

УДК 534.2

## ВПЛИВ УСКЛАДНЕННЯ ВИХРОВОЇ МОДЕЛІ НА ОЦІНКУ ЗВУКОВИХ ПОЛІВ, ЯКІ Є РЕЗУЛЬТАТОМ ВИХРОВОЇ ВЗАЄМОДІЇ

Т. П. Коновалюк

Інститут гідромеханіки НАН України  
вул. Марії Капніст, 8/4, 03057, Київ, Україна  
E-mail: [tpk\\_8\\_4@ukr.net](mailto:tpk_8_4@ukr.net)

Отримано 14.04.2022

У межах моментної MZS-моделі першого та другого порядків виконано оцінки акустичних ефектів, породжених взаємодією кількох когерентних вихрових структур між собою. У MZS-моделі першого порядку вони описуються вихровими точками, а в моделі другого порядку – вихорами Кірхгофа. Звукові поля як результат вихрової взаємодії розраховуються в межах акустичної аналогії Лайтхілла в формулюванні Пауелла. Показано, що їхні характеристики суттєвим чином залежать від порядку моментної моделі, яка описує вихрові структури. Досліджуються лише пружні взаємодії. Це дозволяє виділити в акустичному спектрі смуги, які виникають внаслідок ускладнення моментної моделі. При описі когерентних структур точковими вихорами спектр звукового поля характеризується однією частотною смугою, яка відтворює рух центрів завихреності (великомасштабні вихрові рухи). Урахування внутрішньої динаміки вихорів при переході до еліптичної моделі призводить до розширення спектру. Внаслідок цього зростає рівень розрахованого звукового поля, яке генерується при взаємодії таких вихрових структур. При цьому більш низькочастотна смуга відтворює рух центрів завихреності плям, а високочастотна – внутрішню динаміку завихреності. Показано, що великомасштабні рухи вихрових плям можна моделювати точковими вихорами за тієї умови, що звуковий спектр вихрових плям чітко поділений на смуги, а низькочастотні смуги таких систем мають близьку ширину. Неврахування внутрішньої вихрової динаміки при побудові звукового джерела призводить до суттєво занижених оцінок рівня звукового поля.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** когерентна вихрова структура, MZS-модель, точковий вихор, вихор Кірхгофа, акустична аналогія Лайтхілла, флуктуації звукового тиску, амплітудно-частотний спектр

## 1. ВСТУП

Дослідження шумів, що генеруються течією, мають самостійний науковий інтерес; отримані результати застосовуються в багатьох інженерних областях. В обчислювальній аероакустиці (CAA – computer aeroacoustics), яка отримала свій розвиток на початку 1990-х років, існують два основних напрямки [1, 2]:

- чисельний розрахунок системи рівнянь Нав'є–Стокса, що описує повну течію рідини (comprehensive CAA);
- гібридний чисельний підхід (hybrid CAA), в якому сама течія обчислюється чисельно чи описується в межах вихрової моделі, при цьому дальнє звукове поле розраховується методом акустичної аналогії чи методом зрощуваних асимптотичних розкладань (ЗАР).

Гібридні підходи об'єднують чисельні схеми та моделі різних рівней складності (наприклад, [3, 4]). Точність розрахунків звукового поля суттєвим чином залежить від ступеню наближеності вихрової моделі до реальної течії. Гібридні підходи застосовують при малих та помірних числах Маха ( $M < 1$ ), коли є слушною умова щодо невзаємодії вихрової течії та звуку, що нею породжується.

Серед усіх вихрових структур течії найбільш ефективно перетворюють енергію своєї взаємодії в енергію звукових хвиль когерентні вихрові структури [5]. Когерентна вихрова структура є зв'язаною великомасштабною масою рідини, завихреність всередині якої є скорельованою щодо фази по всій її просторовій протяжності. Час існування такої структури є великим в порівнянні з періодом її обертання. Такі структури можуть існувати в течії як ізольовано (наприклад, спіральний вихор), так і поряд з іншими схожими структурами (наприклад, завитки, кільця, плями та інше). Згідно з організацією когерентної вихрової структури [5], звуковий спектр від вихрової течії, що сформована навіть декількома когерентними вихровими структурами, є розподіленим вздовж певної частотної смуги: більш низькі частоти спектру відповідають великомасштабним вихровим рухам (рухи центрів завихреності плям), більш високі частоти обумовлені внутрішньою вихровою динамікою.

Низка модельних підходів була запропонована щодо опису динаміки когерентних вихрових структур [6–8], наприклад, вихрові методи, зокрема, метод контурної динаміки [9] та інше. У вихрових методах когерентні плями завихреності моделюються низкою вихрових елементів з недеформовним (точкові вихори, вихори Ренкіна (Rankine, 1858 р.)) (див. посилання в [8, 10]) або деформовним вихровим ядром [7] (вихори Кірхгофа (Kirchhoff, 1876 р.), вихори з гауссівським розподіленням завихреності [4] і таке інше).

Концепція точкових вихорів, яка є класичною в механіці двовимірної нестисливої рідини, була запропонована Гельмгольцем (H. Helmholtz) в 1858 р. (див. посилання в [11]). До переваг такого підходу треба віднести алгоритмічну простоту, ефективність подання, можливість в низьці випадків використовувати аналітичний опис. Модель точкових вихорів застосовується при моделюванні широкого класу нестисливих зсувних течій, а саме: нев'язких двовимірних сконцентрованих вихрових структур; при дослідженні лінійної та нелінійної стійкості та в задачах адвекції [12–18]; при дослідженні динамічних систем [19]. Професор В. В. Мелешко в своїх працях актуалізував використання такої

класичної моделі при описі вихрових течій. Зокрема, в роботах [20, 21] було запропоновано моделювати дипольні вихрові структури Лемба (Lamb), які спостерігаються в експериментах, за допомогою точкових вихрових пар разом із областями потенційної рідини – «атмосферами», що супроводжують пари. Незважаючи на певну схематичність, модель точкових вихорів відтворює такі властивості реальних вихрових структур, як злиття вихорів [22–24] та хаотизація [13, 24]. Можливість опису злиття вихорів в межах такої моделі особливо важлива, оскільки цей процес є основним при формуванні нових масштабів в течії. Численна бібліографія щодо дослідження точкових вихорів міститься, наприклад, в [13, 25]. Моделювання реальних вихорів сингулярними точковими вихорами добре відтворює великомасштабні рухи (рухи центрів завихреності вихорів), проте достатньо грубо описуються напруження в течії внаслідок неврахування внутрішньої динаміки реальних вихрових структур [12].

Меландер, Забускі, Стишек запропонували описувати вихрову взаємодію за допомогою моментної моделі, відомої як MZS-модель (M. V. Melander, N. J. Zabuzky, A. S. Styczek, 1986 р.) [7]. В такій моделі вихрова пляма постійної завихреності в ідеальній рідині цілком визначається еволюцією свого центру завихреності та моментів інерції площі поперечного перерізу. Моментні моделі широко застосовуються, зокрема, при побудові математичних моделей для прогнозування клімату [26]. Моментні моделі займають проміжне місце між моделями з інваріантним ядром (модель точкових вихорів та модель с недеформівним вихровим ядром) та методом контурної динаміки. В моментних моделях нехтують ефектом дифузії, що є коректним спрощенням при розгляді певного класу течій з великими числами Рейнольдса та дозволяє описувати вихори локалізованими плямами завихреності.

В основу загальної моментної моделі покладено два основні припущення (мають виконуватися протягом всієї вихрової взаємодії):

- максимальний розмір будь-якої плями є набагато меншим за мінімальну з відстаней між центрами будь-яких двох плям;
- центр завихреності будь-якої плями завжди знаходиться всередині неї.

Такі припущення обмежують можливості моментної моделі, а саме: модель описує вихрові взаємодії, за яких вихори не зливаються та не обмінюються завихреністю, тобто, лише пружні вихрові взаємодії; в випадку непружних взаємодій загальна моментна модель має рацію лише на початкових етапах взаємодії.

При усіканні MZS-моделі до моменту інерції площі поперечного перерізу вихора певного порядку отримуємо моментну модель вихрової взаємодії такого порядку. Авторами [7] була розвинена моментна модель вихрової взаємодії другого порядку: вихрові взаємодії описуються вихорами Кірхгофа – вихровими еліпсами. Відзначимо, що модель точкових вихорів є першим наближенням загальної моментної моделі. Моментна вихрова модель отримала свій розвиток, зокрема, в роботах Дрітчела й Леграса (D. Dritschel, V. Legras 1991 р.) [27, 28] та Хірша (H. Hirsh et al, 1995 р.) [29].

Початок теоретичних досліджень акустичних хвиль, що генеруються течією, ймовірно, треба віднести до появи теорії повітряного гвинта Л. Я. Гутіна (1936 р.) [30, 31]. Акустична аналогія Дж. Лайтхілла (M. J. Lighthill, 1952, 1954 pp.) [32, 33], створення якої

було простимульоване бурхливим розвитком реактивної авіації, стала одним з основних поштовхів до послідовного розвитку теорії гідродинамічного шуму. Така теорія – перша та найбільш плідна акустична аналогія, що описує генерацію звука нев'язкою течією за умови малих та помірних чисел Маха ( $M < 1$ ) та відсутності будь-яких меж. Основні положення теорії Лайтхілла отримали свій розвиток в роботах багатьох вчених (наприклад, Філіпс (O. M. Phillips), Рібнер (H. S. Ribner), Пауелл (A. Powell), Холл (L. H. Hall), Хау (M. S. Howe), Ліллі (G. M. Lilley), Л. М. Лямшев та ін.). В цих роботах були враховані важливі фізичні процеси, які відповідають за звукоутворення в течіях, в тому числі і вплив твердих границь (Керл (N. Curle), Фокс Вільямс (J. E. Ffowcs Williams), Хоукінгс (D. L. Hawkings)). Аналіз найбільш відомих акустичних аналогій можна знайти, наприклад, в [34].

Завдяки прагненням низки авторів, зокрема, Кроу (S. C. Crow, 1970 р.) [35], Крайттона (D. G. Crighton, 1975 р.) [36], Мьорінга (W. Möhring, 1978 р.) [37], Обермеєра (F. Obermeier, 1979 р.) [38], формалізувати теорію гідродинамічного шуму для  $M \ll 1$ , при розв'язанні задач такого класу почав застосовуватися підхід, що базується на методі зрощуваних асимптотичних розкладань (ЗАР). При такому підході течія рідини та звукове поле, що генерується нею, розглядаються як дві окремих, але таких, що перетинаються, частини повної течії стисливого середовища. Таке представлення поля течії за умови малих чисел Маха відповідає фізичним процесам, які відбуваються при генерації звука гідродинамічним потоком. В [35] були досліджені особливості методу ЗАР щодо задач про генерацію звуку течіями; була показана слушність апроксимації члена джерела в акустичній аналогії Лайтхілла в наближенні малих чисел Маха: це означає, що при малих числах Маха метод ЗАР та акустична аналогія Лайтхілла дають однакову оцінку потужності звукового поля, що розраховується; також були відзначені складності, що пов'язані із застосуванням методу ЗАР при розв'язанні задач такого класу.

В статті розглядається питання щодо фізично обґрунтованих змін в структурі звукового поля, що є результатом вихрової взаємодії, при ускладненні вихрової моделі від точкових вихорів до вихорів Кірхгофа. А саме: оцінюється вплив внутрішньої вихрової динаміки в межах MZS-моделі другого порядку на розрахункові характеристики звукового поля, що генерується когерентними вихорами. Коректність апроксимації великомасштабних вихрових рухів точковими вихорами розглядається за допомогою звукових спектрів вихрових систем. Аналізується правомірність використання точкової моделі при описі звукового джерела, що формується при вихровій взаємодії. Вихорову взаємодію будемо описувати в межах MZS-моделі першого та другого порядків; звукове поле будемо моделювати за допомогою акустичної аналогії Лайтхілла в формулюванні Пауелла. Нас будуть цікавити взаємодії кількох вихрових структур. Розгляд елементарних актів вихрової взаємодії дозволить пов'язати особливості звукових полів, що генеруються, з характеристиками такої взаємодії.

## 2. МОДЕЛІ ОПИСУ ВИХРОВОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТА ГЕНЕРАЦІЇ ЗВУКУ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

При описі вихрової взаємодії розглядається двовимірна безвихрова течія нестисливої баротропної рідини однородної густини. Рідина є необмеженою, нерухомою на нескінченності.  $N$  двовимірних вихрових областей (плям), що взаємодіють між собою, з

однорідно розподіленою сталою завихреністю всередині кожної з них, уміщені в таку течію. Основні параметри моделі зображено на Рис. 1.  $S_k$ ,  $\omega_k$ ,  $\Gamma_k = \omega_k S_k$ ,  $\vec{x}_k = (x_k, y_k)$  – площа, завихреність, інтенсивність та координати центру завихреності плями з номером  $k$  ( $k = 1, \dots, N$ ), відповідно.

Згідно з MZS-моделлю  $(m + n)$ -го порядку [7] поведінку області завихреності  $D_k$  під час її взаємодії з іншими вихровими областями можна описати еволюцією у часі її центру завихреності  $\vec{x}_k$  та еволюцією моментів інерції площі її перерізу  $J_k^{(m,n)}$  включно до порядку  $(m + n)$ .  $(\xi_k, \eta_k)$  – локальна рухома система координат, яка пов'язана з центром завихреності вихора з номером  $k$  (Рис. 1):

$$S_k \vec{x}_k = \int_{D_k} \vec{x} d\sigma; \quad J_k^{(m,n)} = \int_{D_k} \xi_k^m \eta_k^n d\sigma, \quad (1)$$

де інтегрування ведеться по всій площі  $k$ -ої плями.

В двовимірній ідеальній баротропній рідині, що є нерухомою на нескінченності, виконуються закони збереження циркуляції, імпульсу, моменту імпульсу та частини кінетичної енергії, яка пов'язана з розподілом завихреності в середовищі [39]. Згідно з визначенням моменту інерції площі перерізу (1), MZS-модель в нульовому наближенні дозволяє розрахувати площі плям, які є незмінними (за умови  $\omega_k = \text{const}$ ) під час їхньої еволюції. MZS-модель в першому наближенні є моделлю точкових вихорів [39]. В межах точкової моделі будь-який вихор має дві ступені вільності (координати його центру завихреності). Динаміка такої системи описується гамільтоновою системою другого порядку [39]:

$$\Gamma_k \dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}; \quad \Gamma_k \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad (2)$$

з незалежним безпосередньо від часу гамільтоніаном, що являє собою закон збереження енергії:

$$H = -\frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^N \sum_{\beta=1}^N \Gamma_k \Gamma_\beta \ln R_{k\beta}^2, \quad (3)$$

та відповідними початковими умовами;  $R_{k\beta}^2 = (x_k - x_\beta)^2 + (y_k - y_\beta)^2$  (Рис. 1). Інші інтегральні інваріанти завихреності, які відзеркалюють закони збереження, в моделі точкових вихорів мають вигляд:

$$(P, Q) = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \vec{x}_k; \quad I = \sum_{k=1}^N \Gamma_k [x_k^2 + y_k^2],$$

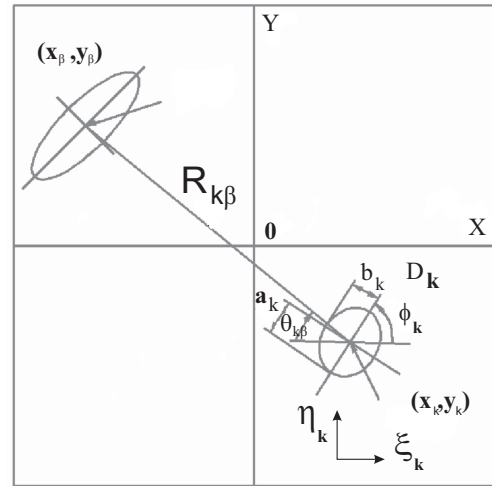


Рис. 1. Основні параметри, що описують взаємодію вихрових плям в межах MZS-моделі другого порядку

$(P, Q)$  – імпульс вихрової системи;  $I$  – момент імпульсу. Симплектичні змінні щодо системи (2) –  $(\Gamma^{1/2}x, \Gamma^{1/2}y)$  [19]. Поле завихреності такої течії  $\Omega_p$  описується граткою  $\delta$ -функцій Дірака:

$$\Omega_p = \vec{k} \sum_{\beta=1}^N \Gamma_{\beta} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\beta}),$$

де  $\vec{k}$  – одиничний вектор осі, що є перпендикулярною до площини течії. Еквівалентну систему точкових вихорів щодо системи вихрових плям визначимо як систему точкових вихорів, що розміщені в центри завихреності вихрових плям, з інтенсивностями, які дорівнюють інтенсивностям плям. Зазначимо, що система точкових вихорів у відсутності меж є інтегрованою, якщо кількість вихорів не перевищує три [19, 40].

MZS-модель другого порядку описує будь-яку пляму однорідної завихреності вихором Кірхгофа, який є збурений наявністю інших вихорів. Збурення не змінює формулу кривої, що обмежує вихрову пляму (еліпс), проте призводить до зміни ексцентриситету та обертання еліпсу. Відомо, еліпс цілком визначається координатами його центру ваги (завихреності), відношенням півосей  $\lambda = a/b$  та кутом нахилу  $\phi$  однієї з його осей до координатних осей (Рис. 1). Пляма завихреності в межах такого наближення MZS-моделі має чотири ступені вільності: дві координати центру завихреності; відношення півосей еліпса та його кут нахилу до координатних осей (внутрішні ступені вільності).

В наближенні MZS-моделі другого порядку взаємодія вихрових плям описується гамільтоновою системою рівнянь четвертого порядку [7]:

$$\begin{aligned} \Gamma_k \dot{x}_k &= \frac{\partial H}{\partial y_k}; & \Gamma_k \dot{y}_k &= -\frac{\partial H}{\partial x_k}; \\ \frac{\Gamma_k S_k}{8\pi} \frac{\lambda_k^2 - 1}{\lambda_k^2} \dot{\lambda}_k &= \frac{\partial H}{\partial \phi_k}; & \frac{\Gamma_k S_k}{8\pi} \frac{\lambda_k^2 - 1}{\lambda_k^2} \dot{\phi}_k &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda_k}, \end{aligned} \quad (4)$$

з відповідними початковими умовами, де  $H$  – гамільтоніан системи [7]:

$$H = H_* + H_p + H_e, \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} H_* &= -\sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\Gamma_k^2}{8\pi} \ln \left( \frac{(1 + \lambda_k)^2}{4\lambda_k} \right) - \frac{\Gamma_k^2}{16\pi} \right\}; \\ H_p &= -\sum_{k,\beta=1}^N \frac{\Gamma_k \Gamma_{\beta}}{8\pi} \ln R_{k\beta}; \\ H_e &= -\sum_{k,\beta=1}^N \frac{\Gamma_k \Gamma_{\beta}}{32\pi^2 R_{k\beta}^2} \left[ S_{\beta} \frac{1 - \lambda_{\beta}^2}{\lambda_{\beta}} \cos 2(\theta_{k\beta} - \phi_{\beta}) + S_k \frac{1 - \lambda_k^2}{\lambda_k} \cos 2(\theta_{k\beta} - \phi_k) \right], \end{aligned}$$

$H_*$  – сума внутрішніх енергій всіх еліптичних вихорів;  $H_p$  – сумарна енергія, що обумовлена взаємодією центрів завихреності всіх плям (аналогічна енергії взаємодії системи точкових вихорів [39]);  $H_e$  – поправка щодо енергії взаємодії, яка пов'язана з еліптичністю плям;  $\vec{x}_k - \vec{x}_{\beta} = R_{k\beta}(\cos \theta_{k\beta}, \sin \theta_{k\beta})$  (Рис. 1). Інші інтегральні інваріанти, що



відзеркалюють закони збереження, в межах такої моделі мають вигляд:

$$(P, Q) = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \vec{x}_k; \quad I = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \left[ x_k^2 + y_k^2 + \frac{S_k}{4\pi} \frac{1 + \lambda_k^2}{\lambda_k} \right], \quad (6)$$

$(P, Q)$  – імпульс вихрової системи;  $I$  – момент імпульсу. Відзначимо, що симплектичні змінні для перших двох рівнянь системи (4) –  $(\Gamma^{1/2}x, \Gamma^{1/2}y)$ ; для двох інших рівнянь системи симплектичні змінні –  $([(\Gamma S)/(8\pi)][(\lambda - 1)^2/\lambda], \phi)$  [19].

Поле завихреності течії  $\Omega_{el}$  в межах такої моделі описується ґраткою функцій Хевісайда:

$$\Omega_{el} = \vec{k} \sum_{\beta=1}^N \omega_{\beta} H(1 - F_{\beta}(x, y)),$$

де  $F_{\beta}(x, y) - 1 < 0$  – область всередині еліпса, що обертається, з номером  $\beta$ ;  $\vec{k}$  – одиничний вектор осі, що є перпендикулярною до площини течії. Відзначимо, що система вихрових плям в межах MZS-моделі другого порядку за відсутності меж є неінтегрованою, якщо число вихорів дорівнює або більше двох.

Математична постановка гідродинамічної задачі полягає в розв'язанні систем звичайних диференціальних рівнянь (2), (3) та (4), (5) з відповідними початковими умовами.

Дж. Лайтхілл (1952 р.) [32] отримав неоднорідне хвильове рівняння, яке є поданням його акустичної аналогії, шляхом сумісного перетворення рівняння нерозривності, рівняння динаміки середовища «в напруженнях», рівняння стану за умови відсутності джерел маси та зовнішніх об'ємних сил. Лайтхілл зробив фізично вірогідні припущення щодо течії та апроксимував праву («джерельну») частину свого рівняння таким чином, що в ній лишилися члени, які відповідають за формування звукового поля. Лайтхілл відзначив, що далеко від границь турбулентна течія є еквівалентною розподілу акустичних квадруполів, які розташовані в однорідному нерухомому стисливому середовищі. Структура правої частини рівняння Лайтхілла явним чином не вказує на вихрову природу турбулентного шуму. Явний вигляд такого зв'язку вперше отримав Пауелл (A. Powell, 1964 р.) [41]:

$$\vec{\nabla}^2 p' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -\rho_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{v}), \quad (7)$$

$p' = p - p_0$  – флуктуації звукового тиску ( $p_0$  – тиск стаціонарного навколишнього середовища);  $\vec{v}(v_i)$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) – поле швидкості течії (без врахування акустичної складової швидкості);  $c_0$  – швидкість звуку в дальньому полі (стала величина);  $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$  – поле завихреності течії;  $dp = c_0^2 dp'$ . Формально джерела в рівнянні Пауелла (7) мають вигляд диполів. Проте аналіз рішення рівняння (7) для вільного простору розкриває їхню квадрупольну природу. Рішення рівняння (7) повинно задовольняти умові випромінювання Зоммерфельда та початковим умовам. Це математична постановка акустичної задачі.

За своєю геометрією задача, що розглядається, є двовимірною. Для спрощення перетворень записуємо рішення для загального, тривимірного, випадку. Шукані величини розраховуються на одиницю висоти вихрових трубок. Перетворення рішення в дальньому полі виконуємо із врахуванням припущення щодо компактності джерела в площині

перерізів вихрових шнурів [42]. В безрозмірному вигляді рішення (7) має вигляд:

$$p'(\vec{x}, t) = -M^2 \int_0^{t-\rho} \frac{x_1^2 W_1(\tau) + x_2^2 W_2(\tau) + x_1 x_2 W_3(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \rho^2}} \frac{d\tau}{(t-\tau)^2}, \quad (8)$$

де  $W_i(\tau)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – функції ступенів вільності вихорів та їхніх похідних за часом;  $\tau$  – момент часу, що стосується джерела звуку;  $t$  – момент часу, що стосується точки спостереження;  $\vec{x} = \rho(\cos \theta, \sin \theta)$ ;  $\rho = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ ;  $M = U/c_0$  – число Маха;  $U$  – характерна швидкість вихрової течії. Аналіз рішення (8) показує, що звукове поле визначається похідними за часом від моментів завихреності течії. Такі моменти можуть бути подані в вигляді двох складових: одна з них обумовлена рухом центрів завихреності плям (великомасштабні вихрові рухи); друга складова пов'язана з обертанням та деформацією ядер завихреності (внутрішня динаміка плям). Таке розділення достатньо умовне, оскільки обидві складові взаємопов'язані, як впливає з (4).

Компактність джерела в площині  $(x_1 x_2)$  означає, що найбільший лінійний розмір контуру  $L$ , що охоплює напрямні всіх вихорів, набагато менший за характерну довжину звукової хвилі  $\lambda$ , що випромінюється. Умова компактності безпосередньо впливає з умови малого числа Маха. Фактично, з умови компактності впливає, що джерело звуку є точковим джерелом та розташоване на початку системи координат  $(x_1 x_2)$ .

Масштаби щодо обезрозмірювання гідродинамічних та акустичних величин такі: характерна інтенсивність вихорів –  $\Gamma$ ; характерний лінійний масштаб в області вихрового руху –  $B$ ; характерний час –  $B^2/\Gamma$  (при малих числах Маха однаковий в області вихрової течії та області випромінювання); характерна швидкість в області вихрового руху –  $U = \Gamma/B$ ; характерний лінійний масштаб в області випромінювання –  $\lambda = Bc_0/U = BM^{-1}$  (характерна довжина звукової хвилі); характерна швидкість в області випромінювання –  $c_0$ ; характерна величина флуктуацій звукового тиску –  $\rho_0 U^2/(2\pi)$ ; масштаб густини –  $\rho_0$ ; масштаб кінетичної енергії на одиницю висоти –  $\rho_0 U^2 B^2$ ; масштаб звукової енергії на одиницю висоти –  $\rho_0 U^2 \lambda B$ .

### 3. ЗВУКОВІ ПОЛЯ ВІД КІЛЬКОХ КОГЕРЕНТНИХ ВИХРОВИХ СТРУКТУР

На прикладах декількох когерентних вихрових структур з'ясуємо, яким чином координується розрахункове звукове поле від взаємодії вихорів при ускладненні вихрової моделі.

Поодинокий вихор Кірхгофа у відсутності границь випромінює звук на частоті, що дорівнює його подвоєній кутовій швидкості обертання відносно свого центру завихреності, який є нерухомим. Відзначимо, що вихровий еліпс з малим ексцентриситетом випромінює на частоті, що дорівнює половині завихреності плями [43]. Звукове полі від такої структури є результатом внутрішньої вихрової динаміки. Точковий аналог моделює відсутність руху центру завихреності вихора Кірхгофа, проте точковий вихор не випромінює звук, оскільки не рухається та не володіє внутрішніми ступенями вільності. Таким чином, нехтування внутрішніми ступенями вільності при моделюванні поодинокій вихрової плями веде до відсутності випромінювання.

Елементарна течія, що утворена двома плямами завихреності, є фундаментальною з точки зору формування нових масштабів та зростання зсувного шару (див., наприклад,



посилання в [12]). У роботах [44, 45] розглянуто взаємодію та звукове поле від двох вихорів Ренкіна (Rankine, круговий вихор є виродженим вихором Кірхгофа) різних розмірів. Було з'ясовано таке:

- використання MZS-моделі другого порядку в порівнянні з MZS-моделлю першого порядку призводить до суттєвого зростання звуку, що випромінюється;
- апроксимація великомасштабних рухів вихорів Кірхгофа еквівалентною системою точкових вихорів є коректною (в тому сенсі, що вихрові точки відтворюють такий рух), коли основна енергоємна частота нижньої частини звукового спектру плям та частота випромінювання двох точкових вихорів близькі за значеннями;
- при описі звукового джерела моделювання розподілених вихорів точковими аналогами суттєвим чином занижує розрахункове звукове поле.

Детально розглянемо звукове поле від взаємодії трьох вихрових плям щодо задачі, яка розглядається. В загальних рисах такі результати були подані в [46]. Дослідимо пружні взаємодії та звукові поля трьох вихрових плям, поведінка центрів завихреності яких відповідає таким типам взаємодії трьох точкових вихорів [40, 47]: пряма взаємодія, обмінна взаємодія та взаємне захоплення. Інтенсивності плям дорівнюють  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -\Gamma_3 = \Gamma$ . Оскільки за певних співвідношень між міжцентровими відстанями та розмірами плям характер великомасштабних рухів та характер поведінки еквівалентної системи вихрових точок можуть відрізнятися одне від одного, то розміри плям обиралися таким чином, щоб тип взаємодії центрів завихреності плям відповідав типу взаємодії еквівалентної системи точкових вихорів. Це дозволить зрозуміти, як змінюється розрахункове звукове поле при врахуванні внутрішніх ступенів вільності вихрових плям, що взаємодіють між собою, тобто при ускладненні вихрової моделі. Початкові конфігурації та форма вихорів подані на Рис. 2. В якості початкової вихрової пари 1,3 при прямій та обмінній взаємодіях розглядалися рухливі EV-стани (translating EV-states) [7]. Вихор 2 моделювався або вихором Ренкіна (сценарій а на Рис. 2), або таким самим EV-вихором (сценарій б на Рис. 2). У випадку дослідження взаємного захоплення всі вихори вважалися EV-вихорами (сценарій в на Рис. 2).

Рухливі EV-стани (аналог в MZS-моделі другого порядку рухливих V-станів (translating V-states [48])) – два однакових вихора Кірхгофа протилежної завихреності, центри яких рухаються рівномірно та прямолінійно, форма та орієнтація вихорів на площині сталі:  $\lambda_{1,2} = 0$ ,  $\phi_{1,2} = \theta_{1,2} = 0$ . Рухливі EV-стани подібні до точкової вихрової пари щодо кінематики та акустики (звукове поле дорівнює нулю).

В. Грьоблі (W. Gröbli, 1877 р.) в своїй дисертаційній роботі [40] довів інтегрованість системи трьох точкових вихорів з довільними інтенсивностями у відсутності границь. Було отримано, що три точкових вихора з інтенсивностями  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -\Gamma_3 = \Gamma$  в залежності від початкових умов демонструють три типи взаємодії:

- пряма взаємодія – набіжна вихрова пара «відбивається» від поодинокого вихора, при цьому зберігає свою цілісність; така взаємодія подається формулою:  $13 + 2 \rightarrow 13 + 2$ ;

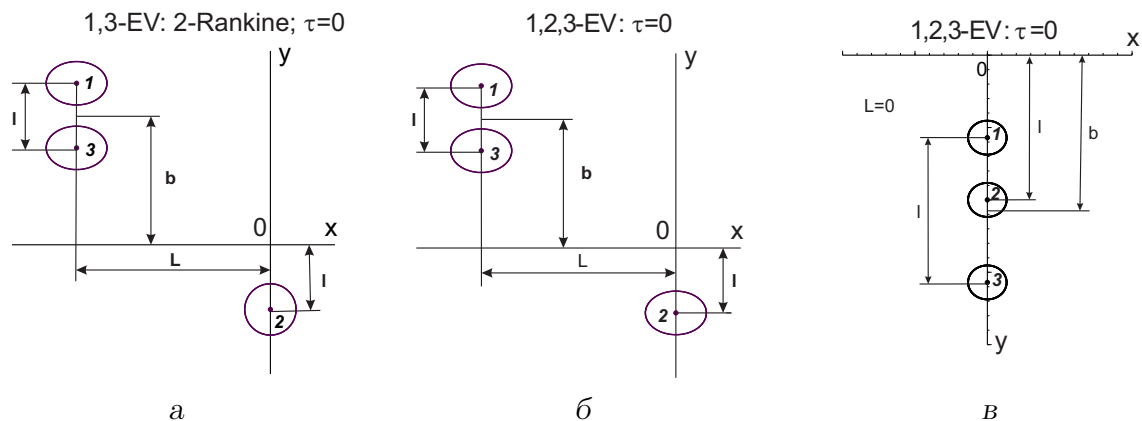


Рис. 2. Початкова конфігурація вихорів Кірхгофа:

- а – при прямій та обмінній взаємодії: 1, 3 – EV-вихори, 2 – вихор Ренкіна (сценарій а);  
 б – при прямій та обмінній взаємодії: 1, 2, 3 – EV-вихори (сценарій б);  
 в – при взаємному захопленні: 1, 2, 3 – EV-вихори (сценарій в)

- обмінна взаємодія – вихрова пара, що набігає на поодинокий вихор, обмінює один зі своїх вихорів на поодинокий вихор; така взаємодія описується формулою:  $13 + 2 \rightarrow 1 + 23$ ;
- взаємне захоплення – вихори обертаються відносно центру завихреності системи: вихори однакового знаку ( $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ ) «петляють» один навколо іншого, третій вихор з  $\Gamma_3 = -\Gamma$  обертається на певній відстані від перших двох вихорів по траєкторії, наближеної до кругової [40, 47]. В [49–52] детально досліджені звукові поля, що генеруються такою системою вихрових точок.

На Рис. 2 наведені початкові конфігурації систем розподілених вихорів, що розглядаються: для випадків прямої та обмінної взаємодії початкові геометричні параметри мають такі значення:  $L = 20$ ,  $l = 1$ ,  $-10 \leq b \leq 10$ ; при взаємному захопленні:  $L = 0$ ,  $l = 1$ ,  $-1.5 < b < -1.0$ .

Для випадків прямої та обмінної взаємодії введемо поняття області ефективної вихрової взаємодії для великомасштабних вихрових рухів (схематично зображена на Рис. 3а). Просторовий розмір області для еквівалентної системи точкових вихорів визначимо таким чином: на її межі рівень звукового тиску на 20 дБ (у 10 разів) нижчий за його максимальне значення. Часовий інтервал ефективної вихрової взаємодії  $T_{ef}$  – це проміжок часу, протягом якого вихори перебувають в цій області (Рис. 3б).  $T_{ef}$  визначає характерну частоту сигналу, що випромінюється  $\omega_{ef} = 2\pi/T_{ef}$  (Рис. 3в). В випадку плям значення  $T_{ef}$  стосується осередненого звукового тиску,  $\omega_{ef} = 2\pi/T_{ef}$  – характерна частота низькочастотної області.

Чисельні розрахунки показали, що пряма та обмінна взаємодії ідентичні щодо звукових джерел, які формуються: рівні генерованих звукових полів мають однаковий порядок, більша частина звукової енергії, яка спричинена великомасштабними вихровими рухами, випромінюється протягом скінченного проміжка часу  $T_{ef}$ . Детально зупинимося на результатах щодо обмінної взаємодії, наприклад, Відзначимо, на рисунках з траєкторіями центрів завихреності вихрові плями не нанесені. Траєкторії центрів зави-

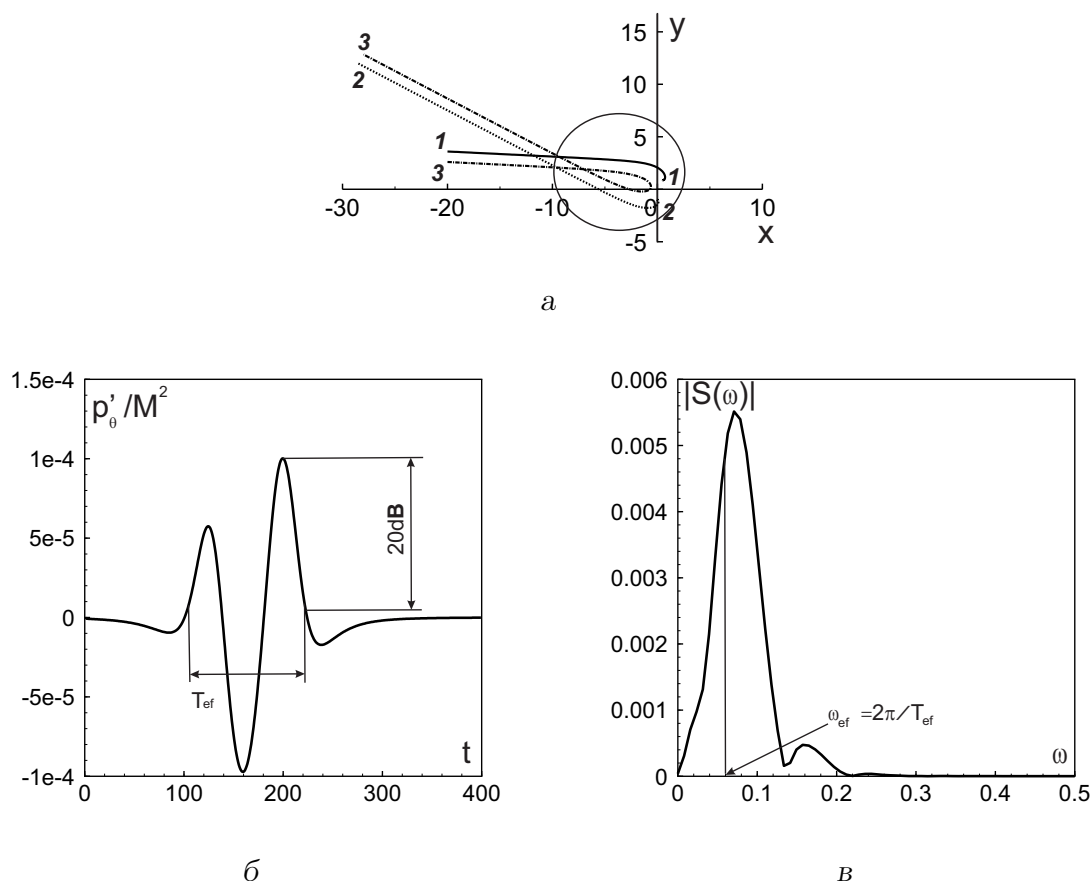


Рис. 3. Область ефективної вихрової взаємодії для великомасштабних вихрових рухів:  
 а – траєкторії еквівалентної системи точкових вихорів при обмінній взаємодії ( $L = 20$ ,  $l = 1$ ,  $b = 3.1$ );  
 б – часова залежність флуктуацій тиску в точці спостереження  $p'_\theta$  ( $\theta = 0^\circ$ );  
 в – амплітудний спектр сигналу б

хреності плям позначені лініями: 1 – суцільними лініями, 2 – пунктирними, 3 – штрихпунктирними. Початкові параметри великомасштабного руху обмінних взаємодій, що розглядається:  $b = 3$ ,  $L = 20$ ,  $l = 1$ . Відзначимо, що для обраних співвідношень між міжцентровими відстанями та розмірами вихорів траєкторії центрів завихреності плям щодо сценаріїв а та б (Рис. 2) співпадають з графічною точністю (Рис. 4а). На Рис. 4а схематично позначена область ефективної вихрової взаємодії для великомасштабних вихрових рухів в такому випадку.

Розглянемо сценарій а (Рис. 2). Початкові значення внутрішніх ступенів вільності такі:  $\lambda_{1,3}^{(0)} = 1.4$ ,  $\lambda_2^{(0)} = 1$ ,  $S_i = 0.495$ ,  $|\omega_{el}| = 2.018$  (завихреність еліпсів),  $\phi_i^{(0)} = 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$ . Під час обміну вихрової пари 1,3 з вихором 2 відношення півосей вихора 1, що гальмується,  $\lambda_1 \rightarrow 1$ ;  $\lambda_3$ , досягнувши свого мінімального значення, прямує до певної const; до того ж значення прямує і  $\lambda_2$ .  $\lambda_{1,3}$  осцилюють на початковому етапі взаємодії вихорів,  $\lambda_{2,3}$  осцилюють на кінцевому етапі взаємодії з близькими частотами (Рис. 4б). Кутова координата вихора 2 спочатку осцилює із спадною амплитудою, вихори 2 та 3 розвертаються на площині таким чином, щоб у відбитій вихровій парі 2,3 вихори мали однакові кути нахилу з невеликими осциляціями (Рис. 4в). Вихор 1 на початковому

етапі взаємодії повертається у напрямку, що є протилежним знаку своєї завихреності, потім цей вихор з ексцентриситетом  $\rightarrow 0$  (трохи збурений вихор Ренкіна) обертається згідно знаку своєї завихреності (Рис. 4в). На відміну від набіжної вихрової пари 1,3 відбита вихрова пара 2,3 не є EV-станом.

Звуковий сигнал в точці спостереження осцилює відносно свого середнього значення, що є наближеним до звукового імпульсу від еквівалентної системи точкових вихорів (Рис. 5а). Спектр сигналу (Рис. 5б) чітко поділений на дві смуги: характерна частота низькочастотної області визначається інтервалом ефективної вихрової взаємодії для великомасштабних вихрових рухів, найбільш енергоємною частотою низькочастотної області є  $\omega = 0.079$  ( $|S(\omega)| = 3.96 \cdot 10^{-3}$ ); високочастотна смуга є околom частоти  $|\omega_{el}|/2 \approx 1$ . В високочастотній смузі виділимо 2 частоти:

- $\omega = 0.896$  ( $|S(\omega)| = 2.86 \cdot 10^{-3}$ ) відповідає осциляціям  $\lambda_{1,3}$  до та осциляціям  $\lambda_{2,3}$  після області ефективної вихрової взаємодії (Рис. 4б);
- $\omega = 1.006$  ( $|S(\omega)| = 4.92 \cdot 10^{-3}$ ) є подвоєною частотою обертання вихора 1 після області ефективної вихрової взаємодії; це найбільш енергоємна частота високочастотної області.

Відзначимо, що осциляції кутів вихорів у відбитій вихровій парі 2,3 не роблять суттєвий внесок в звукове поле. Після області ефективної вихрової взаємодії звуковий сигнал (Рис. 5а) формується двома коливаннями близьких частот: коливанням з частотою, що дорівнює подвоєній кутовій швидкості обертання вихора 1, та осциляціями  $\lambda_{2,3}(\tau)$ . Ваги найбільш енергоємних частот високочастотної та низькочастотної частин спектру наближені одна до одної (Рис. 5б). Відзначимо, що вага найбільш енергоємної частоти низькочастотної частини спектру, що зумовлена рухом центрів завихреності плям, на 20 % нижча за вагу найбільш енергоємної частоти від еквівалентної системи вихрових точок (пунктирна крива) (Рис. 5б). Рівні звукового тиску від плям та від вихрових точок наближені один до одного (Рис. 5а). Звукове поле в цьому прикладі формується як великомасштабними рухами, так і взаємодією внутрішніх ступенів вільності плям (осциляції форми та обертання вихрових еліпсів).

Звернемося до сценарію б (Рис. 2). Всі параметри вихрової системи такі ж самі, як в попередньому прикладі, окрім початкової форми вихора 2:  $\lambda_2^{(0)} = 1.4$ . Під час взаємодії вихори деформуються таким чином (Рис. 4г):  $\lambda_1(\tau) \rightarrow 1$  – вихор 1 гальмується та набуває форму еліпса з малим ексцентриситетом ( $\rightarrow 0$ );  $\lambda_3(\tau)$  після набуття свого мінімального значення  $\rightarrow \text{const}$ , наближеної до початкового значення, при цьому осцилює; невеликі осциляції  $\lambda_2(\tau)$  змінюються на коливання суттєвої амплитуди з частотою  $\sim 0.86$ . Кутові ступені вільності плям (Рис. 4д): вихор 1, що гальмується, спочатку розвертається у напрямку, протилежному знаку своєї завихреності, потім обертається, як поодинокий вихор Ренкіна (трохи збурений); вихор 2 майже не змінює свого обертання із кутовою швидкістю 0.49; вихор 3 здійснює коливання та розвертається таким чином, щоб сформувати відбиту вихрову пару 2,3; при цьому значення його кута нахилу трохи осцилює. Таким чином, у відбитій вихровій парі 2,3 вихор 2 деформується та обертається, вихор 3 має сталу форму та кут нахилу (з накладеними невеликими осциляціями).

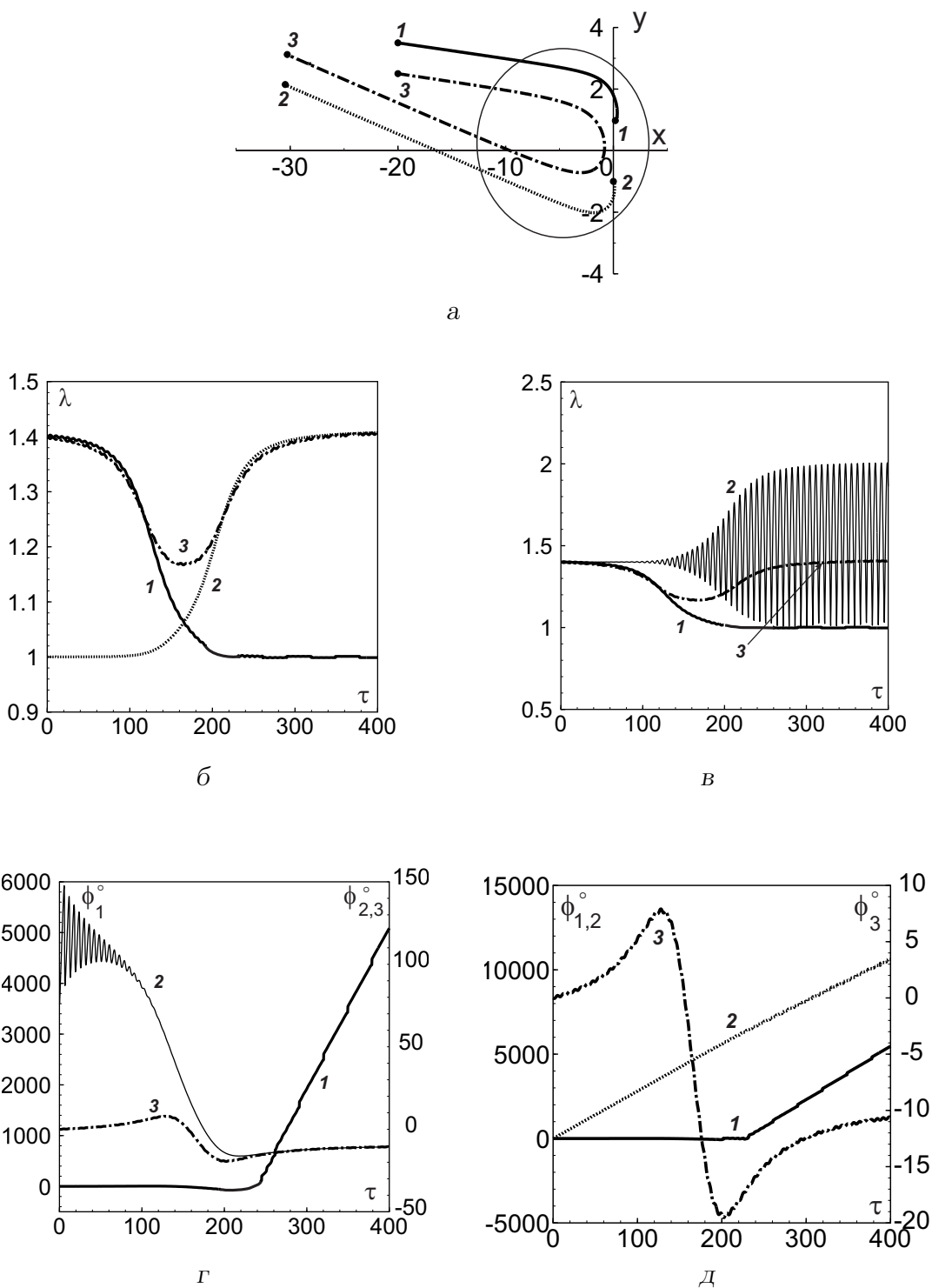


Рис. 4. Обмінна взаємодія трьох вихорів Кірхгофа при  $b = 3$ ,  $L = 20$ ,  $l = 1$ ,  $S_i = 0.495$ ,  $|\omega_{el}| = 2.018$  (цифрами позначені криві, що відповідають номеру вихора);  
 а – траєкторії центрів завихреності; б, г –  $\lambda_i(\tau)$  для сценаріїв а та б на Рис. 2;  
 в, д –  $\phi_i(\tau)$  для сценаріїв а та б на Рис. 2

Звукове поле при взаємодії трьох EV-станів в випадку обміну являє собою коливання, що складається з двох частин: частота гармонічної частини коливання (початкова частина) дорівнює подвоєній кутовій частоті обертання вихра Кірхгофа 2 до області ефективної вихрової взаємодії; основна частота періодичної його частини (коливання другої частини)  $\sim \epsilon$  півсумою подвоєної частоти обертання та частоти коливань відношення півосей вихора 2 після області ефективної вихрової взаємодії (Рис. 5г). Звукове поле при такому типі взаємодії формують три основні частоти високочастотної частини спектру (окил частоти  $|\omega_{el}|/2 \approx 1$ ) (Рис. 5д):

- $\omega = 0.86$  ( $|S(\omega)| = 0.66$ ) – частота коливання  $\lambda_2$  під час та після області ефективної вихрової взаємодії (найбільш енергоємна частота високочастотної області);
- $\omega = 0.98$  ( $|S(\omega)| = 0.53$ ) є подвоєною частотою обертання вихора Кірхгофа 2;
- $\omega = 1.72$  ( $|S(\omega)| = 0.197$ ) є подвоєною частотою осциляцій кута повороту вихора 3 після області ефективної взаємодії.

Рівні звукового поля від EV-станів, що взаємодіють між собою, на 2 порядки вищі за рівні звукового поля від EV-станів+вихор Ренкіна та вихрових точок (Рис. 5а,г). Тобто, рівні звукового поля, що випромінюється, суттєвим чином залежать від додавання внутрішніх ступенів вільності в вихрову стему ( $\lambda_2^{(0)} = 1.4$  в даному випадку). Таким чином, звукове поле в цьому прикладі формується в основному внутрішніми ступенями вільності плям (осциляції форми и обертання вихрових еліпсів).

Аналіз розрахункових результатів звукового поля в випадках сценаріїв а і б (Рис. 2) показав, що внутрішні ступені вільності вихорів роблять суттєвий внесок у формування звукового поля.

Розглянемо великомасштабні рухи вихрових плям, що взаємодіють, для сценаріїв а, б (Рис. 2) та еквівалентної системи точкових вихорів щодо низькочастотних частин їхніх звукових спектрів. На Рис. 5в заради стислості зображені лише траєкторії центру завихреності плями 3 для сценаріїв, що досліджуються. Для таких вихрових систем низькочастотні частини спектрів мають близьку ширину ( $\sim 0.25$  безрозмірних частот) (Рис. 5е). Це свідчить про те, що тип поведінки великомасштабних вихрових рухів є однаковим для таких вихрових систем: в випадку розподілених вихорів (сценарії а, б) траєкторії центру завихреності плями 3 з графічною точністю співпадають між собою (Рис. 5в); траєкторія точкового вихора (штрихова лінія) в фінальній частині взаємодії незначним чином відрізняється від траєкторій центрів завихреності плям (Рис. 5в).

Розглянемо випадок взаємного захоплення. Траєкторії центрів завихреності плям, що є типовими для взаємного захоплення, подані на Рис. 6а. На Рис. 6а нанесена лише траєкторія точкового вихра 3 (пунктирна лінія). Протягом взаємодії вихори деформуються суттєвим чином (Рис. 6б):  $\lambda_{1,2}$  в декотрі моменти часу змінюються майже в 2 рази в порівнянні зі своїми початковими значеннями. Вихори 1,2 обертаються із змінними кутовими швидкостями відповідно до знаків власних завихреностей, вихор 3 обертається в напрямку, протилежному знаку своєї завихреності, із кутовою швидкістю, меншою  $\sim$  на порядок в порівнянні з кутовими швидкостями вихорів 1,2 (Рис. 6в). Рівень звукового тиску від плям  $\sim$  на 30 % вищий за рівень звукового тиску від вихрових точок (Рис. 6г). Ширина спектру складає  $\sim 3$  октави, частоти в октавах розподілені



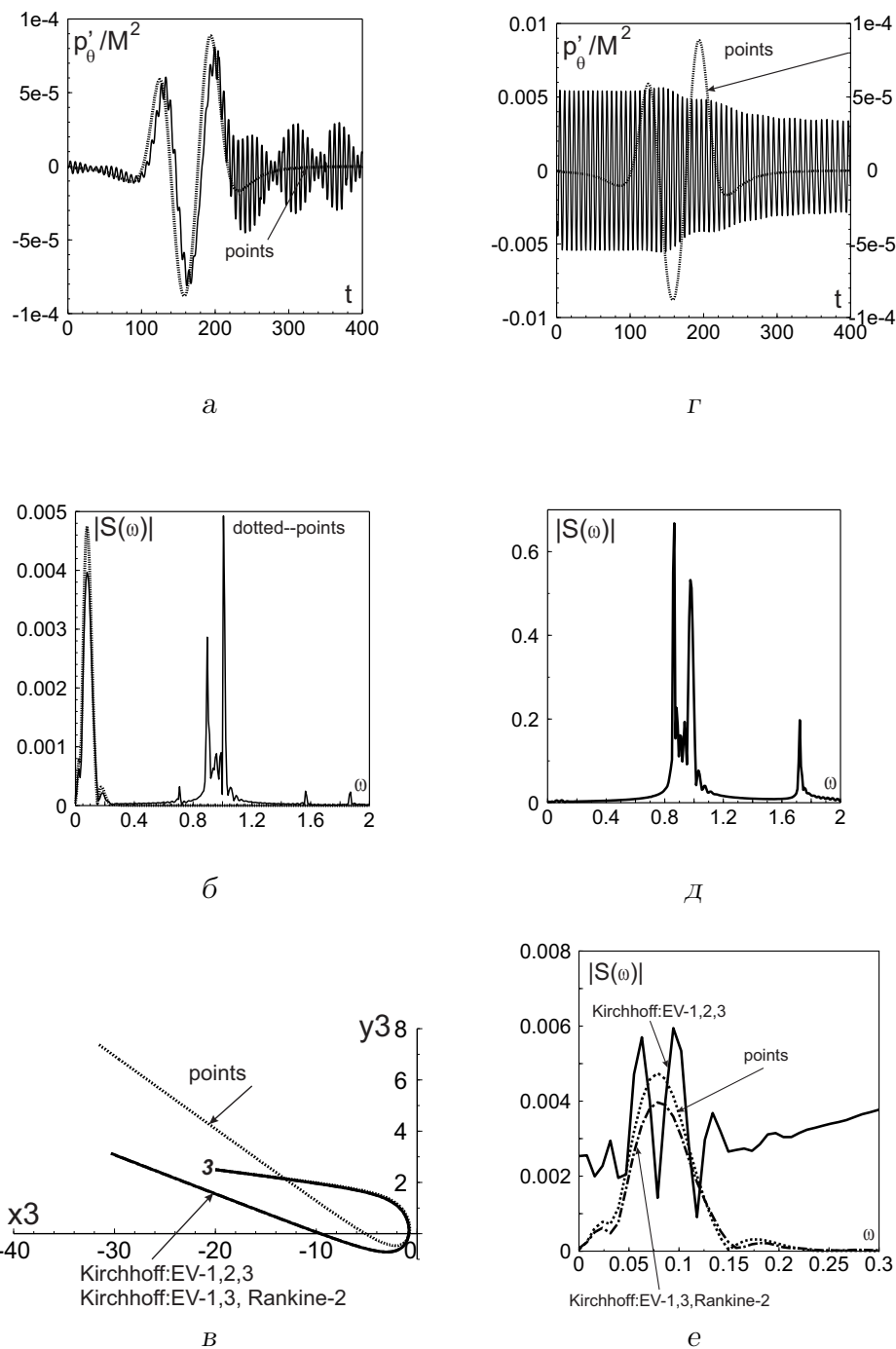


Рис. 5. Звукові поля, що відповідають вихровим течіям на Рис. 4,  $\theta = 0^\circ$  (пунктир – звуковий тиск та його амплітудний спектр від точкових вихорів):  
 а, б – флуктуації звукового тиску та їхній амплітудний спектр (сценарій а на Рис. 2);  
 г, д – флуктуації звукового тиску та їхній амплітудний спектр (сценарій б на Рис. 2);  
 в, е – траєкторії центру завихреності вихора 3 для трьох вихрових систем, що розглядаються, та низькочастотні частини їхніх звукових спектрів

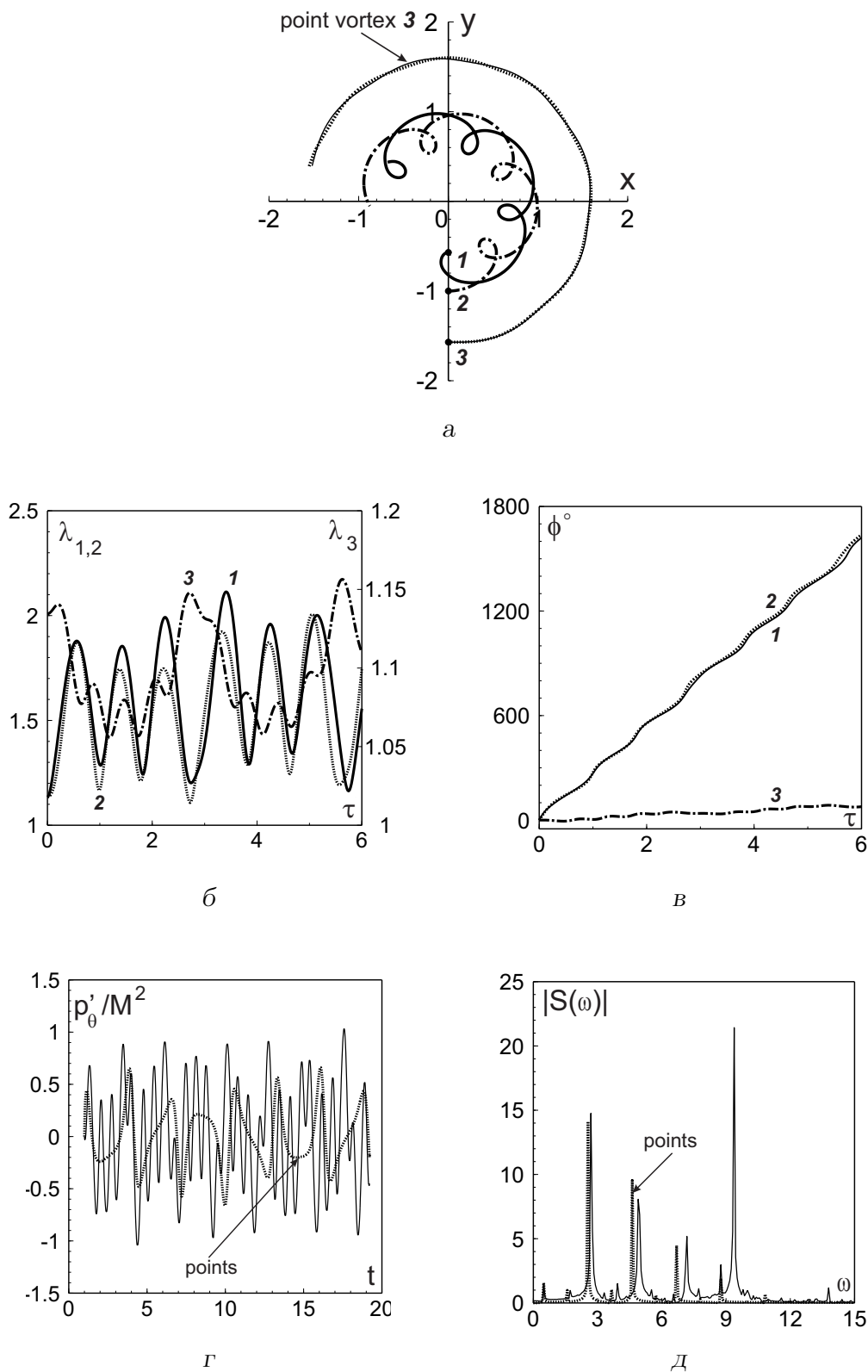


Рис. 6. Взаємне захоплення трьох вихорів Кірхгофа та їхнє звукове поле при  $b = -1.07$ ,  $L = 0$ ,  $l = 1$ ,  $\lambda_i^{(0)} = 1.13$ ,  $|\omega_{el}| = 20.97$   $S_i = 0.049$ ,  $\theta = 0^\circ$  (Рис. 2в):

а – траєкторії центрів завихреності плям; б –  $\lambda_i(\tau)$ ; в –  $\phi_i(\tau)$ ;

г – флуктуації звукового тиску; д – амплітудні спектри звукового тиску  $\Gamma$

дискретно, що вказує на певний тип взаємодії (Рис. 6д). Спектральна смуга від центрів завихреності плям при взаємному захопленні (Рис. 6д) суттєво ширша за відповідні частини спектру при прямій та обмінній взаємодіях (Рис. 5б,д). Зі зростанням частоти ваги частотних компонент спектру від великомасштабних рухів зменшуються (Рис. 6д). Вищі гармоніки з малими вагами від центрів завихреності плям межують з частотами, які зумовлені внутрішньою динамікою плям, з великими вагами. В цьому сенсі при взаємному захопленні розуміється поділ спектру на смуги. Ширина частотної смуги від великомасштабних рухів щодо плям та ширина смуги щодо точок близькі між собою. (Рис. 6д), з цього витікає близькість траєкторій центрів завихреності плям та вихрових точок (Рис. 6а), проте, як було зазначено вище, рівень звукового тиску від плям значно вищий за рахунок наявності внутрішніх ступенів вільності плям (Рис. 6г). Найбільш енергоємна спектральна компонента від внутрішніх ступенів вільності плям пов'язана з обертанням вихорів 1,2:  $\omega = 9.37$  ( $|S(\omega)| = 21.42$ ) (Рис. 6д). Зазначимо, що рівні генерованого звуку при взаємному захопленні суттєво перевищують рівні звукового поля при прямій/обмінній взаємодіях (порів. Рис. 5а,г та Рис. 6г).

Звукові поля розглянутих зразків течій, що сформовані розподіленими вихорами та еквівалентними системами вихрових точок, різняться між собою наявністю високочастотної частини спектру (Рис. 5б,д; Рис. 6д), що зумовлено врахуванням внутрішніх ступенів вільності плям при ускладненні вихрової моделі. Внутрішня динаміка вихорів може посилити породжуваний вихорами звуковий сигнал на декілька порядків. Тому моделювання плям точками в акустичних задачах призведе до суттєвого заниження розрахункових результатів.

#### 4. ВИСНОВКИ

В статті розглянуті випадки взаємодії декількох когерентних вихрових структур в безмежному ідеальному середовищі в межах MZS-моделі першого та другого порядків та звукові поля, що зумовлені такими взаємодіями, які моделюються в межах акустичної аналогії Лайтхілла в формулюванні Пауелла. Сформулюємо основні висновки.

- Ускладнення вихрової моделі з метою наближення до реальної ситуації призводить до фізично обґрунтованих змін в звуковому полі, яке породжується вихровою взаємодією, що моделюється.
- Врахування внутрішньої вихрової динаміки при моделюванні вихорів в течії призводить до розширення частотної смуги спектру звукового поля, що генерується, та, як наслідок, до зростання його рівня; в межах MZS-моделі другого порядку звукове поле в частотному вимірі має такий вигляд: низькочастотна частина спектру визначається великомасштабними вихровими рухами (рухи центрів завихреності плям); його високочастотна частина обумовлена взаємодією/наявністю внутрішніх ступенів вільності; ця частина спектру в основному формується подвоєними частотами обертань вихорів та частотами коливань їхньої форми; MZS-модель першого порядку відтворює лише низькочастотну частину звукового спектру.
- Моделювання вихрових плям точковими вихорами при побудові звукового джерела суттєво занижує розрахунковий рівень звукового поля через неврахування впливу внутрішніх ступенів вільності вихрових структур.

- Характер великомасштабних вихрових рухів коректно моделювати еквівалентною системою точкових вихорів за таких умов: спектр звукового поля, що генерується вихровими плямами, має чітко окреслені смуги; низькочастотна смуга звукового спектру плям та спектр точок мають близьку ширину; відзначимо якісний характер сформульованого критерію.
- Оскільки внутрішня динаміка вихорів, що утворюють течію, призводить до значного зростання (іноді на декілька порядків) рівня звукового поля, то з метою зменшення шуму від вихрової течії керування нею повинно бути спрямоване на компенсацію цього фактору (зокрема, на зменшення ексцентриситету вихрових структур).

## ПОДЯКА

Авторка висловлює щирі вдячність академіку НАН України В. Т. Грінченку та професору І. В. Вовку (Інститут гідромеханіки НАН України) за увагу та корисні консультації під час роботи над статтею.

## REFERENCES

- [1] M. Wang, J. B. Freund, and S. K. Lele, “Computational prediction of flow-generated sound,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 38, no. 1, pp. 483–512, 2006. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.38.050304.092036>
- [2] S. K. Lele and J. W. Nichols, “A second golden age of aeroacoustics?” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 372, no. 2022, p. 20130321, 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1098/rsta.2013.0321>
- [3] I. V. Vovk and V. S. Malyuga, “Sound field generated by the flow in a duct with stenoses,” *Applied Hydromechanics*, vol. 14 (86), no. 1, pp. 23–48, 2012.
- [4] V. G. Basovsky, I. M. Gorban, and O. V. Khomenko, “Modification of hydrodynamic and acoustic fields generated by a cavity with fluid suction,” in *Understanding Complex Systems*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2018, pp. 137–158. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-4\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-4_9)
- [5] A. K. M. F. Hussain, “Coherent structures – reality and myth,” *Physics of Fluids*, vol. 26, no. 10, pp. 2816–2849, 1983. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.864048>
- [6] P. G. Saffman, “Perspectives in vortex dynamics,” in *Perspectives in Fluid Mechanics*. Berlin: Springer-Verlag, 1985, pp. 91–102. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/bfb0021119>
- [7] M. V. Melander, N. J. Zabusky, and A. S. Styczek, “A moment model for vortex interactions of the two-dimensional Euler equations. part 1. computational validation of a Hamiltonian elliptical representation,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 167, no. 1, pp. 95–115, 1986. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1017/s0022112086002744>

- [8] Z.-H. Teng, “Variable-elliptic-vortex method for incompressible flow simulation,” in *Tenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag, 1986, pp. 600–605. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/bfb0041857>
- [9] D. I. Pullin, “Contour dynamics methods,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 24, no. 1, pp. 89–115, 1992. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.24.010192.000513>
- [10] V. V. Meleshko and G. J. F. van Heijst, “On Chaplygin’s investigations of two-dimensional vortex structures in an inviscid fluid,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 272, pp. 157–182, 1994. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1017/s0022112094004428>
- [11] H. Aref, J. B. Kadtke, I. Zawadzki, L. J. Campbell, and B. Eckhardt, “Point vortex dynamics: Recent results and open problems,” *Fluid Dynamics Research*, vol. 3, no. 1-4, pp. 63–74, 1988. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1016/0169-5983\(88\)90044-5](https://doi.org/10.1016/0169-5983(88)90044-5)
- [12] B. J. Cantwell, “Organized motion in turbulent flow,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 13, no. 1, pp. 457–515. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.13.010181.002325>
- [13] H. Aref, “Integrable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 15, no. 1, pp. 345–389, 1983. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.15.010183.002021>
- [14] —, “Stirring by chaotic advection,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 143, pp. 1–21, 1984. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1017/s0022112084001233>
- [15] —, “Chaos in the dynamics of a few vortices – fundamentals and applications,” in *Theoretical and Applied Mechanics*. North-Holland: Elsevier, 1985, pp. 43–68. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/b978-0-444-87707-9.50012-9>
- [16] H. Aref, S. W. Jones, S. Mofina, and I. Zawadzki, “Vortices, kinematics and chaos,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 37, no. 1-3, pp. 423–440, 1989. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(89\)90147-4](https://doi.org/10.1016/0167-2789(89)90147-4)
- [17] V. V. Meleshko, M. Y. Konstantinov, A. A. Gurzhi, and T. P. Konovaljuk, “Chaotic advection of fluid particles in a field of point vortices and vortex rings,” *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, vol. 3, no. 5, pp. 1462–1462, 1991. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.857996>
- [18] V. V. Meleshko, A. A. Gurzhi, and T. P. Konovaljuk, “Mixing during point vortex interactions: scattering, collapse, merging,” in *Proceedings of the conference EUROTERM SEMINAR 39 on the Heat Transfer Enhancement by Lagrangian Chaos and Turbulence*. Nantes: ISITEM, 1994, p. 21.
- [19] V. V. Kozlov, “Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics,” *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, vol. 38, pp. 3–67, 1983.

- [20] V. V. Meleshko, M. Y. Konstantinov, A. A. Gurzhi, and T. P. Konovaljuk, “Advection of a vortex pair atmosphere in a velocity field of point vortices,” *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, vol. 4, no. 12, pp. 2779–2797, 1992. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.858335>
- [21] V. V. Meleshko and G. J. F. van Heijst, “Interacting two-dimensional vortex structures: Point vortices, contour kinematics and stirring properties,” *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 4, no. 6, pp. 977–1010, 1994. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1016/0960-0779\(94\)90135-x](https://doi.org/10.1016/0960-0779(94)90135-x)
- [22] E. A. Novikov and Y. B. Sedov, “The collapse of the vortices,” *JETPh*, vol. 77, no. 2(8), pp. 588–597, 1979.
- [23] H. Aref, “Motion of three vortices,” *Physics of Fluids*, vol. 22, no. 3, pp. 393–400, 1979. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.862605>
- [24] E. A. Novikov, “Stochastization and collapse of vortex systems,” *Annals of the New York Academy of Sciences*, vol. 357, no. 1, pp. 47–54, 1980. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1980.tb29674.x>
- [25] V. V. Meleshko and M. Y. Konstantinov, *Dynamics of vortex structures*. Kyiv: Naukova Dumka, 1993.
- [26] J. A. France and V. L. Harvey, “A climatology of the stratopause in WACCM and the zonally asymmetric elevated stratopause,” *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, vol. 118, no. 5, pp. 2241–2254, 2013. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1002/jgrd.50218>
- [27] B. Legras and D. G. Dritschel, “The elliptical model of two-dimensional vortex dynamics. I: the basic state,” *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, vol. 3, no. 5, pp. 845–854, 1991. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.858015>
- [28] D. G. Dritschel and B. Legras, “The elliptical model of two-dimensional vortex dynamics. II: Disturbance equations,” *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, vol. 3, no. 5, pp. 855–869, 1991. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.858016>
- [29] H. Hirsh, T. Ellman, A. Banerjee, D. Dritschel, H. Yao, and N. Zabuzky, “Reduced model formation for 2D vortex interactions using machine learning: Extended abstract,” pp. 130–132, 1995.
- [30] L. Y. Gutin, “On the sound field of a rotating propeller,” *Zhurnal Tehnicheskoi Fiziki*, vol. 5, no. 6, pp. 899–909, 1936.
- [31] —, “About the ‘sound of rotation’ of the propeller,” *Zhurnal Tehnicheskoi Fiziki*, vol. 12, no. 2-3, pp. 76–85, 1942.
- [32] M. J. Lighthill, “On sound generated aerodynamically i. general theory,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 211, no. 1107, pp. 564–587, 1952. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1098/rspa.1952.0060>



- [33] —, “On sound generated aerodynamically II. turbulence as a source of sound,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 222, no. 1148, pp. 1–32, 1954. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1098/rspa.1954.0049>
- [34] M. E. Goldstein, *Aeroacoustics*. New York: McGraw-Hill, 1976.
- [35] S. C. Crow, “Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem,” *Studies in Applied Mathematics*, vol. 49, no. 1, pp. 21–46, 1970. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1002/sapm197049121>
- [36] D. G. Crighton, “Basic principles of aerodynamic noise generation,” *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 16, no. 1, pp. 31–96, 1975. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1016/0376-0421\(75\)90010-x](https://doi.org/10.1016/0376-0421(75)90010-x)
- [37] W. Möhring, “On vortex sound at low Mach number,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 85, no. 4, pp. 685–691, 1978. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1017/s0022112078000865>
- [38] F. Obermeier, “On a new representation of aeroacoustic source distribution II. two-dimensional model flows,” *Acustica*, vol. 42, pp. 62–71, 1979.
- [39] G. K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge, UK: University of Cambridge, 1973.
- [40] W. Gröbli, “Specielle promleme über die bewegung geradliniger paralleler wirbelfaden,” *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, vol. 22, pp. 37–81, 129–165, 1877.
- [41] A. Powell, “Theory of vortex sound,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 36, no. 1, pp. 177–195, 1964. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1121/1.1918931>
- [42] V. T. Grinchenko, I. V. Vovk, and V. T. Matsypura, *Fundamentals of acoustics*. Kyiv: Naukova Dumka, 2007.
- [43] M. S. Howe, *Theory of vortex sound*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1017/cbo9780511755491>
- [44] T. P. Konovalyuk, “Interaction of elliptic vortices,” *Applied Hydromechanics*, vol. 7, no. 2, pp. 44–53, 2005.
- [45] —, “Criteria for approximation of distributed vortex structures by point vortices based on acoustic characteristics,” *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*, no. 4, pp. 47–52, 2016.
- [46] T. P. Konovalyuk, T. S. Krasnopolskaya, and E. D. Pechuk, “Influence of the internal dynamics of the interacting coherent vortex structures to the generated sound field,” *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*, no. 3, pp. 51–54, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.7>

- [47] V. V. Meleshko and T. P. Konovalyuk, “Interaction of a vortex pair with a point vortex in an infinite ideal fluid,” *Doklady AN UkrSSR. Series A. Physico-Mathematical and Technical Sciences*, no. 7, pp. 43–47, 1988.
- [48] E. A. Overman and N. J. Zabusky, “Evolution and merger of isolated vortex structures,” *Physics of Fluids*, vol. 25, no. 8, pp. 1297–1305, 1982. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.863907>
- [49] T. P. Konovalyuk and V. V. Meleshko, “Sound emission by a system of point vortices,” *Gidromekhanika*, vol. 70, pp. 41–52, 1996.
- [50] T. P. Konovalyuk, “Features of sound field structure at interaction of the point vortices,” *Acoustic Bulletin*, vol. 15, no. 1, pp. 38–58, 2012.
- [51] I. V. Vovk and T. P. Konovalyuk, “Peculiarities of the dynamics of the sound field during the interaction of point vortices,” *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*, no. 3, pp. 98–101, 2013.
- [52] T. P. Konovalyuk, “Peculiarities of sound fields in the interaction of three point vortices: mutual capture,” in *Proceedings of the Acoustic Symposium CONSONANCE-2013*. Kyiv: Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine, 2013, pp. 120–125.

## ЛІТЕРАТУРА

- [1] Wang M., Freund J. B., Lele S. K. Computational prediction of flow-generated sound // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 2006. — Vol. 38, no. 1. — P. 483–512.
- [2] Lele S. K., Nichols J. W. A second golden age of aeroacoustics? // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2014. — Vol. 372, no. 2022. — P. 20130321.
- [3] Вовк І. В., Малюга В. С. Звукові поля, генерувані потоком в каналі со стенозом // *Прикладна гідромеханіка*. — 2012. — Т. 14 (86), № 1. — С. 23–48.
- [4] Basovsky V. G., Gorban I. M., Khomenko O. V. Modification of hydrodynamic and acoustic fields generated by a cavity with fluid suction // *Understanding Complex Systems*. — Cham, Switzerland : Springer International Publishing, 2018. — P. 137–158.
- [5] Hussain A. K. M. F. Coherent structures – reality and myth // *Physics of Fluids*. — 1983. — Vol. 26, no. 10. — P. 2816–2849.
- [6] Saffman P. G. Perspectives in vortex dynamics // *Perspectives in Fluid Mechanics*. — Berlin : Springer-Verlag, 1985. — P. 91–102.
- [7] Melander M. V., Zabusky N. J., Styczek A. S. A moment model for vortex interactions of the two-dimensional Euler equations. Part 1. Computational validation of a Hamiltonian elliptical representation // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1986. — Vol. 167, no. 1. — P. 95–115.

- [8] Teng Z.-H. Variable-elliptic-vortex method for incompressible flow simulation // Tenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. — Berlin : Springer-Verlag, 1986. — P. 600–605.
- [9] Pullin D. I. Contour dynamics methods // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1992. — Vol. 24, no. 1. — P. 89–115.
- [10] Meleshko V. V., van Heijst G. J. F. On Chaplygin's investigations of two-dimensional vortex structures in an inviscid fluid // Journal of Fluid Mechanics. — 1994. — Vol. 272. — P. 157–182.
- [11] Point vortex dynamics: Recent results and open problems / Aref H., Kadtke J. B., Zawadzki I., Campbell L. J., and Eckhardt B. // Fluid Dynamics Research. — 1988. — Vol. 3, no. 1-4. — P. 63–74.
- [12] Кантуэлл Б. Д. Организованные движения в турбулентных потоках // Вихри и волны. — Москва : Мир, 1984. — Т. 33 из Новое в зарубежной науке. Серия Механика. — С. 9–79.
- [13] Aref H. Integrable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1983. — Vol. 15, no. 1. — P. 345–389.
- [14] Aref H. Stirring by chaotic advection // Journal of Fluid Mechanics. — 1984. — Vol. 143. — P. 1–21.
- [15] Aref H. Chaos in the dynamics of a few vortices – fundamentals and applications // Theoretical and Applied Mechanics. — North-Holland : Elsevier, 1985. — P. 43–68.
- [16] Vortices, kinematics and chaos / Aref H., Jones S. W., Mofina S., and Zawadzki I. // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1989. — Vol. 37, no. 1-3. — P. 423–440.
- [17] Chaotic advection of fluid particles in a field of point vortices and vortex rings / Meleshko V. V., Konstantinov M. Y., Gurzhi A. A., and Konovaljuk T. P. // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. — 1991. — Vol. 3, no. 5. — P. 1462–1462.
- [18] Meleshko V. V., Gurzhi A. A., Konovaljuk T. P. Mixing during point vortex interactions: scattering, collapse, merging // Proceedings of the conference EUROTERM SEMINAR 39 on the Heat Transfer Enhancement by Lagrangian Chaos and Turbulence. — Nantes : ISITEM. — 1994. — P. 21.
- [19] Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи математических наук. — 1983. — Т. 38. — С. 3–67.
- [20] Advection of a vortex pair atmosphere in a velocity field of point vortices / Meleshko V. V., Konstantinov M. Y., Gurzhi A. A., and Konovaljuk T. P. // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. — 1992. — Vol. 4, no. 12. — P. 2779–2797.
- [21] Meleshko V. V., van Heijst G. J. F. Interacting two-dimensional vortex structures: Point vortices, contour kinematics and stirring properties // Chaos, Solitons and Fractals. — 1994. — Vol. 4, no. 6. — P. 977–1010.

- [22] Новиков Е. А., Седов Ю. Б. Коллапс вихрей // ЖЭТФ. — 1979. — Т. 77, № 2(8). — С. 588–597.
- [23] Aref H. Motion of three vortices // *Physics of Fluids*. — 1979. — Vol. 22, no. 3. — P. 393–400.
- [24] Novikov E. A. Stochastization and collapse of vortex systems // *Annals of the New York Academy of Sciences*. — 1980. — Vol. 357, no. 1. — P. 47–54.
- [25] Мелешко В. В., Константинов М. Ю. Динамика вихревых структур. — Киев : Наукова думка, 1993. — 279 с.
- [26] France J. A., Harvey V. L. A climatology of the stratopause in WACCM and the zonally asymmetric elevated stratopause // *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*. — 2013. — Vol. 118, no. 5. — P. 2241–2254.
- [27] Legras B., Dritschel D. G. The elliptical model of two-dimensional vortex dynamics. I: The basic state // *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. — 1991. — Vol. 3, no. 5. — P. 845–854.
- [28] Dritschel D. G., Legras B. The elliptical model of two-dimensional vortex dynamics. II: Disturbance equations // *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. — 1991. — Vol. 3, no. 5. — P. 855–869.
- [29] Reduced model formation for 2D vortex interactions using machine learning: Extended abstract / Hirsh H., Ellman T., Banerjee A., Dritschel D., Yao H., and Zabuzky N. — 1995. — P. 130–132.
- [30] Гутин Л. Я. О звуковом поле вращающегося воздушного винта // *Избранные труды*. — Ленинград : Судостроение, 1977. — С. 61–71.
- [31] Гутин Л. Я. О «звуке вращения» воздушного винта // *Избранные труды*. — Ленинград : Судостроение, 1977. — С. 126–134.
- [32] Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically I. General theory // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. — 1952. — Vol. 211, no. 1107. — P. 564–587.
- [33] Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically II. Turbulence as a source of sound // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. — 1954. — Vol. 222, no. 1148. — P. 1–32.
- [34] Голдстейн М. Е. Аэроакустика. — Москва : Машиностроение, 1981. — 294 с.
- [35] Crow S. C. Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem // *Studies in Applied Mathematics*. — 1970. — Vol. 49, no. 1. — P. 21–46.
- [36] Crighton D. G. Basic principles of aerodynamic noise generation // *Progress in Aerospace Sciences*. — 1975. — Vol. 16, no. 1. — P. 31–96.

- [37] Möhring W. On vortex sound at low Mach number // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1978. — Vol. 85, no. 4. — P. 685–691.
- [38] Obermeier F. On a new representation of aeroacoustic source distribution II. Two-dimensional model flows // *Acustica*. — 1979. — Vol. 42. — P. 62–71.
- [39] Бэтчелор Д. Введение в механику жидкости. — Москва : Мир, 1973. — 758 с.
- [40] Gröbli W. Specielle Promleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfaden // *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*. — 1877. — Bd. 22. — S. 37–81,129–165.
- [41] Powell A. Theory of vortex sound // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1964. — Vol. 36, no. 1. — P. 177–195.
- [42] Грінченко В. Т., Вовк І. В., Мадипура В. Т. Основи акустики. — Київ : Наукова думка, 2007. — 640 с.
- [43] Howe M. S. *Theory of vortex sound*. — Cambridge : Cambridge University Press, 2002. — 232 p.
- [44] Коновалюк Т. П. Взаимодействие эллиптических вихрей // *Прикладна гідромеханіка*. — 2005. — Т. 7, № 2. — С. 44–53.
- [45] Коновалюк Т. П. Критерії для апроксимації розподілених вихрових структур точковими вихорами, що базуються на акустичних характеристиках // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія Фізико-математичні науки*. — 2016. — № 4. — С. 47–52.
- [46] Коновалюк Т. П., Краснопольська Т. С., Печук Є. Д. Вплив внутрішньої динаміки когерентних вихрових структур, що взаємодіють між собою, на генероване звукове поле // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія Фізико-математичні науки*. — 2021. — № 3. — С. 51–54.
- [47] Мелешко В. В., Коновалюк Т. П. Взаимодействие вихревой пары с точечным вихрем в безграничной идеальной жидкости // *Доклады АН УССР. Серия А. Физико-математические и технические науки*. — 1988. — № 7. — С. 43–47.
- [48] Overman E. A., Zabusky N. J. Evolution and merger of isolated vortex structures // *Physics of Fluids*. — 1982. — Vol. 25, no. 8. — P. 1297–1305.
- [49] Коновалюк Т. П., Мелешко В. В. Излучение звука системой точечных вихрей // *Гидромеханика*. — 1996. — Т. 70. — С. 41–52.
- [50] Коновалюк Т. П. Особенности структуры звукового поля при взаимодействии точечных вихрей // *Акустичний вісник*. — 2012. — Т. 15, № 1. — С. 38–58.
- [51] Вовк І. В., Коновалюк Т. П. Особливості динаміки звукового поля при взаємодії точкових вихорів // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія Фізико-математичні науки*. — 2013. — № 3. — С. 98–101.

- [52] Коновалюк Т. П. Особенности звуковых полей при взаимодействии трех точечных вихрей: взаимный захват: // Збірник праць акустичного симпозиуму КОНСОНАНС-2013. — Київ : Інститут гідромеханіки НАН України. — 2013. — С. 120–125.

**Т. П. Коновалюк**

**Влияние усложнения вихревой модели на оценку звуковых полей, являющихся результатом вихревого взаимодействия**

В рамках моментной MZS-модели первого и второго порядков выполнены оценки акустических эффектов, порожденных взаимодействием нескольких вихревых когерентных структур между собой. В MZS-модели первого порядка они описываются вихревыми точками, а в модели второго порядка – вихрями Кирхгофа. Звуковые поля как результат вихревого взаимодействия рассчитываются в пределах акустической аналогии Лайтхилла в формулировке Пауэлла. Показано, что их характеристики существенно зависят от порядка моментной модели, описывающей вихревые структуры. Исследуются только упругие взаимодействия. Это позволяет выделить в акустическом спектре полосы, возникающие вследствие усложнения моментной модели. При описании когерентных структур точечными вихрями спектр звукового поля характеризуется одной частотной полосой, воспроизводящей движение центров завихренности (крупномасштабные вихревые движения). Учет внутренней динамики вихрей при переходе к эллиптической модели приводит к расширению спектра. В результате возрастает уровень рассчитанного звукового поля, которое генерируется при взаимодействии таких вихревых структур. При этом более низкочастотная полоса воспроизводит движение центров завихренности пятен, а высокочастотная – внутреннюю динамику завихренности. Показано, что крупномасштабные движения вихревых пятен можно моделировать точечными вихрями при условии, что звуковой спектр вихревых пятен четко поделен на полосы, а низкочастотные полосы таких систем имеют близкую ширину. Неучет внутренней вихревой динамики при построении звукового источника приводит к существенно заниженным оценкам уровня звукового поля.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** когерентная вихревая структура, MZS-модель, точечный вихрь, вихрь Кирхгофа, акустическая аналогия Лайтхилла, флуктуации звукового давления, амплитудно-частотный спектр

**T. P. Konovalyuk**

**Effect of vortex model complication on estimation of sound fields resulting from vortex interaction**

The paper deals with estimating the acoustic effects generated by the interaction of several coherent vortex structures within the framework of the moment MZS-model of the first and second orders. The vortices are described by point vortices in the first-order MZS model, and by Kirchhoff vortices in the second-order model. The resulting sound fields are calculated within the Lighthill acoustic analogy in Powell's formulation. Their characteristics are shown to depend significantly on the order of the moment model describing the vortex structures. The only elastic interactions are studied here. This enables distinguishing the fragments in the acoustic spectrum arising as a result of the complication of the moment model. When describing coherent structures with



the point vortices, the spectrum of the sound field is characterized by one frequency band reproducing the motion of vorticity centers (large-scale vortex motion). The allowance for the internal dynamics of vortices when switching to an elliptical model leads to expansion of the spectrum. As a result, the level of the calculated sound field generated by the interaction of the given vortex structures increases. At the same time, the lower-frequency band reproduces the motion of the spots' vorticity centers, and the high-frequency band reproduces the internal dynamics of the vorticity. The large-scale motions of vortex spots can be modeled by the point vortices under the condition that the sound spectrum of distributed vortices is clearly divided into bands, and the low-frequency ones have a similar width. In the case of the appearance of a high-frequency component in the sound field, the interacting vortex spots cannot be described by point vortices. Such a simplification of the modeled sound source leads to a significant underestimation of the sound level.

*KEY WORDS: coherent vortex structure, MZS-model, point vortex, Kirchhoff vortex, Lighthill acoustic analogy, sound pressure fluctuations, amplitude-frequency spectrum*