

УДК 532.5+(075.8)

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕЧІЇ У ПРЯМОМУ ПЛОСКОМУ ЖОРСТКОМУ КАНАЛІ З ПРЯМОКУТНИМ ОСЕСИМЕТРИЧНИМ РОЗШИРЕННЯМ У ЗМІННИХ ФУНКЦІЯ ТЕЧІЇ–ЗАВИХРЕНІСТЬ–ТИСК. ЧАСТИНА 1. ТЕОРІЯ

А. О. Борисюк

Інститут гідромеханіки НАН України
вул. Марії Капніст, 8/4, 03057, Київ, Україна
†E-mail: andriy_borysyuk@yahoo.com

Отримано 10.03.2020

Розроблено чисельний метод розв'язування задачі у змінних функція течії–завихреність–тиск про рух рідини у нескінченному прямому плоскому жорсткостінному каналі з локальним жорстким осесиметричним розширенням прямокутної форми. Цей метод має перший порядок точності по часовій та другий порядок точності по просторових координатах. У розробленому методі сформульована задача розв'язується шляхом введення функції течії і завихреності та відповідного переходу від змінних швидкість–тиск до змінних функція течії–завихреність–тиск, подальшого обезрозмірювання одержаних у результаті такого переходу співвідношень, вибору розрахункової області і відповідної просторово-часової обчислювальної сітки з малими сталими кроками по часовій та просторових координатах, дискретизації вказаних безрозмірних співвідношень у відповідних вузлах вибраної сітки та подальшого розв'язування алгебраїчних рівнянь, одержаних внаслідок зазначеної дискретизації. При виконанні дискретизації часова її частина проводиться на основі односторонньої різниці вперед, а просторова – на основі односторонніх різниць проти потоку (для конвективного члена нелінійного рівняння переносу завихреності) та п'ятиточкових шаблонів (для дифузійного члена зазначеного рівняння та рівнянь Пуассона для функції течії і тиску) по відповідних координатах. Для розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь для функції течії і тиску (які відрізняються одне від одного лише виглядом відомої правої частини) використовується ітераційний метод послідовної верхньої релаксації. Одержане після дискретизації алгебраїчне співвідношення для завихреності не потребує застосування ніякого методу розв'язування, оскільки вже є розрахунковою схемою для безпосереднього визначення значень завихреності на основі відомих значень відповідних величин, знайдених у попередній момент часу. У початковий же момент часу значення всіх величин вважаються заданими.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: течія, канал, розширення, метод

1. ВСТУП

Дослідження течій легких і важких рідин у прямих каналах актуальне у багатьох сферах діяльності людини. З-поміж іншого, значний інтерес тут пов'язаний з вивченням рухів рідин у каналах з локальними розширеннями, такими, як муфти, дифузори, аневризми тощо. Пояснюється він тим, що в околах таких неоднорідностей геометрії каналів змінюються режим і структура течії, її локальні та інтегральні характеристики тощо. А це може спричинити відповідні наслідки не лише в околі, але й за межами зазначених неоднорідностей [1–7].

Аналіз відповідних наукових джерел засвідчує, що вивченню руху рідин у каналах з локальними розширеннями приділялася значна увага. У таких роботах канали та розширення вважалися жорсткими, а для останніх вибиралися найпростіші форми. Течії ж на їх вході (базові течії) були стаціонарними, осесиметричними і ламінарними, а рідини вважалися однорідними, нестисливими і ньютонівськими (у даній статті не розглядаються інші типи каналів, розширень, рідин та їхніх течій, оскільки вони значно рідше вивчалися у порівнянні із зазначеними). Це давало можливість, з одного боку, в рамках вибраних моделей та з прийнятною для потреб практики точністю з'ясувати вплив основних параметрів каналу¹, його розширення і базового потоку на течію як в околі розширення, так і за його межами, а з іншого – значно спростувати розв'язування відповідних задач [1–7].

З-поміж одержаних тут результатів велике значення мають чисельні методи, розроблені для дослідження течій в околах локальних розширень каналів. Зокрема, в роботі [5] було запропоновано чисельний метод розв'язування задачі про рух рідини у нескінченному прямому жорсткому каналі з локальним осесиметричним розширенням прямокутної форми. Він дозволяє вивчати течію у змінних швидкість–тиск, має другий порядок точності і забезпечує достатньо високу стійкість розв'язку. В ньому рівняння Нав'є–Стокса і нерозривності розв'язуються шляхом їх інтегрування по елементарних об'ємах (на які розбивається розрахункова область), просторово-часової дискретизації одержаних інтегральних рівнянь і подальшого розв'язування нелінійних алгебраїчних (дискретних) рівнянь. При виконанні дискретизації часова її частина проводиться на основі неявної триточкової несиметричної схеми з різницями назад, а просторова – на основі TVD-схеми та відповідної схеми дискретизації просторових похідних. Розв'язування ж зазначених алгебраїчних рівнянь проводиться у три етапи. Спочатку дискретне рівняння кількості руху переписується у вигляді рівняння для швидкості. Потім на основі дискретного рівняння нерозривності виводиться рівняння для тиску. Після цього до одержаних зв'язаних нелінійних алгебраїчних рівнянь для швидкості і тиску застосовується процедура знаходження та узгодження між собою послідовних наближень цих величин. Вона дозволяє переходити від зв'язаних нелінійних рівнянь до відповідних незалежних лінійних. Для розв'язування ж одержаних у такий спосіб лінійних алгебраїчних рівнянь застосовується ітераційний метод, в якому використо-

¹До основних належать параметри, які мають найбільший вплив на досліджувані поля. Для розширення такими є його ступінь і довжина, а також параметри, котрі визначають плавність його форми та ступінь її відхилення від осової симетрії. Для каналу це – характерні геометричні розміри його поперечного перерізу і жорсткість його стінок на згин. Для рідини основними параметрами є її в'язкість і масова густина, а для базової течії – осова компонента її швидкості, її осереднення по поперечному перерізу каналу, число Рейнольдса, а також об'ємна витрата.

вуються методи відкладеної корекції та спряжених градієнтів, а також солвери ICCG (для симетричних матриць) та Bi-CGSTAB (для асиметричних матриць).

Як було зазначено, цей метод має другий порядок точності і забезпечує достатньо високу стійкість розв'язку. Проте він є досить громіздким, потребує виконання величезної кількості обчислень тощо, а відтак – значних затрат машинного часу. У даній же статті розробляється альтернативний метод розв'язування тієї ж задачі. Він має фактично той же порядок точності, забезпечує кращу стійкість розв'язку, але потребує виконання значно меншої кількості обчислень тощо, що зрештою приводить до використання набагато меншої кількості комп'ютерного часу. В ньому сформульована задача розв'язується шляхом введення функції течії і завихреності, подальшої дискретизації відповідних співвідношень та розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь, одержаних внаслідок такої дискретизації. При проведенні часової частини дискретизації застосовуються односторонні різниці вперед. Натомість для її просторової частини використовуються односторонні різниці проти потоку (для конвективного члена рівняння переносу завихреності) та п'ятичкові шаблони (для дифузійного члена зазначеного рівняння та рівнянь Пуассона для функції течії і тиску) по відповідних координатах. Що стосується розв'язування зазначених алгебраїчних рівнянь, то для цього використовується ітераційний метод послідовної верхньої релаксації (для рівнянь для функції течії й тиску). Одержане ж після дискретизації алгебраїчне співвідношення для завихреності не потребує застосування ніякого методу розв'язування, оскільки вже є розрахунковою схемою для безпосереднього визначення значень завихреності на основі відомих значень відповідних величин, знайдених у попередній момент часу.

Дана стаття складається з чотирьох розділів, списку літератури і додатку. На її початку Розділ 1 – вступний. У розділі 2 формулюється задача і записуються відповідні рівняння, а також граничні та початкові умови. Далі у розділі 3 описується метод її розв'язування. Після цього формулюються висновки проведеного дослідження (розділ 4, а також наводяться списки цитованої літератури і прийнятих позначень (у додатку).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається нескінченний прямий плоский нерухомий жорсткий канал ширини D_0 з локальним жорстким прямокутним осесиметричним розширенням, ширина і довжина якого дорівнюють відповідно d та l (Рис. 1). У каналі тече в'язка нестислива однорідна ньютонівська рідина масової густини ρ і кінематичної в'язкості ν . Її течія перед входом у розширення (базова течія) є стаціонарною ламінарною, і характеризується об'ємною витратою на одиницю глибини каналу q . Необхідно дослідити течію в околі розширення, а також встановити зв'язок її локальних та інтегральних характеристик з параметрами базового потоку, каналу і розширення.

Сформульована задача описується двовимірними рівняннями Нав'є–Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

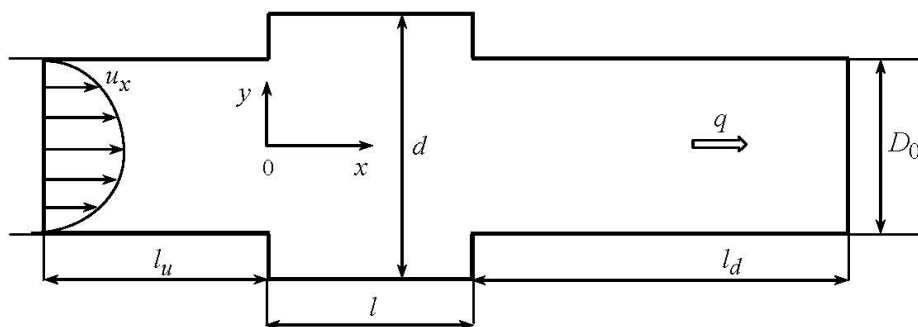


Рис. 1. Геометрія задачі та розрахункова область

і нерозривності [8, 9]:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Граничними умовами є рівність нулевій швидкості течії на стінках каналу S_{ch} і розширення S_{exp} :

$$u_x|_{S_{ch}, S_{exp}} = 0, \quad u_y|_{S_{ch}, S_{exp}} = 0. \quad (3)$$

Також, внаслідок збереження маси в каналі, об'ємна витрата рідини q має бути однаковою в усіх його поперечних перерізах:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad q = U_a D_0. \quad (4)$$

Крім того, за межами збуреної розширенням течії (тобто перед і достатньо далеко за ним) задається параболічний профіль швидкості (внаслідок ламінарного характеру базового потоку) [5, 10, 11]:

$$u_x|_{x=-l_u, l+l_d} = U_0 \left(1 - \frac{4y^2}{D_0^2}\right), \quad (5)$$

$$u_y|_{x=-l_u, l+l_d} = 0.$$

Що стосується тиску p , то вважається, що перед ($p_u = p|_{x=-l_u}$) і достатньо далеко за ($p_d = p|_{x=l+l_d}$) розширенням він є сталим, а його відповідний перепад $\Delta p = p_u - p_d = const > 0$ - таким, що відповідає заданому ламінарному характеру базового потоку. При цьому без втрати загальності величина p_d покладається рівною нулевій ($p_d = 0$), а тиск p_u (який тепер дорівнює перепаду Δp), як і тиск в усьому каналі, визначається у процесі розв'язування задачі (вибираючи значення p_d , завжди можна вибрати відповідне значення p_u так, щоби перепад тиску Δp , який визначає рух рідини в каналі, залишався незмінним). На нерухомих же жорстких поверхнях каналу і розширення нормальний градієнт тиску є нульовим [5, 10, 11]:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{S_{ch}} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{S_{exp}} = 0. \quad (6)$$

Початкові ж умови полягають у відсутності руху рідини в каналі в момент часу² $t = 0$ [5]:

$$u_x|_{t=0} = u_y|_{t=0} = 0; \quad p|_{t=0} = 0. \quad (7)$$

У співвідношеннях (1)–(7) x та y є прямокутними декартовими координатами, вибраними так, що вісь x направлена по осі каналу вниз за течією (Рис. 1), t – часом, u_x та u_y – компонентами локальної миттєвої швидкості рідини у напрямках x та y , U_0 та U_a – максимальною та середньою у поперечному перерізі каналу швидкостями базового потоку відповідно:

$$U_a = \frac{1}{D_0} \int_{-D_0/2}^{D_0/2} u_x|_{x=-l_u, l+l_d} dy = \frac{2}{3} U_0.$$

Тут і надалі n – зовнішня одинична нормаль до відповідної поверхні.

3. МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Розв'язування сформульованої у попередньому розділі задачі складається з

- введення функції течії і завихреності та відповідного переходу від змінних швидкість–тиск до змінних функція течії–завихреність–тиск;
- обезрозмірювання одержаних у результаті зазначеного переходу співвідношень;
- вибору розрахункової області і відповідної просторово-часової обчислювальної сітки, та подальшої дискретизації безрозмірних співвідношень у вузлах цієї сітки;
- розв'язування алгебраїчних рівнянь, одержаних внаслідок зазначеної дискретизації.

Розглянемо кожен з цих етапів.

3.1. Перехід до змінних функція течії–завихреність–тиск

Введення функції течії ψ [8, 9]:

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8)$$

(яка тотожно задовольняє рівняння нерозривності (2)) і завихреності ω (яка у випадку двовимірної течії має лише одну компоненту) [8, 9]:

$$\omega = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (9)$$

²Автори деяких робіт (див., наприклад, [12–14]) говорять про існування параболічного (ламінарного) профілю швидкості в усьому каналі в початковий момент часу. Але при цьому вони нічого не кажуть про те, як у розрахунках задавати такий профіль в області відриву течії та у струмені безпосередньо за входом у розширення, а також як задавати границю між струменем та областю відривної течії, як узгоджувати розподіли швидкостей на цій границі тощо. Крім того, незрозуміло залишається причина зміни задаваного цими авторами ламінарного характеру руху рідини на збурений/турбулентний в зоні збуреної розширенням течії відразу після початкового моменту часу тощо.

дозволяє перейти від рівнянь (1), (2) для швидкості і тиску до рівнянь для ψ , ω та p . Дійсно, диференціювання першого рівняння в (1) по координаті y , а другого – по координаті x , подальше віднімання від другого з одержаних співвідношень першого і врахування (9) дає рівняння переносу завихреності:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + u_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla_{(x,y)}^2 \omega, \quad (10)$$

де $\nabla_{(x,y)}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа у змінних x , y .

Підстановка (8) у співвідношення (9) дозволяє одержати рівняння Пуассона для функції течії:

$$\nabla_{(x,y)}^2 \psi = -\omega, \quad (11)$$

котре в явному вигляді зв'язує між собою функції ψ та ω .

Диференціювання ж першого рівняння в (1) по координаті x , а другого – по координаті y , подальше додавання одержаних співвідношень і врахування (2) приводить до рівняння Пуассона для тиску:

$$\nabla_{(x,y)}^2 p = -\rho \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (12)$$

Що стосується граничних та початкових умов для змінних ψ , ω і p , то їх не можна сформулювати безпосередньо на основі постановки задачі. Натомість їх можна одержати з умов (3)–(7) із застосуванням відповідних математичних операцій. Дійсно, використання співвідношення (5) разом із (8), (9) дозволяє записати умови для функції течії та завихреності на вході та виході збуреної розширенням течії:

$$\psi|_{x=-l_u, l+l_d} = U_0 y \left(1 - \frac{4y^2}{3D_0^2} \right), \quad \omega|_{x=-l_u, l+l_d} = \frac{8U_0 y}{D_0^2}. \quad (13)$$

З рівності нулю нормальної компоненти швидкості рідини на стінках каналу та розширення випливає (на основі (8)) постійність там функції ψ :

$$\psi|_{S_{\text{ch}}^+, S_{\text{exp}}^+} = \text{const}_+, \quad \psi|_{S_{\text{ch}}^-, S_{\text{exp}}^-} = \text{const}_-$$

(тут S_{ch}^+ та S_{exp}^+ – верхні стінки каналу та розширення відповідно, а S_{ch}^- та S_{exp}^- – нижні). Звідси, з урахуванням першого співвідношення в (13), одержуємо:

$$\psi|_{S_{\text{ch}}^+, S_{\text{exp}}^+} = \frac{1}{3} U_0 D_0, \quad \psi|_{S_{\text{ch}}^-, S_{\text{exp}}^-} = -\frac{1}{3} U_0 D_0. \quad (14)$$

Відсутність же тангенційної компоненти швидкості на поверхнях S_{ch} та S_{exp} спричиняє там рівність нулеві нормальних похідних першого порядку та змішаної похідної другого порядку від ψ :

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{S_{\text{ch}}, S_{\text{exp}}^h} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{S_{\text{exp}}^v} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right|_{S_{\text{ch}}, S_{\text{exp}}} = 0 \quad (15)$$

(в умовах (15) через S_{exp}^h та S_{exp}^v позначено горизонтальні та вертикальні ділянки поверхні S_{exp} відповідно).

Співвідношення (15) разом з рівнянням (11) дають також умову для завихреності на стінках каналу та розширення:

$$\omega|_{S_{\text{ch}}, S_{\text{exp}}^h} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{S_{\text{ch}}, S_{\text{exp}}^h}, \quad \omega|_{S_{\text{exp}}^v} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{S_{\text{exp}}^v}. \quad (16)$$

Що стосується граничних умов для тиску, то, окрім (6), ще маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{S_{\text{exp}}^v} &= \rho \left[\nu \nabla_{(x,y)}^2 u_x - \frac{\partial u_x}{\partial t} \right]_{S_{\text{exp}}^v}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{S_{\text{ch}}, S_{\text{exp}}^h} &= \rho \left[\nu \nabla_{(x,y)}^2 u_y - \frac{\partial u_y}{\partial t} \right]_{S_{\text{ch}}, S_{\text{exp}}^h}. \end{aligned} \quad (17)$$

Співвідношення (17) одержуються з рівнянь (1) після врахування в них умов (3).

Початкові ж умови для ψ , ω та p полягають у рівності нулю цих величин в момент часу $t = 0$ (див. (7)–(9)):

$$\psi|_{t=0} = 0, \quad \omega|_{t=0} = 0, \quad p|_{t=0} = 0. \quad (18)$$

3.2. Безрозмірні співвідношення

При проведенні розрахунків зручно мати справу з безрозмірними аналогами наведених у попередньому підрозділі співвідношень. Для одержання цих аналогів необхідно вибрати відповідні масштаби. У даному дослідженні в якості масштабу довжини вибирається ширина каналу D_0 , а в якості масштабу швидкості – її середнє у поперечному перерізі каналу значення у базовій течії $U_a = q/D_0$. Масштабами ж часу і тиску є відповідно відношення D_0/U_a та подвоєний середній динамічний напір базової течії ρU_a^2 . Що стосується функції течії, об'ємної витрати і завихреності, то для перших двох масштабам служить добуток $U_a D_0$, а для останньої – відношення U_a/D_0 .

Для вибраних масштабів безрозмірні аналоги представлень (8), (9) та рівнянь (10)–(12) мають відповідно такий вигляд:

$$U_x = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad U_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}, \quad \Omega = \frac{\partial U_y}{\partial X} - \frac{\partial U_x}{\partial Y}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial T} + U_x \frac{\partial \Omega}{\partial X} + U_y \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla_{(X,Y)}^2 \Omega, \quad (20)$$

$$\nabla_{(X,Y)}^2 \Psi = -\Omega, \quad (21)$$

$$\nabla_{(X,Y)}^2 P = -\left(\frac{\partial U_x}{\partial X} \right)^2 - 2 \frac{\partial U_x}{\partial Y} \frac{\partial U_y}{\partial X} - \left(\frac{\partial U_y}{\partial Y} \right)^2, \quad (22)$$

Безрозмірні аналоги граничних умов (4), (6), (13)–(17) записуються наступним чином:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q}{\partial X} = 0, \quad Q = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_{\text{ch}}, S_{\text{exp}}} = 0, \quad \Psi|_{X=-L_u, L+L_d} = \frac{3}{2}Y \left(1 - \frac{4}{3}Y^2\right), \\
 \Omega|_{X=-L_u, L+L_d} = 12Y, \quad \Psi|_{S_{\text{ch}}^+, S_{\text{exp}}^+} = \frac{1}{2}, \quad \Psi|_{S_{\text{ch}}^-, S_{\text{exp}}^-} = -\frac{1}{2}, \\
 \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \Big|_{S_{\text{ch}}, S_{\text{exp}}^h} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X} \Big|_{S_{\text{exp}}^v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} \Big|_{S_{\text{ch}}, S_{\text{exp}}} = 0, \\
 \Omega|_{S_{\text{ch}}, S_{\text{exp}}^h} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \Big|_{S_{\text{ch}}, S_{\text{exp}}^h}, \quad \Omega|_{S_{\text{exp}}^v} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \Big|_{S_{\text{exp}}^v}, \\
 \frac{\partial P}{\partial X} \Big|_{S_{\text{exp}}^v} = \left[\frac{1}{\text{Re}} \nabla_{(X,Y)}^2 U_x - \frac{\partial U_x}{\partial T} \right]_{S_{\text{exp}}^v}, \\
 \frac{\partial P}{\partial Y} \Big|_{S_{\text{ch}}, S_{\text{exp}}^h} = \left[\frac{1}{\text{Re}} \nabla_{(X,Y)}^2 U_y - \frac{\partial U_y}{\partial T} \right]_{S_{\text{ch}}, S_{\text{exp}}^h}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Тут $\nabla_{(X,Y)}^2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}$ – оператор Лапласа у змінних X, Y .

Початкові ж умови (18) у змінних Ψ, Ω та P переписуються так:

$$\Psi|_{T=0} = 0, \quad \Omega|_{T=0} = 0, \quad P|_{T=0} = 0. \tag{24}$$

У співвідношеннях (19)–(24) $X = x/D_0$ та $Y = y/D_0$ є безрозмірними координатами x та y ; $T = tU_a/D_0$ – безрозмірним часом; $U_x = u_x/U_a$ та $U_y = u_y/U_a$ – безрозмірними компонентами швидкості у напрямках x та y ; $\Psi = \psi/(D_0U_a)$ та $\Omega = \omega D_0/U_a$ – безрозмірними функцією течії та завихореністю відповідно; $P = p/(\rho U_a^2)$ – безрозмірним тиском; $\text{Re} = U_a D_0/\nu$ – числом Рейнольдса осередненої по поперечному перерізу каналу базової течії; $Q = q/(U_a D_0)$ – безрозмірною об'ємною витратою рідини в каналі на одиницю його глибини; $D = d/D_0$ та $L = l/D_0$ – безрозмірними шириною та довжиною розширення відповідно; $L_u = l_u/D_0$ та $L_d = l_d/D_0$ – безрозмірними відстанями l_u та l_d ; а також було враховано, що $U_a = 2U_0/3$ (див. після умов (7)).

3.3. Розрахункова область, обчислювальна сітка та дискретні співвідношення

На Рис. 1 зображено область, в якій розшукується розв'язок задачі. Її безрозмірна ліва межа $X = -L_u$ вибирається там, де базова течія ще незбурена розширенням, а безрозмірна права – $X = L + L_d$, де збурення течії вже зникають, і вона стає такою, якою була при $X = -L_u$. Що стосується значень безрозмірних відстаней L_u та L_d , то для розглядуваних у даній статті меж зміни швидкості базової течії вони вибираються у межах $L_u \leq 0.5$, $L_d \leq 12$ [5, 10, 11, 15].

У вибраній області вводиться рівномірна прямокутна сітка з малими кроками ΔX

по координаті X та Δ_Y по координаті Y (Рис. 2):

$$\begin{aligned} X_n &= X_{n-1} + \Delta_X, & \Delta_X &= \text{const}_X \ll 1; \\ Y_m &= Y_{m-1} + \Delta_Y, & \Delta_Y &= \text{const}_Y \ll 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Час же інтегрування розбивається на малі проміжки зі сталим кроком Δ_T :

$$\begin{aligned} T_k &= T_{k-1} + \Delta_T = k\Delta_T, \\ \Delta_T &= \text{const}_T \ll 1, \\ T_0 &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Після цього у вузлах обчислювальної сітки (25), (26) проводиться дискретизація наведених у попередньому підрозділі співвідношень. При її проведенні значення відповідної величини f у вузлі X_n, Y_m, T_k позначається через $f_{n,m}^k$:

$$f_{n,m}^k = f(X, Y, T)|_{X=X_n, Y=Y_m, T=T_k}.$$

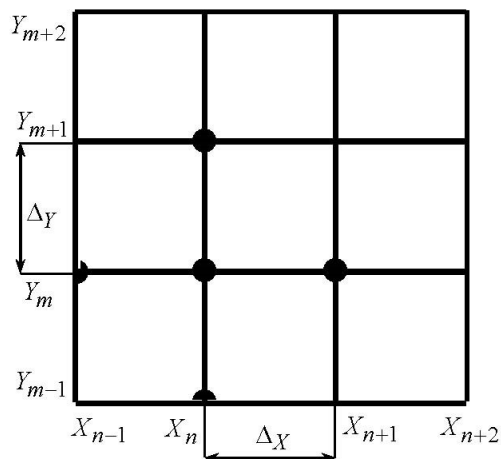


Рис. 2. Сітка розбиття розрахункової області

3.3.1. Дискретні аналоги безрозмірних рівнянь

Дискретні аналоги представлень (19) для компонент швидкості одержуються після застосування до останніх центральних різниць по відповідних координатах [16–18]:

$$\begin{aligned} (U_x)_{n,m}^k &= \frac{\Psi_{n,m+1}^k - \Psi_{n,m-1}^k}{2\Delta_Y}, \\ (U_y)_{n,m}^k &= -\frac{\Psi_{n+1,m}^k - \Psi_{n-1,m}^k}{2\Delta_X}. \end{aligned} \quad (27)$$

Співвідношення (27) мають другий порядок точності (тут не наводиться дискретний аналог представлення (19) для завихореності через відсутність необхідності його подальшого використання).

Для дискретизації рівняння (20) використовуються одностороння різниця вперед за часом, односторонні різниці проти потоку та п'ятиточкові шаблони по відповідних координатах [16–18]. Так, застосування до нестационарного члена у (20) односторонньої різниці вперед за часом дає його дискретний аналог першого порядку точності:

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_{n,m}^k = \frac{\Omega_{n,m}^{k+1} - \Omega_{n,m}^k}{\Delta_T}. \quad (28)$$

До конвективного ж члена рівняння (20) застосовуються односторонні різниці проти потоку по координатах X та Y , які мають другий порядок точності [16–18]:

$$\left(U_x \frac{\partial \Omega}{\partial X} \right)_{n,m}^k = \begin{cases} (U_x)_{n,m}^k \frac{\Omega_{n,m}^k - \Omega_{n-1,m}^k}{\Delta_X}; (U_x)_{n,m}^k \geq 0, \\ (U_x)_{n,m}^k \frac{\Omega_{n+1,m}^k - \Omega_{n,m}^k}{\Delta_X}; (U_x)_{n,m}^k < 0, \end{cases} \quad (29)$$

$$\left(U_y \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right)_{n,m}^k = \begin{cases} (U_y)_{n,m}^k \frac{\Omega_{n,m}^k - \Omega_{n,m-1}^k}{\Delta_Y}; (U_y)_{n,m}^k \geq 0, \\ (U_y)_{n,m}^k \frac{\Omega_{n,m+1}^k - \Omega_{n,m}^k}{\Delta_Y}; (U_y)_{n,m}^k < 0. \end{cases}$$

Що стосується дифузійного члена у (20), то для одержання його дискретного аналога другого порядку точності використовується зазначений п'ятиточковий шаблон [16–18]. Це дає

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} \right)_{n,m}^k = \frac{\Omega_{n+1,m}^k - 2\Omega_{n,m}^k + \Omega_{n-1,m}^k}{\Delta_X^2}, \quad (30)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right)_{n,m}^k = \frac{\Omega_{n,m+1}^k - 2\Omega_{n,m}^k + \Omega_{n,m-1}^k}{\Delta_Y^2}.$$

Наявність співвідношень (28)–(30), а також використання виразів (27) у представленнях (29) дозволяє записати дискретний аналог рівняння (20):

$$\Omega_{n,m}^{k+1} = C_{n,m}^k \Omega_{n,m}^k + C_{n-1,m}^k \Omega_{n-1,m}^k + C_{n+1,m}^k \Omega_{n+1,m}^k + C_{n,m-1}^k \Omega_{n,m-1}^k + C_{n,m+1}^k \Omega_{n,m+1}^k, \quad (31)$$

коефіцієнти якого мають такий вигляд:

$$C_{n,m}^k = \begin{cases} 1 - \alpha_{XY} ((\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k - (\Delta\Psi)_{n,m,X}^k) - 2\alpha_X - 2\alpha_Y; & (U_x)_{n,m}^k \geq 0, & (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ 1 - \alpha_{XY} ((\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k + (\Delta\Psi)_{n,m,X}^k) - 2\alpha_X - 2\alpha_Y; & n (U_x)_{n,m}^k \geq 0, & (U_y)_{n,m}^k < 0; \\ 1 + \alpha_{XY} ((\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k + (\Delta\Psi)_{n,m,X}^k) - 2\alpha_X - 2\alpha_Y; & (U_x)_{n,m}^k < 0, & (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ 1 + \alpha_{XY} ((\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k - (\Delta\Psi)_{n,m,X}^k) - 2\alpha_X - 2\alpha_Y; & (U_x)_{n,m}^k < 0, & (U_y)_{n,m}^k < 0; \end{cases}$$

$$C_{n-1,m}^k = \begin{cases} \alpha_{XY} (\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k + \alpha_X; & (U_x)_{n,m}^k \geq 0, & (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_{XY} (\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k + \alpha_X; & (U_x)_{n,m}^k \geq 0, & (U_y)_{n,m}^k < 0; \\ \alpha_X; & (U_x)_{n,m}^k < 0, & (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_X; & (U_x)_{n,m}^k < 0, & (U_y)_{n,m}^k < 0; \end{cases}$$

$$C_{n+1,m}^k = \begin{cases} \alpha_X; & (U_x)_{n,m}^k \geq 0, & (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_X; & (U_x)_{n,m}^k \geq 0, & (U_y)_{n,m}^k < 0; \\ -\alpha_{XY} (\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k + \alpha_X; & (U_x)_{n,m}^k < 0, & (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ -\alpha_{XY} (\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k + \alpha_X; & (U_x)_{n,m}^k < 0, & (U_y)_{n,m}^k < 0; \end{cases}$$

$$C_{n,m-1}^k = \begin{cases} -\alpha_{XY}(\Delta\Psi)_{n,m,X}^k + \alpha_Y; & (U_x)_{n,m}^k \geq 0, \quad (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_Y; & (U_x)_{n,m}^k \geq 0, \quad (U_y)_{n,m}^k < 0; \\ -\alpha_{XY}(\Delta\Psi)_{n,m,X}^k + \alpha_Y; & (U_x)_{n,m}^k < 0, \quad (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_Y; & (U_x)_{n,m}^k < 0, \quad (U_y)_{n,m}^k < 0; \end{cases}$$

$$C_{n,m+1}^k = \begin{cases} \alpha_Y; & (U_x)_{n,m}^k \geq 0, \quad (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_{XY}(\Delta\Psi)_{n,m,X}^k + \alpha_Y; & (U_x)_{n,m}^k \geq 0, \quad (U_y)_{n,m}^k < 0; \\ \alpha_Y; & (U_x)_{n,m}^k < 0, \quad (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_{XY}(\Delta\Psi)_{n,m,X}^k + \alpha_Y; & (U_x)_{n,m}^k < 0, \quad (U_y)_{n,m}^k < 0. \end{cases}$$

Тут величини α_X , α_Y і α_{XY} є відповідними відношеннями кроків просторово-часової решітки (25), (26):

$$\alpha_X = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\Delta_T}{\Delta_X^2}, \quad \alpha_Y = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\Delta_T}{\Delta_Y^2}, \quad \alpha_{XY} = \frac{\Delta_T}{2\Delta_X\Delta_Y},$$

а $(\Delta\Psi)_{n,m,X}^k$ і $(\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k$ – приростами функції Ψ у напрямках X та Y цієї решітки відповідно:

$$(\Delta\Psi)_{n,m,X}^k = \Psi_{n+1,m}^k - \Psi_{n-1,m}^k,$$

$$(\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k = \Psi_{n,m+1}^k - \Psi_{n,m-1}^k.$$

Що стосується дискретних аналогів рівнянь Пуассона (21) для функції течії і (22) для тиску, то вони мають подібний вигляд:

$$\frac{\Psi_{n+1,m}^k - 2\Psi_{n,m}^k + \Psi_{n-1,m}^k}{\Delta_X^2} + \frac{\Psi_{n,m+1}^k - 2\Psi_{n,m}^k + \Psi_{n,m-1}^k}{\Delta_Y^2} = -\Omega_{n,m}^k, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1,m}^k - 2P_{n,m}^k + P_{n-1,m}^k}{\Delta_X^2} + \frac{P_{n,m+1}^k - 2P_{n,m}^k + P_{n,m-1}^k}{\Delta_Y^2} = \\ = - \left[\left(\frac{\partial U_x}{\partial X} \right)^2 + 2 \frac{\partial U_x}{\partial Y} \frac{\partial U_y}{\partial X} + \left(\frac{\partial U_y}{\partial Y} \right)^2 \right]_{n,m}^k. \end{aligned} \quad (33)$$

Співвідношення (32), (33) мають другий порядок точності і одержуються після застосування до рівнянь (21), (22) п'ятиточкового шаблону по координатах X та Y [16–18].

3.3.2. Дискретні аналоги безрозмірних граничних умов та їх застосування до рівнянь (27), (31)–(33)

Дискретні аналоги безрозмірних граничних умов для функції течії Ψ і завихореності Ω зі співвідношень (23) записуються наступним чином:

$$\begin{aligned} \Psi_{n,m}^k \Big|_{X=-L_u, L+L_d} &= \frac{3}{2}Y \left(1 - \frac{4}{3}Y^2 \right), & \Psi_{n,m}^k \Big|_{S_{ch}^+, S_{exp}^+} &= \frac{1}{2}, & \Psi_{n,m}^k \Big|_{S_{ch}^-, S_{exp}^-} &= -\frac{1}{2}, \\ (\Psi_{n,m+1}^k - \Psi_{n,m-1}^k)_{S_{ch}, S_{exp}^h} &= 0, & (\Psi_{n+1,m}^k - \Psi_{n-1,m}^k)_{S_{exp}^v} &= 0, \\ \Omega_{n,m}^k \Big|_{X=-L_u, L+L_d} &= 12Y, & \Omega_{n,m}^k \Big|_{S_{ch}, S_{exp}^h} &= - \frac{\Psi_{n,m+1}^k - 2\Psi_{n,m}^k + \Psi_{n,m-1}^k}{\Delta_Y^2} \Big|_{S_{ch}, S_{exp}^h}, \\ \Omega \Big|_{S_{exp}^v} &= - \frac{\Psi_{n+1,m}^k - 2\Psi_{n,m}^k + \Psi_{n-1,m}^k}{\Delta_X^2} \Big|_{S_{exp}^v}. \end{aligned}$$

Для тиску ж P дискретні аналоги граничних умов з (23) виглядають так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \right)_{n,m}^k \Big|_{S_{ch}, S_{exp}} &= 0, \\ \left(\frac{\partial P}{\partial X} \right)_{n,m}^k \Big|_{S_{exp}^v} &= \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{(U_x)_{n+1,m}^k - 2(U_x)_{n,m}^k + (U_x)_{n-1,m}^k}{\Delta_X^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(U_x)_{n,m+1}^k - 2(U_x)_{n,m}^k + (U_x)_{n,m-1}^k}{\Delta_Y^2} \right) - \frac{(U_x)_{n,m}^{k+1} - (U_x)_{n,m}^k}{\Delta_T} \right]_{S_{exp}^v}, \\ \left(\frac{\partial P}{\partial Y} \right)_{n,m}^k \Big|_{S_{ch}, S_{exp}^h} &= \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{(U_y)_{n+1,m}^k - 2(U_y)_{n,m}^k + (U_y)_{n-1,m}^k}{\Delta_X^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(U_y)_{n,m+1}^k - 2(U_y)_{n,m}^k + (U_y)_{n,m-1}^k}{\Delta_Y^2} \right) - \frac{(U_y)_{n,m}^{k+1} - (U_y)_{n,m}^k}{\Delta_T} \right]_{S_{ch}, S_{exp}^h} \end{aligned}$$

(для компонент швидкості тут треба використовувати представлення (27)).

Наведені співвідношення дають можливість вираховувати значення всіх членів рівнянь (27), (31)–(33) на границі розрахункової області.

3.3.3. Дискретні аналоги безрозмірних початкових умов та їх застосування до рівнянь (27), (31)–(33)

Дискретні аналоги безрозмірних початкових умов (24) мають такий вигляд:

$$\Psi_{n,m}^k \Big|_{k=0} = 0, \quad \Omega_{n,m}^k \Big|_{k=0} = 0, \quad P_{n,m}^k \Big|_{k=0} = 0.$$

Вони дозволяють визначати значення всіх членів рівнянь (27), (31)–(33) у початковий момент часу в усій розрахунковій області.

3.4. Розв'язування рівнянь (27), (31)–(33)

Аналіз алгебраїчних рівнянь (31), (32) показує таке:

- через нелінійність членів правої частини (31) (які залежать від добутків $\Psi\Omega$ у відповідних точках просторово-часової решітки (25), (26)), це рівняння є нелінійним;
- рівняння (31) і (32) є зв'язаними.

Проте при детальнішому вивченні рівняння (31) неважко помітити, що всі доданки у його правій частині є відомими величинами (бо вони визначаються на попередньому часовому етапі $T = T_k$, а в початковий момент часу вони задані (див. підрозділ 3.3.3)). Відтак (31) є не рівнянням, а чисельною схемою для безпосереднього визначення значень завихореності $\Omega_{n,m}^{k+1}$ на основі відомої правої частини. Система ж (31), (32) відповідно не є системою зв'язаних алгебраїчних рівнянь.

Наявність одержаних на основі схеми (31) значень Ω в усіх вузлах сітки інтегрування (25), (26) дозволяє перейти до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) (32) з відомою правою частиною.

Для розв'язування СЛАР в літературі застосовуються прямі та ітераційні методи. Перші з них використовуються у разі СЛАР невеликої розмірності і дають добрі результати. Якщо ж системи рівнянь мають велику розмірність, а їхні матриці є ще й розрідженими, то в цьому разі прямі методи потребують великих об'ємів пам'яті комп'ютера і приводять до величезних затрат часу [5, 16–18]. Відтак їхнє використання тут недоцільне. Натомість для ітераційних методів при роботі зі СЛАР великої розмірності необхідно набагато менше комп'ютерної пам'яті і часу. При цьому вони зберігають розрідженість матриць СЛАР (у разі такої властивості перших) і дають задовільні результати [5, 16–18].

Беручи до уваги щойно зазначене, а також розмір та ступінь розрідженості матриці системи рівнянь (32) (яка є блочно-трюхдіагональною), для її розв'язування у даній роботі вибирається ітераційний метод послідовної верхньої релаксації [16–18]. Цей метод має другий порядок точності, а його чисельна схема для системи (32) має наступний вигляд:

$$\Psi_{n,m}^{k+1} = (1-\gamma)\Psi_{n,m}^k + \frac{\gamma}{2(1+\beta^2)} (\Psi_{n+1,m}^k + \Psi_{n-1,m}^k + \beta^2\Psi_{n,m+1}^k + \beta^2\Psi_{n,m-1}^k + \Delta_X^2\Omega_{n,m}^k) \quad (34)$$

(тут γ – параметр релаксації ($1 < \gamma \leq 2$), а $\beta = \Delta_X/\Delta_Y$ – відношення кроків решітки (25)). Як і у випадку співвідношення (31), у схемі (34) всі величини справа відомі. А тому значення $\Psi_{n,m}^{k+1}$ у відповідних вузлах сітки (25), (26) визначаються шляхом виконання операцій, передбачених схемою (34).

Далі вираховані значення функції Ψ дають можливість знайти (на основі (27)) відповідні значення компонент швидкості U_x, U_y і підставити їх у праву частину системи рівнянь (33). Після цього для розв'язування СЛАР (33) (яка відрізняється від СЛАР (32) лише виглядом правої частини) застосовується той же ітераційний метод послідовної верхньої релаксації:

$$P_{n,m}^{k+1} = (1-\gamma)P_{n,m}^k + \frac{\gamma}{2(1+\beta^2)} (P_{n+1,m}^k + P_{n-1,m}^k + \beta^2P_{n,m+1}^k + \beta^2P_{n,m-1}^k + \Delta_X^2S_{n,m}^k), \quad (35)$$

$$S_{n,m}^k = \left[\left(\frac{\partial U_x}{\partial X} \right)^2 + 2 \frac{\partial U_x}{\partial Y} \frac{\partial U_y}{\partial X} + \left(\frac{\partial U_y}{\partial Y} \right)^2 \right]_{n,m}^k.$$

Як і в схемах (31) та (34), у схемі (35) всі величини справа є відомими. Це дозволяє визначати значення тиску $P_{n,m}^{k+1}$ у відповідних вузлах сітки інтегрування (25), (26) шляхом виконання операцій, вказаних у схемі (35).

4. ВИСНОВКИ

1. Розроблено чисельний метод розв'язування задачі у змінних функція течії–завихреність–тиск про рух рідини у нескінченному прямому плоскому жорсткостінному каналі з локальним жорстким осесиметричним розширенням прямокутної форми. Цей метод має перший порядок точності по часовій та другий порядок точності по просторових координатах.
2. У розробленому методі сформульована задача розв'язується шляхом а) введення функції течії і завихреності та відповідного переходу від змінних швидкість–тиск до змінних функція течії–завихреність–тиск, б) подальшого обезрозмірювання одержаних у результаті такого переходу співвідношень, в) вибору розрахункової області і відповідної просторово-часової обчислювальної сітки, г) дискретизації безрозмірних співвідношень у відповідних вузлах цієї сітки та подальшого розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь, одержаних внаслідок зазначеної дискретизації.
3. При виконанні вказаної дискретизації часова її частина проводиться на основі односторонньої різниці вперед, а просторова – на основі односторонніх різниць проти потоку (для конвективного члена рівняння переносу завихреності) та п'яти-точкових шаблонів (для дифузійного члена зазначеного рівняння та рівнянь Пуассона для функції течії і тиску) по відповідних координатах.
4. Для розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь для функції течії і тиску використовується ітераційний метод послідовної верхньої релаксації. Одержане ж після дискретизації алгебраїчне співвідношення для завихреності не потребує застосування ніякого методу розв'язування, оскільки вже є розрахунковою схемою для безпосереднього визначення значень завихреності на основі відомих значень відповідних величин, знайдених у попередній момент часу.

ДОДАТОК. ПОЗНАЧЕННЯ

D_0 ширина каналу;

d, l ширина і довжина розширення відповідно;

D, L безрозмірні ширина і довжина розширення відповідно;

l_u, L_u розмірна та безрозмірна відстані від лівої межі розрахункової області до розширення;

- l_d, L_d розмірна та безрозмірна відстані від розширення до правої межі розрахункової області;
- ρ, ν масова густина і кінематична в'язкість рідини відповідно;
- q, Q розмірна та безрозмірна об'ємні витрати рідини в каналі на одиницю його глибини відповідно;
- x, y розмірні прямокутні Декартові координати;
- X, Y безрозмірні прямокутні Декартові координати;
- t, T розмірний та безрозмірний час відповідно;
- $\Delta_X, \Delta_Y, \Delta_T$ малі сталі кроки по X, Y, T відповідно;
- u_x, U_x розмірна та безрозмірна компоненти швидкості рідини у напрямку x ;
- u_y, U_y розмірна та безрозмірна компоненти швидкості рідини у напрямку y ;
- U_0 максимальна осьова швидкість базового потоку;
- U_a середня у поперечному перерізі каналу осьова швидкість базового потоку;
- Re число Рейнольдса осередненої по поперечному перерізу каналу базової течії;
- ψ, Ψ розмірна та безрозмірна функції течії відповідно;
- ω, Ω розмірна та безрозмірна завихреність відповідно;
- p, P розмірний та безрозмірний тиск відповідно;
- p_u, p_d тиск достатньо далеко перед і далеко за розширенням відповідно;
- P_u, P_d безрозмірний тиск достатньо далеко перед і далеко за розширенням відповідно;
- Δp перепад тиску;
- ρU_a^2 подвоєний середній динамічний напір базової течії;
- S_{ch}, S_{exp} поверхня каналу та розширення відповідно;
- n зовнішня одинична нормаль до відповідної поверхні;
- X_n, Y_m, T_k вузли обчислювальної сітки;
- $f, f_{n,m}^k$ умовне позначення відповідних величин;
- $\alpha_X, \alpha_Y, \alpha_{XY}$ коефіцієнти.

REFERENCES

- [1] J. C. Lasheras, “The biomechanics of arterial aneurysms,” vol. 39, no. 1, pp. 293–319, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.39.050905.110128>
- [2] J. R. Cebal, F. Mut, M. Raschi, E. Scrivano, R. Ceratto, P. Lylyk, and C. M. Putman, “Aneurysm rupture following treatment with flow-diverting stents: computational hemodynamics analysis of treatment,” vol. 32, no. 1, pp. 27–33, 2010. DOI: <https://doi.org/10.3174/ajnr.a2398>
- [3] Z. Kulcsár, E. Houdart, A. Bonafé, G. Parker, J. Millar, A. J. P. Goddard, S. Renowden, G. Gál, B. Turowski, K. Mitchell, F. Gray, M. Rodriguez, R. van den Berg, A. Gruber, H. Desal, I. Wanke, and D. A. Rüfenacht, “Intra-aneurysmal thrombosis as a possible cause of delayed aneurysm rupture after flow-diversion treatment,” vol. 32, no. 1, pp. 20–25, 2010. DOI: <https://doi.org/10.3174/ajnr.a2370>
- [4] K. Rhee, M. H. Han, and S. H. Cha, “Changes of flow characteristics by stenting in aneurysm models: Influence of aneurysm geometry and stent porosity,” vol. 30, no. 7, pp. 894–904, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1114/1.1500406>
- [5] A. O. Borisyuk, “A method to solve a problem of flow in a channel with an axisymmetric rectangular expansion,” vol. 41, no. 1, pp. 59–68, 2019. DOI: <https://doi.org/10.18372/2310-5461.41.13530>
- [6] B. V. Rathish Kumar and K. B. Naidu, “Hemodynamics in aneurysm,” vol. 29, no. 2, pp. 119–139, 1996. DOI: <https://doi.org/10.1006/cbmr.1996.0011>
- [7] D. M. Sforza, C. M. Putman, and J. R. Cebal, “Hemodynamics of cerebral aneurysms,” vol. 41, no. 1, pp. 91–107, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.40.111406.102126>
- [8] L. G. Loitsyanskii, *Mechanics of liquids and gases*. Oxford: Pergamon Press, 2015.
- [9] G. K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1967.
- [10] A. O. Borisyuk, “Study of the flow and acoustic fields in a rigid-walled channel of circular cross-section with a local axisymmetric narrowing. part 1. a theory,” *International Journal of Fluid Mechanics Research*, vol. 34, no. 2, pp. 99–114, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1615/interjfluidmechres.v34.i2.10>
- [11] A. O. Borisyuk, “Study of the flow and acoustic fields in a rigid-walled channel of circular cross-section with a local axisymmetric narrowing. part 2. numerical results,” *International Journal of Fluid Mechanics Research*, vol. 34, no. 3, pp. 191–209, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1615/interjfluidmechres.v34.i3.10>
- [12] V. S. Malyuga, “Numerical investigation of flow in a duct with two serial stenosis. an algorithm of the solution,” *Applied Hydromecanics*, vol. 12 (84), no. 4, pp. 45–62, 2010.

- [13] A. V. Shaldenko and A. A. Gourzhii, “Analysis of the heat-transfer processes in a straight channel with insertions at low Reynolds numbers,” *Applied Hydromecanics*, vol. 17 (89), no. 3, pp. 55–66, 2017.
- [14] E. V. Brujatskiy, A. G. Kostin, and E. I. Nikiforovich, “Numerical investigation of the velocity and pressure fields in a flat duct having a rectangular ledge on the wall,” *Applied Hydromecanics*, vol. 13 (85), no. 3, pp. 33–47, 2011.
- [15] A. O. Borisyuk, “Experimental study of wall pressure fluctuations in rigid and elastic pipes behind an axisymmetric narrowing,” *Journal of Fluids and Structures*, vol. 26, no. 4, pp. 658–674, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2010.03.005>
- [16] J. H. Ferziger and M. Perić, *Computational methods for fluid dynamics*. Berlin: Springer, 2002.
- [17] C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2007.
- [18] P. J. Roache, *Computational fluid dynamics*. Albuquerque, NM: Hermosa, 1976.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Lasheras J. C. The biomechanics of arterial aneurysms. — 2007. — Vol. 39, no. 1. — P. 293–319.
- [2] Aneurysm rupture following treatment with flow-diverting stents: computational hemodynamics analysis of treatment / Cebal J. R., Mut F., Raschi M., Scrivano E., Ceratto R., Lylyk P., and Putman C. M. — 2010. — Vol. 32, no. 1. — P. 27–33.
- [3] Intra-aneurysmal thrombosis as a possible cause of delayed aneurysm rupture after flow-diversion treatment / Kulcsár Z., Houdart E., Bonafé A., Parker G., Millar J., Goddard A. J. P., Renowden S., Gál G., Turowski B., Mitchell K., Gray F., Rodriguez M., van den Berg R., Gruber A., Desal H., Wanke I., and Rüfenacht D. A. — 2010. — Vol. 32, no. 1. — P. 20–25.
- [4] Rhee K., Han M. H., Cha S. H. Changes of flow characteristics by stenting in aneurysm models: Influence of aneurysm geometry and stent porosity. — 2002. — Vol. 30, no. 7. — P. 894–904.
- [5] Борисюк А. О. Метод розв’язування задачі про течію в каналі з осесиметричним прямокутним розширенням. — 2019. — Т. 41, № 1. — С. 59–68.
- [6] Rathish Kumar B. V., Naidu K. B. Hemodynamics in aneurysm. — 1996. — Vol. 29, no. 2. — P. 119–139.
- [7] Sforza D. M., Putman C. M., Cebal J. R. Hemodynamics of cerebral aneurysms. — 2009. — Vol. 41, no. 1. — P. 91–107.
- [8] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — Москва : Дрофа, 2003. — 840 с.

- [9] Batchelor G. K. An introduction to fluid dynamics. — Cambridge : Cambridge University Press, 1967. — 615 p.
- [10] Borisyuk A. O. Study of the flow and acoustic fields in a rigid-walled channel of circular cross-section with a local axisymmetric narrowing. Part 1. A theory // International Journal of Fluid Mechanics Research. — 2007. — Vol. 34, no. 2. — P. 99–114.
- [11] Borisyuk A. O. Study of the flow and acoustic fields in a rigid-walled channel of circular cross-section with a local axisymmetric narrowing. Part 2. Numerical results // International Journal of Fluid Mechanics Research. — 2007. — Vol. 34, no. 3. — P. 191–209.
- [12] Малюга В. С. Численное исследование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Алгоритм решения // Прикладна гідромеханіка. — 2010. — Т. 12 (84), № 4. — С. 45–62.
- [13] Шалденко А. В., Гуржий А. А. Анализ процессов теплопереноса в прямолинейном канале со вставками при малых числах Рейнольдса // Прикладна гідромеханіка. — 2017. — Т. 17 (89), № 3. — С. 55–66.
- [14] Бруязцкий Е. В., Костин А. Г., Никифорович Е. И. Численное исследование полей скорости и давления в плоском канале при наличии на его стенке квадратного препятствия // Прикладна гідромеханіка. — 2011. — Т. 13 (85), № 3. — С. 33–47.
- [15] Borisyuk A. O. Experimental study of wall pressure fluctuations in rigid and elastic pipes behind an axisymmetric narrowing // Journal of Fluids and Structures. — 2010. — Vol. 26, no. 4. — P. 658–674.
- [16] Ferziger J. H., Perić M. Computational methods for fluid dynamics. — Berlin : Springer, 2002. — 424 p.
- [17] Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows. — Oxford : Butterworth-Heinemann, 2007. — 656 p.
- [18] Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — Москва : Мир, 1980. — 618 с.

А. А. Борисюк

Исследование течения в прямом плоском жестком канале с осесимметричным расширением в переменных функция течения–завихренность–давление. Часть 1. Теория

Разработан численный метод решения задачи в переменных функция тока–завихренность–давление о движении жидкости в бесконечном прямом плоском жестком канале с локальным жестким осесимметричным расширением прямоугольной формы. Этот метод имеет первый порядок точности по временной и второй порядок точности по пространственным координатам. В разработанном методе сформулированная задача решается путем введения функции тока и завихренности и соответствующего перехода от переменных скорость–давление к переменным

функция тока–завихренность–давление, дальнейшего обезразмеривания полученных в результате такого перехода соотношений, выбора расчетной области и соответствующей пространственно-временной вычислительной сетки с малыми постоянными шагами по временной и пространственным координатам, дискретизации указанных безразмерных соотношений в соответствующих узлах выбранной сетки и дальнейшего решения алгебраических уравнений, полученных в следствии указанной дискретизации. При выполнении дискретизации временная ее часть проводится на основании односторонней разницы вперед, а пространственная – на основании односторонних разниц против потока (для конвективного члена нелинейного уравнения переноса завихренности) и пятиточечных шаблонов (для диффузионного члена указанного уравнения и уравнений Пуассона для функции тока и давления) по соответствующим координатам. Для решения линейных алгебраических уравнений для функции тока и давления, которые отличаются друг от друга лишь видом известной правой части, используется итерационный метод последовательной верхней релаксации. Полученное же после дискретизации алгебраическое соотношение для завихренности не требует применения никакого метода решения, поскольку уже является расчетной схемой для непосредственного определения значений завихренности на основании известных значений соответствующих величин, найденных в предыдущий момент времени. В начальный момент времени значения всех величин считаются заданными.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: течение, канал, расширение, метод

A. O. Borysyuk

Studying the flow in a straight flat rigid channel with axisymmetric expansion in terms of variables stream function–vorticity–pressure.

Part 1. Theory

A numerical method in the variables stream function–vorticity–pressure is developed to solve a problem of fluid motion in an infinite straight flat rigid-walled channel with a local rigid axisymmetric expansion of rectangular shape. The method has the first order of accuracy in a temporal and the second order of accuracy in spatial coordinates. In the developed method, the formulated problem is solved by means of introducing the stream function and the vorticity, and the corresponding transition from the variables velocity–pressure to the variables stream function–vorticity–pressure, subsequent non-dimensionalizing the relationships obtained on the basis of that transition, choice of both the computational domain and the corresponding spatial and temporal integration mesh, having small constant steps in the temporal and spatial coordinates, discretization of the noted non-dimensional relationships in the appropriate nodes of the chosen mesh and subsequent solving the algebraic equations obtained with the use of the indicated discretization. In making the discretization, its temporal part is carried out on the basis of the two-point upward differencing scheme, whereas the spatial one is based on the two-point adverse flow differencing schemes (for the convective term of the non-linear vorticity equation) and the fifth-point differencing schemes (for the diffusive term of the noted equation and the Poisson's equations for the stream function and the pressure) for the corresponding co-ordinates. The iterative method of successive over relaxation is applied to solve the linear algebraic equations for the stream function and the pressure (the only difference between these equations is in their right parts, which are known). As for the algebraic relationship for the vorticity

(that was obtained after performing the noted discretization), it does not require application of any method for its solution, because actually it is a computational scheme to find immediately the vorticity on the basis of the known values of the corresponding magnitudes found at the previous time step (at the initial time, the values of all the magnitudes are prescribed).

KEY WORDS: flow, channel, expansion, method