15}$$

$$h_u^2 = M_d^2 + 2A(x + 2\Phi_d), \tag{16}$$

$$k_0 h_0 \frac{dh_0}{dx} = k_0 C, \tag{17}$$

$$h_0^2 = M_s^2 + 2C(x - L - 2\Phi_s). \tag{18}$$

Уравнение (7) после первого интегрирования трансформируется к виду

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{a}{2b} + \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{B_1}{bh}}. \tag{19}$$

Его общее решение представляется зависимостью

$$x + B_2 = S(h) = 2b \int \frac{\sqrt{h}dh}{\sqrt{a^2 h + 4bB} - a\sqrt{h}}. \tag{20}$$

Далее неизвестные координаты $L_k$, $L_u$ с помощью условий (13), (14) определяются через $B_1$. Прежде всего из полученного с помощью (14) и (18) уравнения

$$\frac{B_1}{\sqrt{k_0^2 M_s^2 + 2k_0 B_1 (L_k - L - 2\Phi_s)}} = I_k$$

находится положение границы между второй и третьей зонами:

$$L_k = L + 2\Phi_s + \frac{1}{2k_0 B_1}\left(\frac{B_1^2}{I_k^2} - k_0 M_s^2\right). \tag{21}$$

Аналогично из выражений (13) и (16) вытекает

$$\frac{B_1}{\sqrt{k_u^2 M_d^2 + 2k_u B_1 (L_u + 2\Phi_d)}} = I_u,$$

и формула для координаты границы между первой и второй зонами:

$$L_u = -2\Phi_d + \frac{k_u}{2B_1}\left(\frac{B_1^2}{k_u^2 I_u^2} - M_d^2\right). \tag{22}$$

Для определения констант $B_1$, $B_2$ условия равенства напоров (11), (12) применяются к (20). Тогда

$$L_u + B_2 = S_1 = 2b \int^{h_u(L_u)} \frac{\sqrt{\xi}d\xi}{\sqrt{a^2\xi + 4bB_1} - a\sqrt{\xi}}, \tag{23}$$

$$L_k+B_2=S_2=2b\int^{h_0(L_k)}\frac{\sqrt{\xi}d\xi}{\sqrt{a^2\xi+4bB_1}-a\sqrt{\xi}}. \quad (24)$$

Вычитание выражения (23) из (24) позволяет, во-первых, исключить $B_2$ и, во-вторых, получить уравнение относительно $B_1$ в такой форме:

$$L_k(B_1)-L_u(B_1)=2b\int\limits_{h_u(B_1)}^{h_0(B_1)}\frac{\sqrt{\xi}d\xi}{\sqrt{a^2\xi+4bB_1}-a\sqrt{\xi}}, \quad (25)$$

где

$$h_u(B_1)=\sqrt{M_d^2+\frac{2B_1}{k_u}(L_u(B_1)+2\Phi_d)},$$

$$h_0(B_1)=\sqrt{M_s^2+\frac{2B_1}{k_0}(L_k(B_1)-L-2\Phi_s)}.$$

При определенной из (25) постоянной $B_1$ по формулам (21), (22) вычисляются значения $L_u$, $L_k$. После этого становится возможным расчет распределения напора в области движения с использованием системы зависимостей

$$h_u=\sqrt{M_d^2+\frac{2B_1}{k_u}(x+2\Phi_d)}, \quad 0\le x<L_u; \quad (26)$$

$$x=L_u+\int\limits_{h_u(L_u)}^{h}\frac{\sqrt{\xi}d\xi}{\sqrt{a^2\xi+4bB_1}-a\sqrt{\xi}}, \ L_u\le x\le L_k; \quad (27)$$

$$h_0=\sqrt{M_s^2+\frac{2B_1}{k_0}(x-L-2\Phi_s)}, \quad L_k<x\le L. \quad (28)$$

Расход жидкости из источника в приемник всюду одинаковый, так что

$$k_uA=k_0C=B_1. \quad (29)$$

Фильтрационный же расход для аналогичных условий, но в недеформированном грунте, как известно, составляет

$$Q_0=k_0\frac{M_s^2-M_d^2}{2(L+2\Phi_d+2\Phi_s)}. \quad (30)$$

И из выражения (30) при $\Phi_d=\Phi_s=0$ следует классическая формула Дюпюи. Тогда относительное увеличение указанного расхода будет

$$G_Q=\frac{B_1}{Q_0}=\frac{2B_1(L+2\Phi_d+2\Phi_s)}{k_0(M_s^2-M_d^2)}. \quad (31)$$

Коэффициент фильтрации в зоне частичной деформации $k_I$ представляет собой следующую функцию от $x$:

$$k=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{bB_1}{h(x)}}, \quad (32)$$

в которой связь между $h$ и $x$ имеет вид (27).

Условие образования зоны полной деформации будет

$$\frac{B_1}{k_uh_u(0)}>I_u$$

и после ряда преобразований с учетом (26) трансформируется, так что

$$B_1>k_uI_u^2\left(\sqrt{4\Phi_d^2+\frac{M_d^2}{I_u^2}}+2\Phi_d\right). \quad (33)$$

При $\Phi_d=0$ условие (33) упростится

$$B_1>k_uI_uM_d.$$

Условие существования зоны без деформаций принимает вид

$$\frac{B_1}{k_0h_0(L)}<I_k,$$

что в конце концов накладывает на $B_1$ следующее ограничение:

$$B_1<k_0I_k^2\left(\sqrt{4\Phi_s^2+\frac{M_s^2}{I_k^2}}-2\Phi_s\right), \quad (34)$$

а при $\Phi_s=0$

$$B_1<k_0I_kM_s.$$

Переход к безразмерным величинам с применением в качестве масштабов $L$, $k_0$, $I_0=(M_s-M_d)/L$, а также некоторых дополнительных преобразований позволяют вывести более простые и общие представления искомых характеристик. Тогда ключевое уравнение относительно безразмерного коэффициента $\bar{B}_1$ станет

$$\bar{L}_k(\bar{B}_1)-\bar{L}_u(\bar{B}_1)=2\bar{b}\bar{B}_1(S_1-S_2), \quad (35)$$

где

$$\bar{L}_k=L_k/L, \bar{L}_u=L_u/L,$$

$$\bar{B}_1=B_1/(k_0LI_0^2), \bar{a}=a/k_0, \bar{b}=bI_0/k_0,$$

$$\bar{I}_k=I_k/I_0, \bar{I}_u=I_u/I_0, \bar{k}_u=k_u/k_0,$$

$$S_1=\frac{\bar{a}}{8\bar{b}\bar{I}_k^2}+\left(\frac{1}{8\bar{b}\bar{I}_k}+\frac{1}{4\bar{a}^2}\right)\sqrt{\frac{\bar{a}^2}{\bar{I}_k^2}+\frac{4\bar{b}}{\bar{I}_k}}- \quad (36)$$

$$-\frac{\bar b}{2\bar a^3}\ln\left(2\bar a\sqrt{\frac{\bar a^2}{\bar I_k^2}+\frac{4\bar b}{\bar I_k}}+\frac{2\bar a^2}{\bar I_k}+4\bar b\right),$$

$$S_2=\frac{\bar a}{8\bar b\bar k_u^2\bar I_k^2}+\left(\frac{1}{8\bar b\bar k_u\bar I_k}+\frac{1}{4\bar a^2}\right)\sqrt{\frac{\bar a^2}{\bar k_u^2\bar I_k^2}+\frac{4\bar b}{\bar k_u\bar I_k}}- \tag{37}$$

$$-\frac{\bar b}{2\bar a^3}\ln\left(2\bar a\sqrt{\frac{\bar a^2}{k_u^2\bar I_u^2}+\frac{4\bar b}{k_u\bar I_u}}+\frac{2\bar a^2}{k_u\bar I_u}+4\bar b\right).$$

При расчете относительных напоров и других характеристик в первую очередь необходимо установить относительные значения $\bar L_k$, $\bar L_u$ по формулам

$$\bar L_k=1+2\bar\Phi_s+\frac{1}{2\bar B_1}\left(\frac{\bar B_1^2}{\bar I_k^2}-\bar M_s^2\right), \tag{38}$$

$$\bar L_u=-2\bar\Phi_d+\frac{\bar k_u}{2\bar B_1}\left(\frac{\bar B_1^2}{\bar k_u^2\bar I_u^2}-\bar M_d^2\right), \tag{39}$$

где $\bar\Phi_d=\Phi_d/L$, $\bar\Phi_s=\Phi_s/L$, $\bar M_d=M_d/(M_s-M_d)$, $\bar M_s=M_s/(M_s-M_d)$. Подстановка выражений (38), (39) в уравнение (35) позволяет получить для $\bar B_1$ квадратное уравнение

$$\tilde S\bar B_1^2+2(1+2\bar\Phi_d+2\bar\Phi_s)\bar B_1+\bar k_u\bar M_d^2-\bar M_s^2=0,$$

где

$$\tilde S=\frac{1}{\bar I_k^2}-\frac{1}{\bar k_u\bar I_k^2}-4\bar b(S_1-S_2).$$

Таким образом,

$$\bar B_1=-\frac{1}{\tilde S}\left(\sqrt{(1+2\bar\Phi_d+2\bar\Phi_s)^2+\tilde S(\bar M_s^2-\bar k_u\bar M_d^2)}+1+2\bar\Phi_d+2\bar\Phi_s\right). \tag{40}$$

Теперь несложно рассчитать относительные напоры в пределах трех характерных зон:

$$\bar h_u=\frac{h_u}{M_s-M_d}=\sqrt{\bar M_d^2+\frac{2\bar B_1}{\bar k_u}(\bar x+2\bar\Phi_d)},\quad 0\le\bar x<\bar L_u; \tag{41}$$

$$\bar x=\bar L_u+2\bar b[S(\bar h)-\bar B_1S_2],\quad \bar L_u\le\bar x<\bar L_k; \tag{42}$$

$$\bar h_0=\frac{h_0}{M_s-M_d}=\sqrt{\bar M_s^2+2\bar B_1(\bar x-1-2\bar\Phi_s)},\quad \bar L_k\le\bar x\le 1, \tag{43}$$

где $\bar x=x/L$, $\bar h=h/(M_s-M_d)$,

$$S(\bar h)=\frac{\bar a\bar h^2}{8\bar b\bar B_1}+\left(\frac{\bar h}{8\bar b\bar B_1}+\frac{1}{4\bar a^2}\right)\sqrt{\bar a^2\bar h^2+4\bar b\bar B_1\bar h}- \tag{44}$$

$$-\frac{\bar b\bar B_1}{2\bar a^3}\ln\left(2\bar a\sqrt{\bar a^2\bar h^2+4\bar b\bar B_1\bar h}+2\bar a^2\bar h+4\bar b\bar B_1\right).$$

Относительное приращение фильтрационного расхода за счет переориентации частиц скелета характеризуется параметром расхода (31), выражение которого через безразмерные величины дает

$$G_Q=\frac{Q}{Q_0}=\frac{2\bar B_1}{\bar M_s+\bar M_d}. \tag{45}$$

Относительный коэффициент фильтрации в зоне частичной деформации будет

$$\bar k=\frac{k}{k_0}=\frac{\bar a}{4}+\sqrt{\frac{\bar a^2}{4}+\frac{\bar b\bar B_1}{\bar h(\bar x)}}. \tag{46}$$

Наконец, область фильтрации состоит из трех зон при выполнении условия

$$\bar I_k^2\left(\sqrt{4\bar\Phi_s^2+\frac{\bar M_s^2}{\bar I_k^2}}-2\bar\Phi_s\right)>\bar B_1> \tag{47}$$

$$>\bar k_u\bar I_u^2\left(\sqrt{4\bar\Phi_d^2+\frac{\bar M_d^2}{\bar I_u^2}}+2\bar\Phi_d\right),$$

которое при совершенных водотоках станет

$$\bar I_k\bar M_s>\bar B_1>\bar k_u\bar I_u\bar M_d.$$

При определении расхода установившегося плоского безнапорного фильтрационного течения в недеформированном грунте между несовершенными водотоками часто используется такое выражение:

$$Q_0=k_0\frac{M_s+M_d}{2}\frac{M_s-M_d}{L+\Psi}. \tag{48}$$

С помощью обобщенного параметра – сопротивления $\Phi$ – в принципе возможно учитывать любые виды и комбинации несовершенства. В частности, $\Phi$ может включать компоненту $\Phi_c$, связанную с деформированием грунта. В этом случае расход будет

$$Q=k_uh_u\frac{dh_u}{dx}|_{x=0}=B_1. \tag{49}$$

Отождествляя в выражении (48) $\Phi$ с $\Phi_c$ и приравнивания затем (48), (49), после ряда преобразований выведены для $\Phi_c$ формулы в размерной форме:

$$\Phi_c=\frac{k_0}{2B_1}(M_s^2-M_d^2)-L$$

и безразмерной:

$$\bar\Phi_c=\frac{\Phi_c}{L}=\frac{\bar M_s+\bar M_d}{2\bar B_1}-1. \tag{50}$$

Вторая типичная ситуация имеет место, если выделенные значения градиента напора связаны соотношениями

$$I_u\ge I_d>I_k>I_L. \tag{51}$$

Тогда зона полной деформации отсутствует, и уравнение фильтрации (6), а также условия сопряжения на границе $x = L_u$ (11) выпадают из модели. Таким образом сохраняются уравнения (7), (8), условия (10), (12), (14) и, кроме того, на дрене принимается аналогичное (9) условие

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{h}^2 - 2\bar{\Phi}_2 \frac{d\bar{h}^2}{d\bar{x}} = \bar{M}_d^2. \qquad (52)$$

Выкладки при решении данной и предыдущей задач имеют много общего. Поэтому ниже приводятся, по существу, только основные расчетные формулы с минимумом дополнительной информации, причем уже в относительных величинах. Но прежде, опираясь на выражение (47), можно утверждать, что первая зона не образуется, если

$$\bar{B}_1 < \bar{k}_u \bar{I}_u^2 \left( \sqrt{4\bar{\Phi}_d^2 + \frac{\bar{M}_d^2}{\bar{I}_u^2}} + 2\bar{\Phi}_d \right). \qquad (53)$$

Несмотря на более простой с формальной точки зрения вид исходной математической модели, трудности при вычислении базового коэффициента $\bar{B}_1$ возрастают из-за неопределенности функции напора $h(x)$ на дрене и $\Phi_d > 0$. В связи с этим приходится предварительно находить значение $\bar{h}_d = h(0)/(M_s - M_d)$. Воспользовавшись выражением для градиента напора

$$\frac{d\bar{h}^2}{d\bar{x}} = -\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\bar{h} + \sqrt{\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\bar{h}\right)^2 + 4\bar{B}_1\bar{h}}, \qquad (54)$$

несложно с помощью условия (52) установить связь $\bar{B}_1$ с $\bar{h}_d$:

$$\bar{B}_1 = \frac{\bar{b}(\bar{h}_d^2 - \bar{M}_d^2)}{16\bar{\Phi}_d^2 \bar{h}_d} + \frac{\bar{a}}{4\bar{\Phi}_d}\left(\bar{h}_d^2 - \bar{M}_d^2\right). \qquad (55)$$

Теперь уравнение относительно $\bar{h}_d$ приобретает вид

$$\bar{L}_k(\bar{B}_1(\bar{h}_d)) = 2\bar{b}[S_1\bar{B}_1(\bar{h}_d) - S(\bar{h}_d)]. \qquad (56)$$

Здесь $S_1$ вычисляется согласно (36), а функция $S(\bar{h}_d)$ – (44); $\bar{L}_k$ – по формуле (38). При известном $\bar{h}_d$ сначала находится $\bar{B}_1$ по (55), а затем распределение напоров в области движения. В зоне недеформированного грунта оно определяется зависимостью (43), а в зоне частичной деформации будет

$$\bar{x} = \bar{L}_k - 2\bar{b}[S_2\bar{B}_1 - S(\bar{h})]. \qquad (57)$$

Важнейшие же параметры задачи $G_Q$, $\bar{\Phi}_c$ предлагается рассчитывать по ранее выведенным формулам (45), (50). Изменение их значений вследствие смены способа деформирования объясняется только изменением $\bar{B}_1$. В частном случае $\Phi_d = \Phi_s = 0$ $\bar{h}_d$ известно заранее и равно $\bar{M}_d$. Поэтому искомое $\bar{B}_1$ находится сразу путем решения уравнения

$$\bar{L}_k(\bar{B}_1) = 2\bar{b}[S_1\bar{B}_1 - S(\bar{M}_d)]. \qquad (58)$$

Еще одна реальная ситуация складывается при выполнении условия

$$I_d > I_u > I_L \geq I_k. \qquad (59)$$

В соответствии с выражением (47) для ее реализации необходимо, чтобы

$$\bar{B}_1 \geq \bar{I}_k^2 \left( \sqrt{4\bar{\Phi}_s^2 + \frac{\bar{M}_s^2}{\bar{I}_k^2}} - 2\bar{\Phi}_s \right). \qquad (60)$$

Тогда в математической модели будет отсутствовать уже уравнение (8), а к оставшимся уравнениям (6), (7) и условиям (9), (11)–(13) добавится условие на источнике:

$$\bar{x} = 1, \quad \bar{h}^2 - 2\bar{\Phi}_s \frac{d\bar{h}^2}{d\bar{x}} = \bar{M}_s^2. \qquad (61)$$

Ход решения опустим. Положение единственной внутренней границы вычисляется по формуле (39).

В общем случае $\Phi_s > 0$ возникают вычислительные осложнения в связи с необходимостью дополнительного определения на внешней границе $x = L$ $(\bar{x} = 1)$ относительного напора $\bar{h}_L$. С этой целью использовались выражения (54), (61), и в итоге получено уравнение

$$\bar{h}_L^2 - 2\bar{\Phi}_s \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\bar{h}_L + 2\bar{\Phi}_s \sqrt{\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\bar{h}_L\right)^2 + 4\bar{B}_1\bar{h}_L}, \qquad (62)$$

исходя из которого $\bar{B}_1$ выражается через $\bar{h}_L$ следующим образом:

$$\bar{B}_1 = \frac{\bar{b}(\bar{M}_s^2 - \bar{h}_L^2)}{16\bar{\Phi}_s^2 \bar{h}_L} + \frac{\bar{a}}{4\bar{\Phi}_s}\left(\bar{M}_s^2 - \bar{h}_L^2\right). \qquad (63)$$

Само же значение $\bar{h}_L$ вычисляется в результате решения уравнения

$$\bar{L}_u(\bar{B}_1(\bar{h}_L)) = 1 - 2\bar{b}[S(\bar{h}_L) - S_2\bar{B}_1(\bar{h}_L)], \qquad (64)$$

где выражения для $\bar{L}_u(\bar{B}_1)$, $S(\bar{h}_L)$, $S_2$ соответственно есть (39), (44), (37). При известном $\bar{h}_L$ последовательно определяются $\bar{B}_1$ – по формуле (63), $G_Q$ – по формуле (45), $\bar{\Phi}_c$ – по формуле (50). Для расчета напоров следует пользоваться в пределах зоны полной деформации формулой (41), а в пределах зоны частичной деформации – (42).

Процедура вычислений упрощается, если $\Phi_d = \Phi_s = 0$. В таком случае $\bar{h}_L = \bar{M}_s$ и $\bar{B}_1$ находится непосредственно из уравнения

$$\bar{L}_u(\bar{B}_1) = 1 - 2\bar{b}[S(\bar{M}_s) - S_2\bar{B}_1]. \qquad (65)$$

## 2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ПРИМЕРОВ

Предложенная выше методика расчета установившейся плоской безнапорной фильтрации из источника в приемник в грунте с упорядоченной структурой между двумя водотоками иллюстрируется вычислениями ряда примеров. Полученные результаты вычислений благодаря принятию типичных и вместе с тем заметно отличающихся между собой значений модельных параметров дают наглядную картину возможных изменений характеристик водного режима несвязного несуффозионного грунта при возникновении в нем деформаций второго рода. Поскольку для градиентов напора в области движения выбран в качестве масштаба средний в ней градиент $I_a$, а кривизна свободной поверхности относительно небольшая, то характерные относительные градиенты $\bar{I}_k$, $\bar{I}_u$ оказываются порядка 1.

Для первых двух серий примеров взяты значения $\bar{I}_k = 1$, для третьей серии – $\bar{I}_k = 0.5$. Приемник и источник считаются совершенными и в гидродинамическом, и в конструктивном отношении. Диапазон изменения $\bar{k}_u$ для полноты анализа расширен по сравнению с опытными данными и лежит в пределах от 1 до 3. Относительные уровни $\bar{M}_d$, $\bar{M}_s$ подбирались специально на основе условий (47), (53), (60). Тем самым удалось отразить в примерах, а затем и обсудить три наиболее распространенных способа деформаций несуффозионного грунта, которые последовательно и детально рассмотрены здесь аналитическими методами. Предметом многочисленных расчетов стали, главным образом, два ключевых параметра, а именно $G_Q$ и $\bar{\Phi}_c$.

Заданные в первой серии примеров $\bar{M}_d = 0$, $\bar{M}_s = 1$ при $\bar{I}_k = 1$ отвечают множеству ситуаций, которые различаются уровнем воды в источнике, но имеют оптимальные условия для ее отвода из грунта и приемника. При этом справедливым является условие (47), что предопределяет развитие наиболее сложного способа деформаций, когда область фильтрации состоит из трех зон. Значения $G_Q$, $\bar{\Phi}_c$ вычислялись при непрерывно менявшимся в вышеупомянутых пределах коэффициенте $\bar{k}_u$ и дискретно менявшимся $\bar{I}_u$. Деформации в этом случае были локализованы вблизи приемника, что ослабило их влияние на фильтрационное течение, его расход. Мерой такого влияния может служить параметр $G_Q$, данные расчетов которого представлены на рис. 1. Преобладают близкие к 1 значения $G_Q$, что дает основание считать деформации в заданных условиях плоской безнапорной

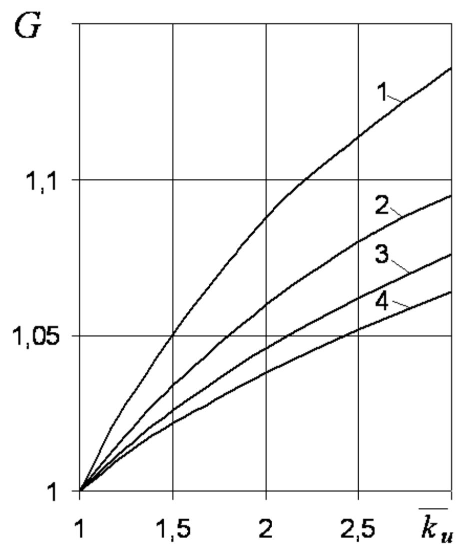


Рис. 1. Графики зависимости $G_Q(\bar{k}_u)$:
*1* – $\bar{I}_u = 2$; *2* – $\bar{I}_u = 3$; *3* – $\bar{I}_u = 4$; *4* – $\bar{I}_u = 5$

фильтрации малосущественными для фильтрационного режима. С ростом $\bar{I}_u$ значимость деформационного фактора убывает. Также выяснилось, что и компонента сопротивления $\bar{\Phi}_c$ – еще один важный интегральный показатель действенности деформаций, оказывается малой величиной (рис. 2). Это связано не только с локализацией деформаций, но и способом нормировки $\Phi_c$. Фактические его значения могут быть довольно большими при значительной протяженности области фильтрации. Отрицательные значения $\Phi_c$ объясняются улучшением условий фильтрации вследствие переориентации частиц.

Наглядное представление о масштабах деформаций дает рис. 3, на котором показано положение внутренних границ в области движения для $\bar{I}_k = 1$ и разных значений $\bar{k}_u$, $\bar{I}_u$. При этом $\bar{k}_u$ является аргументом, а $\bar{I}_u$ принимает два резко отличающихся значения (1 и 5). Установлено, что деформированный грунт занимает лишь небольшую часть области фильтрации. Особенно малую протяженность имеет зона предельной деформации и, например, при $\bar{I}_u = 5$ на нее приходится всего 1% общего объема фильтрующего грунта. Основной же вклад в изменение фильтрационных характеристик связан с повышением проницаемости в зоне частичной деформации. Тем не менее даже в крайнем из рассчитанных случаев ($\bar{k}_u = 3$, $\bar{I}_u = 2$) ее внешняя граница не достигает середины области движения ($L_k = 0.4L$). Но, как следует из предшествующих вычислений (рис. 1, 2), этого

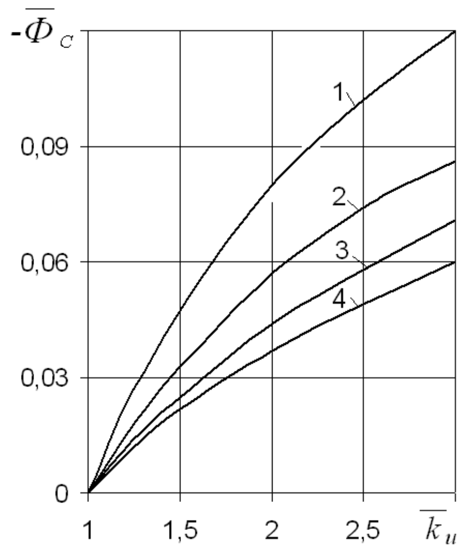


Рис. 2. Графики зависимости $Q(\bar{I}_u)$:
*1* – $\bar{k}_u = 3$; *2* – $\bar{k}_u = 2$; *3* – $\bar{k}_u = 1,5$; *4* – $\bar{k}_u = 1,25$

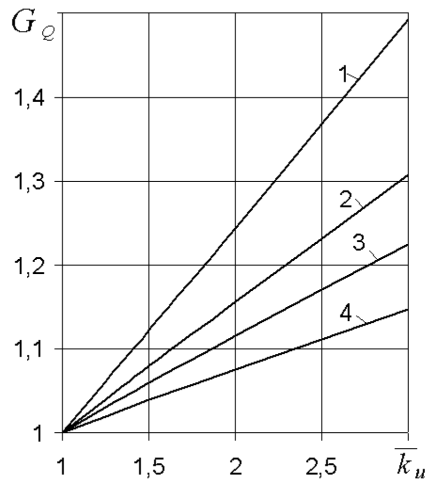


Рис. 4. Графики зависимости $G_Q(\bar{k}_u)$:
*1* – $\bar{I}_u = 2$; *2* – $\bar{I}_u = 3$; *3* – $\bar{I}_u = 4$; *4* – $\bar{I}_u = 5$

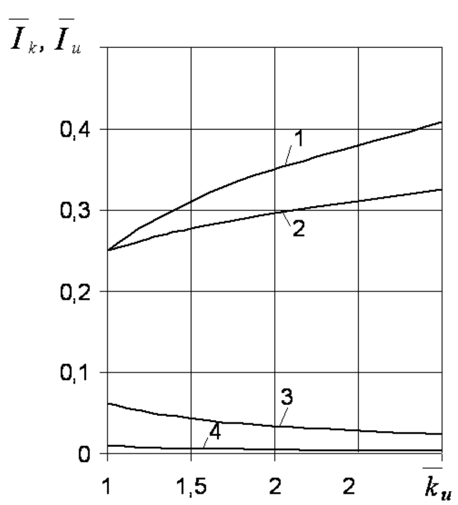


Рис. 3. Графики зависимости $\bar{L}_u(\bar{k}_u)$, $\bar{L}_k(\bar{k}_u)$:
*1, 2* – $\bar{L}_k$; *3, 4* – $\bar{L}_u$; *1, 3* – $\bar{I}_u = 1$; *2, 4* – $\bar{I}_u = 5$

еще недостаточно для серьезного усиления фильтрации. Чтобы деформации происходили вторым способом, были выбраны $\bar{M}_d = 0.25$, $\bar{M}_s = 1.25$, что при $\bar{I}_k = 1$ обеспечило выполнение условия (53), а при $\bar{I}_k = 1$ – и существование третьей зоны. Таким образом, градиент напора на входе в приемник уменьшился настолько, что $I_d$ стало меньше $I_u$ и зона предельной деформации исчезла. Расчеты $G_Q(\bar{k}_u)$, $\bar{\Phi}_c(\bar{k}_u)$, однако, указывают на малое отклонение последних от соответствующих данных, полученных для первого способа деформаций. Поэтому не имеет смысла, по сути, дублирование рисунков. А поскольку эффект деформаций здесь выражен еще слабее, то учитывать деформации в подобных условиях ценой значительного усложнения формализмов нецелесообразно.

Особый интерес для практики представляет третий способ, который реализуется при слабом сцеплении частиц скелета, их неправильной форме и непрочной фиксации в структуре грунта. Тогда вследствие прежде всего малости $I_k$ соблюдается условие (60), что означает распространение деформаций на всю область движения. Параметры $G_Q$, $\bar{\Phi}_c$ снова рассчитывались при $\bar{M}_d = 0$, $\bar{M}_s = 1$, что гарантировало существование зоны предельной деформации, а также $\bar{I}_k = 0.5$, позволившее устранить зону недеформированного грунта. Результаты множества вычислений $G_Q$, $\bar{\Phi}_c$ приведены на рис. 4, 5. Поведение кривых $G_Q(\bar{k}_u)$, $\bar{\Phi}_c(\bar{k}_u)$ на рис. 1, 2 и рис. 4, 5 имеет во многом сходный характер, но величины указанных параметров при разных способах деформаций сильно отличаются. Действительно, они при одних и тех же значениях $\bar{k}_u$ возрастают за счет расширения области деформаций примерно в 3 раза. Подобным образом увеличивается и фильтрационный расход.

Важную роль в фильтрационном процессе играют параметры $\bar{I}_u$, $\bar{I}_k$. В этом несложно убедиться, во-первых, благодаря рис.6, на котором изображены графики зависимости $G_Q$ от $\bar{I}_u$ при различных фиксированных $\bar{k}_u$. Уменьшение $\bar{k}_u$, как видно из рис.6, ведет к такому росту размеров зоны предельной деформации, который может стать при-

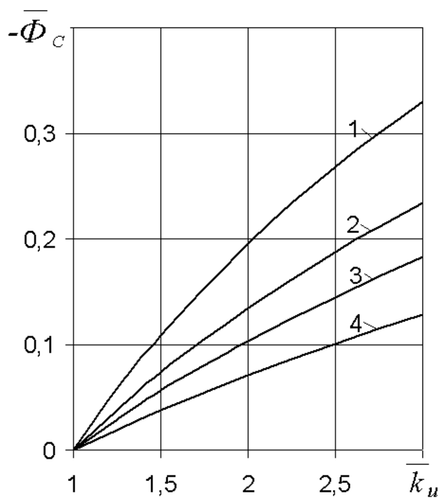


Рис. 5. Графики зависимости $-\Phi_c(\bar{k}_u)$:
*1* – $\bar{I}_u = 2$; *2* – $\bar{I}_u = 3$; *3* – $\bar{I}_u = 4$; *4* – $\bar{I}_u = 6$

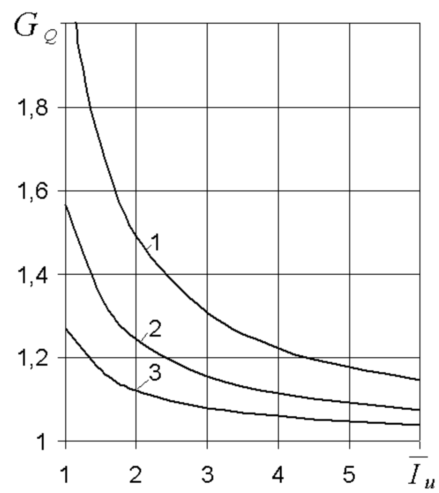


Рис. 6. Графики зависимости $Q(\bar{I}_u)$:
*1* – $\bar{k}_u = 3$; *2* – $\bar{k}_u = 2$; *3* – $\bar{k}_u = 1,5$

чиной значительного увеличения расхода фильтрационного течения $Q$, особенно при $\bar{I}_u < 2$ и большом $\bar{k}_u$. Во-вторых, при сопоставлении результатов расчетов $G_Q$ для первого и третьего способов деформаций очевидно резкое возрастание упомянутого расхода при сокращении $\bar{I}_k$ лишь вдвое.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный количественный анализ показал недопустимость бездоказательного пренебрежения деформациями второго рода в несвязных несуффозионных грунтах. Рост проницаемости таких грунтов под действием интенсивных плоских фильтрационных потоков в отдельных случаях обуславливает возрастание его расхода в полтора раза и более. Вместе с тем, формальный учет этого фактора намного усложняет фильтрационные модели и их теоретическое исследование. Поэтому рекомендуется предварительно оценивать на базе предложенной в данной работе методики значимость подобных деформаций, сообразуясь с конкретными физико-механическими условиями, а при необходимости далее их учитывать, основываясь на концепции и методе фильтрационных сопротивлений.

1. *Кондратьев В.Н.* Фильтрация и механическая суффозия в несвязных грунтах.– Симферополь: Крымиздат, 1958.– 76 с.
2. *Поляков В.Л.* О механической суффозии грунтов под действием цилиндрического стока переменной интенсивности // Прикладна гідромеханіка.– 2006.– 8, N 4.– С. 43–52.
3. *Сидор В.Б.* Порівняльний аналіз значущості суфозійного і фільтраційного процесів при функціонуванні різних типів дренажів // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки.– К.: КНУБА.– 2005. - Вип.5.– С. 120–128.
4. *Ojha C.S.P., Singh V.P., Adrian D.D.* Determination of critical head in soil piping // J. Hydraul. Eng.– 2003.– 129, N 7.– P. 511–518.
5. *Willardson L.S., Walker R.E.* Synthetic drain envelope-soil interaction // J.Irrig. and Drain. Div., ASCE.– 1989.– 115, N 4.– P. 626–641.
6. *Дмитриев А.Ф., Хлапук Н.Н., Дмитриев Д.А.* Деформационные процессы в несвязных грунтах в придренной зоне и их влияние на работу осушительно-увлажнительных систем.– Ровно: Издательство РГТУ, 2002.– 145 с.
7. *Хлапук М.М.* Нові аспекти роботи дренажних конструкцій, виявлені за допомогою фізичного та математичного моделювання // Зб. статей за матеріалами 3-ої наук.-техн. конференції.– 4.2. Гідротехнічне будівництво.– Рівне.– С. 66–69.
8. *Дмитрієв Д.А.* Про вплив градієнта напору на коефіцієнт фільтрації незв'язних грунтів // Вісник Укр. держ. акад. водн. госп-ва. - Рівне: УДАВГ.– 1998.– 4, N 2.– С. 23–27.
9. *Поляков В.Л.* Фильтрационные деформации несвязных несуффозионных грунтов при установившейся одномерной безнапорной фильтрации // Доп. НАН України.– 2009.– № 4.– С. 56–62.
10. *Поляков В.Л., Желизко В.В.* Безнапорная осесимметричная фильтрация к совершенной дрене в несвязном грунте с упорядоченной структурой // Науковий вісник будівництва. - Харків: ХДТУБА, ХОТВ АБУ.– 2008.– Вип. 49.– С. 153–163.
11. *Олейник А.Я.* Геогидродинамика дренажа.– К.: Наукова думка, 1982.– 283 с.
12. *Пивовар Н.Г., Бугай Н.Г., Фридрихсон В.Л., Кривоног А.И., Кривоног В.В.* Дренаж с волокнистыми фильтрами для защиты территорий от подтопления.– К.: НАНУ. Институт гидромеханики, 2000.– 332 с.