

УДК 532.5+(075.8)

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕЧІЇ В ПРЯМОМУ ПЛОСКОМУ ЖОРСТКОМУ КАНАЛІ З ДВОМА ОСЕСИМЕТРИЧНИМИ ЖОРСТКОСТІННИМИ ЗВУЖЕННЯМИ ПРЯМОКУТНОЇ ФОРМИ. ЧАСТИНА 1. ТЕОРІЯ

А. О. Борисюк

*Інститут гідромеханіки НАН України
вул. Марії Капніст, 8/4, 03057, Київ, Україна
†E-mail: andriy_borysyuk@yahoo.com*

Отримано 25.06.2018

Розроблено чисельний метод розв'язання задачі про рух рідини в прямому плоскому жорсткому каналі з двома осесиметричними жорсткостінними звуженнями прямокутної форми. Метод має другий порядок точності по просторових координатах і часу. При цьому рівняння Нав'є–Стокса і нерозривності розв'язуються у змінних швидкість–тиск за допомогою інтегрування по елементарних об'ємах, на які розбивається розрахункова область. Одержані в результаті інтегральні рівняння підлягають просторово-часовій дискретизації, що призводить до необхідності розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь. Часова частина дискретизації проводиться на основі неявної триточкової несиметричної схеми з різницями назад, а просторова – на основі TVD-схеми з відповідною схемою дискретизації просторових похідних. Розв'язання зазначених алгебраїчних рівнянь проводиться в три етапи. Спочатку дискретне рівняння кількості руху переписується у вигляді рівняння для швидкості. Потім на основі дискретного рівняння нерозривності виводиться рівняння для тиску. Після цього до одержаних зв'язаних нелінійних алгебраїчних рівнянь для швидкості й тиску застосовується процедура знаходження й узгодження між собою послідовних наближень цих величин. При обчисленні першого наближення в рівнянні для швидкості невідомі значення тиску та швидкості (у виразі для потоку) замінюють їхніми значеннями, знайденими у попередній момент часу. При знаходженні ж наступних наближень ці величини замінюють уже відомими попередніми наближеннями. Кількість наближень визначається заданою точністю розв'язку. Це дозволяє переходити від розв'язання зв'язаних систем нелінійних алгебраїчних рівнянь для швидкості і тиску до відповідних незалежних лінійних рівнянь. Для розв'язання ж систем лінійних алгебраїчних рівнянь застосовується ітераційний алгоритм з використанням методів відкладеної корекції та спряжених градієнтів, а також солверів ICCG (для симетричних матриць) і Bi-CGSTAB (для асиметричних матриць).

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *течія, канал, звуження, рівняння Нав'є–Стокса, ітераційний метод*

1. ВСТУП

Дослідження течій рідин у прямих каналах актуальне для нафтогазової та хімічної промисловості, автомобіле- та літакобудування, архітектури, медицини, комунального господарства тощо. Значний інтерес пов'язаний з вивченням поведінки течій у каналах з локальними звуженнями, які формують з'єднувальні муфти, зварювальні шви, перехідники, стенози тощо. Пояснюється це тим, що в околах нерегулярностей геометрії каналів різко змінюються структура та характер течії, її локальні (швидкість, тиск, дотичні напруження) та інтегральні (об'ємна витрата, середня швидкість) характеристики. Такі зміни можуть призводити до небажаних наслідків не лише поблизу, але й за межами нерегулярностей [1–5].

Як показує аналіз наукової літератури, розгляду течій в каналах зі звуженнями приділялася значна увага. Загалом усі такі дослідження можна розділити на дві групи. До першої з них слід віднести численні роботи, в яких розглядалися течії в каналах з одним звуженням. При цьому зазвичай вважалося, що канали та їхні звуження – жорсткі та мають найпростішу форму. Течії на вході у звуження¹ були стаціонарними, осесиметричними та ламінарними, а рідини вважались однорідними, нестисливими та ньютонівськими (див., наприклад, [1–4, 6–8] та відповідні посилання в них). Це давало можливість, з одного боку, в рамках вибраних моделей та з прийнятною для потреб практики точністю з'ясувати вплив основних параметрів каналу, його звуження і базового потоку на течію в околі звуження і за його межами, а з іншого – значно спростувати розв'язання відповідних задач.

До основних належать параметри, які мають найбільший вплив на досліджувані поля. Для звуження такими є його ступінь і довжина, плавність форми та ступінь відхилення від осової симетрії. Для каналу це – характерні геометричні розміри поперечного перерізу і жорсткість стінок на згин. Для рідини основними параметрами є в'язкість і масова густина, а для базової течії – осьова компонента швидкості, її осереднення по поперечному перерізу каналу, число Рейнольдса й об'ємна витрата.

З-поміж одержаних результатів слід відзначити встановлення існування областей збуреної звуженням течії та її стабілізації й поступового переходу до режиму, який був перед звуженням. На початку ж регіону збурення, тобто безпосередньо перед входом та/або на вході у звуження, зазвичай спостерігається незначний попередній відрив потоку із зоною зворотного руху біля стінки каналу та подальше його приєднання. Після цього за горловиною звуження має місце основний відрив течії у вигляді струменя та зворотний рух (між струменем та стінкою каналу). Деякі дослідники говорять ще й про вторинний відрив течії у зоні зворотного руху, який, за виконання відповідних умов, з'являється біля стінки каналу безпосередньо за звуженням [6]. Швидкість на осі каналу починаючи з горловини звуження і майже до кінця зони збурення, залишається практично такою ж, як і в самій горловині, а далі починає швидко зменшуватися [2–4, 6–9]. В області стабілізації течії спостерігається подальше зменшення швидкості аж до досягнення нею (в самому кінці області) значення швидкості на осі базового потоку. Існують також оцінки для верхніх меж осьових розмірів зазначених областей течії та наближені кількісні співвідношення для довжини області основного відриву для розглянутих

¹Такі течії називаються базовими або вхідними. У разі наявності кількох послідовних звужень базовою є течія перед входом у перше з них

авторами форм звужень [2–4, 7–9].

Щодо тиску, то в звуженні спостерігається його падіння, яке залежить від його форми та геометричних параметрів, жорсткості стінок каналу на згин, сил в'язкості та інерції рідини у звуженні (див., наприклад, [4, 9] та відповідні посилання в них). Окрім іншого, падіння тиску призводить, до зменшення об'ємної витрати рідини в каналі. У разі ж досягнення ступенем звуження відповідного значення (зазвичай понад 50 %), зменшення витрати (як і падіння тиску) стає суттєвим, а при дуже високих ступенях звуження – навіть критичним [4, 9].

Осьові дотичні пристінні напруження в зоні попереднього відриву направлені проти базової течії. Далі, після приєднання потоку, їхній напрям змінюється на протилежний, аж до появи основного відриву. Тут вони також направлені проти вхідного потоку. Після приєднання ж течії дотичні напруження знову змінюють свій напрям на протилежний [4, 9].

Щодо величини зазначених напружень, то в зоні попереднього відриву спочатку має місце їх збільшення, а потім – зменшення з ростом осьової координати. За цією зоною відбувається різке зростання напружень, досягнення ними максимуму безпосередньо перед горловиною звуження та подальше зменшення до нуля на самому початку основного відриву течії. Після цього їхня величина збільшується з ростом осьової координати, а потім, після досягнення максимального значення, знову зменшується до нуля в кінці зони основного відриву [4, 9]. Дослідження поведінки дотичних напружень в області вторинного відриву течії не проводилось.

До другої групи публікацій можна віднести дослідження течій у каналах з кількома звуженнями (див., наприклад, [4, 10–12]). Проте такі роботи нечисленні, а одержані в них результати мають переважно якісний характер.

Такий брак інформації стосовно поведінки течій в каналах за наявності в них кількох локальних звужень і стимулював проведення даної серії досліджень. У першому з них наводиться метод розв'язання базової задачі про рух рідини у прямому плоскому жорсткому каналі з двома жорсткостінними осесиметричними звуженнями прямокутної форми.

Стаття складається з чотирьох розділів, списку літератури і додатку. Розділ [разд. 1](#) – вступний. У розділі [разд. 2](#) сформульовано задачу й записано відповідні рівняння, а також граничні та початкові умови. У розділі [разд. 3](#) дано опис методу її розв'язання. Висновки проведеного дослідження сформульовано в заключному розділі [разд. 4](#). Далі наведено списки цитованої літератури і прийнятих позначень (у додатку).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається прямий плоский нерухомий жорсткостінний канал шириною D з двома осесиметричними жорсткими звуженнями прямокутної форми ([Рис. 1](#)). Звуження мають ширину d_1 і d_2 й довжини l_1 і l_2 , і розташовані на відстані l_{12} одне від одного. У каналі тече в'язка нестислива однорідна ньютонівська рідина з масовою густиною ρ та кінематичною в'язкістю ν . Базова течія перед входом у перше звуження є стаціонарною ламінарною. Вона характеризується об'ємною витратою q на одиницю глибини каналу. Необхідно дослідити течію в околі звужень, а також встановити зв'язок її локальних та інтегральних характеристик з параметрами базової течії, каналу, його звужень і відстані

між ними.

Сформульована задача описується двовимірними рівняннями Нав'є–Стокса:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

і нерозривності:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2)$$

Граничні умови задачі – рівність нулеві швидкості течії на стінці каналу S_{ch} і на повернях обох звужень S_j ($j = 1, 2$):

$$u_i|_{S_{ch}} = 0, \quad u_i|_{S_j} = 0. \quad (3)$$

Унаслідок збереження маси в каналі, об'ємна витрата рідини q має бути однаковою в усіх його поперечних перерізах:

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = 0, \quad q = U_a D. \quad (4)$$

Окрім того, за межами збуреної звуженнями течії – достатньо далеко перед першим звуженням і за другим звуженням – задається параболічний профіль швидкості внаслідок ламінарного характеру базового потоку справедливо

$$u_1|_{x_1=\pm\infty} = U_0 \left(1 - 4 \frac{x_2^2}{D^2} \right), \quad u_2|_{x_1=\pm\infty} = 0. \quad (5)$$

Тут U_0 – максимальна в поперечному перерізі каналу швидкість базового потоку, середня швидкість якого буде

$$U_a = \frac{1}{D} \int_{-D/2}^{D/2} u_1 dx_2 = \frac{2}{3} U_0.$$

Що ж до тиску p , то вважається, що достатньо далеко перед звуженнями й далеко за ними він сталий, а його відповідний перепад $\Delta p = p_u - p_d = \text{const} > 0$ відповідає заданому ламінарному характеру базового потоку. Тут через $p_u = p|_{x_1=-\infty}$ і $p_d = p|_{x_1=\infty}$ позначено тиск достатньо далеко перед першим і далеко за другим звуженнями відповідно. Вибираючи значення p_d , завжди можна задати таке значення p_u , щоби перепад тиску Δp , який визначає рух рідини в каналі, залишався незмінним. При цьому без втрати загальності величину p_d можна вважати нульовою:

$$p_d = 0. \quad (6)$$

Тоді тиск p_u дорівнює перепаду ($p_u = \Delta p$) і визначається у процесі розв'язання задачі, як і тиск в усьому каналі.

На нерухомих жорстких поверхнях каналу й обох його звужень задається нормальний градієнт тиску:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{S_{ch}}, \quad S_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (7)$$

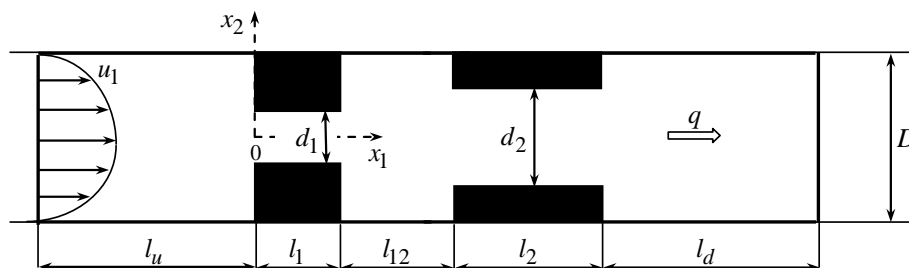


Рис. 1. Геометрія задачі та розрахункова область

Початкові ж умови полягають у відсутності руху рідини в каналі в момент часу $t = 0$:

$$u_i|_{t=0} = 0, \quad \Delta p|_{t=0} = 0, \quad p_d|_{t=0} = 0 \Rightarrow p|_{t=0} = 0. \quad (8)$$

Автори деяких робіт говорять про існування в початковий момент часу параболічного (ламінарного) профілю швидкості в усьому каналі [11, 13]. Але при цьому незрозуміло, як у розрахунках задавати такий профіль в областях відриву течії перед і за звуженнями та у струменях за звуженнями, як задавати межі зазначених областей, узгоджувати розподіли швидкостей на них тощо. Окрім того, не можна пояснити причину миттєвої зміни нав'язаного ламінарного характеру руху рідини на турбулентний в зоні збуреної звуженнями течії при $t > 0$.

Оскільки ми розглядаємо ламінарну базову течію, її швидкість не повинна перевищувати величини, при якому досягає критичного значення $Re_{cr} = 2000$ число Рейнольдса, побудоване на цій швидкості та ширині каналу, [1–4, 7–9].

У співвідношеннях (1)–(8) x_1, x_2, x_3 – прямокутні декартові координати, вибрані так, що вісь x_1 направлена по осі каналу вниз за течією, а вісь x_3 – перпендикулярно до площини x_1x_2 на нас (див. Рис. 1); t – час, u_i – компоненти локальної миттєвої швидкості рідини у напрямках x_i ; \vec{n} – зовнішня одинична нормаль до відповідної поверхні. Надалі передбачається підсумовування по індексах, які повторюються.

3. МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розв'язання сформульованої у попередньому розділі задачі складається з кількох послідовних етапів:

1. вибору розрахункової області та її розбиття на елементарні об'єми;
2. переходу до безрозмірних форм запису наведених у попередньому розділі співвідношень;
3. переходу до інтегральних аналогів цих співвідношень шляхом їх інтегрування по елементарних об'ємах;
4. дискретизації одержаних інтегральних співвідношень;
5. розв'язання одержаних за допомогою дискретизації алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо ці етапи детальніше.

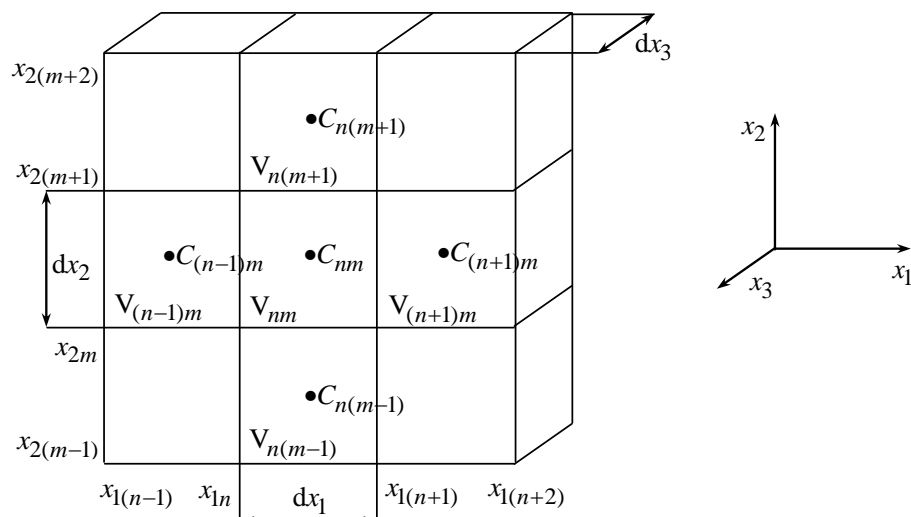


Рис. 2. Схема розбиття розрахункової області на елементарні об'єми

3.1. Розрахункова область і безрозмірні співвідношення

На Рис. 1 зображено область, у якій відшукується розв'язок задачі. Вона обмежується двома парами перерізів каналу $x_1 = -l_u$, $x_1 = l_1 + l_{12} + l_2 + l_d$ та $x_3 = x_{3a}$, $x_3 = x_{3a} + dx_3$ (де $dx_3 \ll 1$, x_{3a} – довільне значення координати x_3). При цьому ліва межа розрахункової області $x_1 = -l_u$ вибирається там, де базова течія ще незбурена звуженнями, а права $x_1 = l_1 + l_{12} + l_2 + l_d$ – де збурення течії вже зникають і вона стає такою, якою була при $x_1 = -l_u$. Оцінки для довжин l_u та l_d при розглянутих у даній статті значеннях швидкості базової течії (згідно з результатами робіт [2–4, 7–9], $Re \leq Re_{cr} = 2000$) становлять

$$l_u \geq 0.5D, \quad l_d \geq 12D. \quad (9)$$

Вибрана таким чином область інтегрування взаємно перпендикулярними перерізами $x_1 = x_{1n}$ ($x_{1n} = x_{1(n-1)} + dx_1$, $dx_1 \ll 1$) та $x_2 = x_{2m}$ ($x_{2m} = x_{2(m-1)} + dx_2$, $dx_2 \ll 1$) розбивається на елементарні об'єми V_{nm} (Рис. 2). При цьому, з міркувань забезпечення гладкості профілю швидкості в поперечному перерізі каналу в звуженнях та при наближенні до стінки каналу кроки dx_1 і dx_2 відповідним чином подрібнюються.

У даній роботі використовуються такі масштаби: для довжини – ширина каналу D , для швидкості – середнє значення в поперечному перерізі каналу значення в базовій течії $U_a = q/D$, для часу – відношення D/U_a , а для тиску – подвоєний середній динамічний напір базової течії ρU_a^2 .

При такому виборі масштабів безрозмірні форми рівнянь Нав'є–Стокса (1) і нерозривності (2) набувають вигляду

$$\frac{\partial u_i}{\partial T} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_D} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0, \quad (11)$$

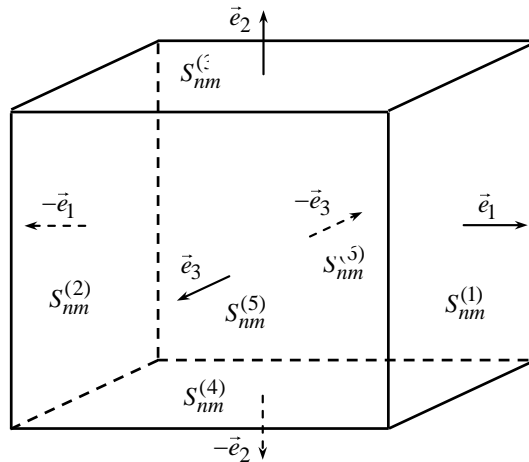


Рис. 3. Елементарний об'єм V_{nm} , його бічні грані $S_{nm}^{(i)}$ та їхні зовнішні нормалі \vec{n}_i ($n = 1, \dots, 6$)

а безрозмірні аналоги умов (3)–(9) записуються так:

$$\begin{aligned}
 U_i|_{S_{ch}, S_j} = 0, \quad U_i|_{T=0} = 0, \quad \partial Q / \partial X_1 = 0, \quad Q = 1, \quad i, j = 1, 2, \\
 U_1|_{X_1=-L_u}, \quad L_1+L_{12}+L_2+L_d = 1.5(1-4X_2^2), \quad U_2|_{X_1=-L_u, L_1+L_{12}+L_2+L_d} = 0, \\
 P_d = P|_{X_1=L_1+L_{12}+L_2+L_d} = 0, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_{S_{ch}, S_j} = 0, \quad P|_{T=0} = 0, \\
 L_u \geq 0.5, \quad L_d \geq 12.
 \end{aligned} \tag{12}$$

У співвідношеннях (12) $U_i = u_i/U_a$ – безрозмірні компоненти швидкості в напрямках x_i ; $X_i = x_i/D$ – безрозмірні координати x_i ($i = 1, 2, 3$); $T = tU_a/D$ – безрозмірний час; $P = p/(\rho U_a^2)$ – безрозмірний тиск; $Re_D = U_a D/\nu$ – число Рейнольдса осередненої базової течії; $Q = q/(U_a D)$ – безрозмірна об'ємна витрата рідини в каналі на одиницю його глибини; $P_d = p_d/(\rho U_a^2)$ – безрозмірний тиск; $L_u = l_u/D$ та $L_d = l_d/D$ – безрозмірні відстані; $L_1 = l_1/D$, $L_{12} = l_{12}/D$ і $L_2 = l_2/D$ – безрозмірні довжини.

3.2. Інтегральні співвідношення та їх дискретизація

3.2.1. Інтегральні рівняння та їх дискретні аналоги

Інтегральні аналоги рівнянь (10), (11) одержують їх інтегруванням по контрольних об'ємах V_{nm} (при виконанні такої операції в кожному об'ємі V_{nm} виконуються закони збереження):

$$\frac{\partial}{\partial T} \iiint_{V_{nm}} U_i dV + \iiint_{V_{nm}} U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} dV = - \iiint_{V_{nm}} \frac{\partial P}{\partial X_i} dV + \frac{1}{Re_D} \iiint_{V_{nm}} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) dV, \tag{13}$$

$$\iiint_{V_{nm}} \frac{\partial U_i}{\partial X_i} dV = 0. \tag{14}$$

Застосуємо там, де можливо, теореми Гауса–Остроградського:

$$\iiint_{V_{nm}} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} dV = \iint_{S_{nm}} \vec{g} \cdot d\vec{S}, \quad \iiint_{V_{nm}} \vec{\nabla} \gamma dV = \iint_{S_{nm}} \gamma d\vec{S}, \quad d\vec{S} = \vec{n} dS$$

до членів рівнянь (13) і (14) й розкладемо, за потреби, підінтегральні функції (вони умовно позначимо через $\vec{f}(\vec{r})$) у ряди Тейлора в околі центру мас C_{nm} елементарного об'єму V_{nm} (див. Рис. 2), залишивши в подальшому лише перші два члени ряду:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r}_{c_{nm}}) + \vec{\nabla}(\vec{f}) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_{c_{nm}}} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{c_{nm}}),$$

Внаслідок однорідності рідини в каналі, центр мас об'єму V_{nm} співпадає з його геометричним центром. Це ж справедливо і для центрів мас бічних граней об'єму V_{nm} . Дискретизація похідних за часом на основі неявної триточкової несиметричної схеми з різницями назад [10, 11, 14, 15]:

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{r}_{c_{nm}}, T)}{\partial T} = \frac{1.5\vec{f}_{c_{nm}}^k - 2\vec{f}_{c_{nm}}^{k-1} + 0.5\vec{f}_{c_{nm}}^{k-2}}{\Delta T}$$

Ця схема має другий порядок точності і застосовується у разі, якщо сітка розбиття (див. Рис. 2) нерухома, що забезпечує нерухомість центрів мас відповідних елементарних об'ємів [14, 15]. Дискретизація по координатах має вигляд:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_{c_{nm}}^{(j)}} &= \vec{e}_i (\partial f / \partial X_i)_{\vec{r}=\vec{r}_{c_{nm}}^{(j)}}, \\ \frac{\partial f}{\partial X_1} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_{c_{nm}}^{(1)}} &= \frac{f(\vec{r}_{c_{(n+1)m}}) - f(\vec{r}_{c_{nm}})}{dX_1}, & \frac{\partial f}{\partial X_1} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_{c_{nm}}^{(2)}} &= \frac{f(\vec{r}_{c_{nm}}) - f(\vec{r}_{c_{(n-1)m}})}{dX_1}, \\ \frac{\partial f}{\partial X_2} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_{c_{nm}}^{(3)}} &= \frac{f(\vec{r}_{c_{n(m+1)}}) - f(\vec{r}_{c_{nm}})}{dX_2}, & \frac{\partial f}{\partial X_2} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_{c_{nm}}^{(4)}} &= \frac{f(\vec{r}_{c_{nm}}) - f(\vec{r}_{c_{n(m-1)}})}{dX_2}, \end{aligned}$$

За потреби також використовується TVD-схема, яка забезпечує вищу від першого порядку точність та обмеженість розв'язку [16–19]:

$$\vec{f}(\vec{r}_{c_{nm}}^{(j)}) = \vec{f}_1^{(j)} + \Phi \left(\vec{f}_2^{(j)} - \vec{f}_1^{(j)} \right).$$

Усі ці заходи дозволяють із точністю до малих величин другого порядку малості перейти до дискретних аналогів рівнянь (13), (14):

$$\begin{aligned} \frac{1.5U_{ic_{nm}}^k - 2U_{ic_{nm}}^{k-1} + 0.5U_{ic_{nm}}^{k-2}}{\Delta T} |V_{nm}| + \sum_{j=1}^4 F_{nm}^{(j)k} U_{ic_{nm}}^k - \frac{1}{\text{Re}} \sum_{j=1}^4 \vec{\nabla} U_{ic_{nm}}^k \cdot \vec{n}_j |S_{nm}^{(j)}| = \\ = - \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^4 P_{c_{nm}}^k n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| \\ (\partial P / \partial X_i)_{C_{nm}}^k |V_{nm}| \end{array} \right. , \end{aligned} \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^4 \vec{U}_{c_{nm}}^k \cdot \vec{n}_j |S_{nm}^{(j)}| = \sum_{j=1}^4 U_{i_{c_{nm}}}^k n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| = \sum_{j=1}^4 F_{nm}^{(j)k} = 0. \quad (16)$$

Тут $\vec{\nabla}$ – градієнт; $\vec{r} = X_i \vec{e}_i$ і $\vec{r}_{c_{nm}} = X_{i_{c_{nm}}} \vec{e}_i$ – радіус-вектори довільної точки регіону V_{nm} і точки C_{nm} відповідно; крапка вказує на скалярне множення векторів; \vec{e}_i – орт осі X_i ; ΔT – малий часовий крок; $\vec{f}_{c_{nm}}^k$ і $\vec{f}_{c_{nm}}^{(j)k}$ – значення функції \vec{f} у точках C_{nm} і $C_{nm}^{(j)}$ в момент часу $T = k\Delta T$; $C_{nm}^{(j)}$ – центр мас бічної грані $S_{nm}^{(j)}$ об'єму V_{nm} ; $\vec{f}_{c_{nm}}^{k-1}$ і $\vec{f}_{c_{nm}}^{k-2}$ – відомі (визначені на попередніх етапах) значення функції \vec{f} у точці C_{nm} у моменти часу $(k-1)\Delta T$ і $(k-2)\Delta T$ відповідно; $\vec{f}_1^{(j)}$ – значення функції \vec{f} у точці $C_{nm}^{(j)}$, знайдене на основі протипоточної схеми першого порядку [14–19]:

$$\vec{f}_1^{(j)} = \begin{cases} \vec{f}(\vec{r}_{c_{nm}}), & F_{nm}^{(j)} \geq 0, \\ \vec{f}(\vec{r}_{c_j}), & F_{nm}^{(j)} < 0; \end{cases}$$

C_j – центр мас контрольного об'єму, який має спільну грань $S_{nm}^{(j)}$ з об'ємом V_{nm} (див. Рис. 2 і Рис. 3):

$$C_1 = C_{(n+1)m}, \quad C_2 = C_{(n-1)m}, \quad C_3 = C_{n(m+1)}, \quad C_4 = C_{n(m-1)};$$

$\vec{f}_2^{(j)}$ – значення функції \vec{f} у точці $C_{nm}^{(j)}$, вираховане за допомогою центрально-різницевої схеми другого порядку [14–19]:

$$\vec{f}_2^{(j)} = \alpha_j \vec{f}(\vec{r}_{c_{nm}}) + (1 - \alpha_j) \vec{f}(\vec{r}_{c_j})$$

з коефіцієнтом $\alpha_j = \left| \vec{r}_{c_{nm}}^{(j)} - \vec{r}_{c_j} \right| / \left| \vec{r}_{c_{nm}} - \vec{r}_{c_j} \right|$; Φ – нелінійний обмежувач потоку:

$$\Phi(eta_j) = \max(0, \min(2eta_j/\beta, 1)), \quad eta_j = \left| \vec{U}(\vec{r}_{c_{nm}}^{(j)}) - \vec{U}(\vec{r}_{c_{nm}}) \right| / \left| \vec{U}(\vec{r}_{c_j}) - \vec{U}(\vec{r}_{c_{nm}}^{(j)}) \right|,$$

в якому покладено $\beta = 0.5$ ²; $|V_{nm}|$ – об'єм регіону V_{nm} ; $|S_{nm}^{(j)}|$ та $\vec{n}_j = n_{ji} \vec{e}_i$ – площа та зовнішня одинична нормаль грані $S_{nm}^{(j)}$ відповідно ($\vec{n}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{n}_2 = -\vec{e}_1$, $\vec{n}_3 = \vec{e}_2$, $\vec{n}_4 = -\vec{e}_2$, $\vec{n}_5 = \vec{e}_3$, $\vec{n}_6 = -\vec{e}_3$; див. Рис. 3). Через

$$F_{nm}^{(j)k} = \vec{U}_{c_{nm}}^k \cdot \vec{n}_j |S_{nm}^{(j)}|$$

позначено потік середовища крізь грань $S_{nm}^{(j)}$ в момент часу $T = k\Delta T$.

²Загалом можна вибирати у межах $0 < \beta \leq 1$. Його зменшення відповідає більшій точності та меншій стійкості розрахунку. Навпаки, зі збільшенням β зменшується точність розрахунку, але зростає його стійкість [11, 17–20]

3.2.2. Дискретні аналоги граничних умов та їх застосування до рівнянь (15), (16)

Дискретні аналоги граничних умов для компонент швидкості та об'ємної витрати зі співвідношень (12) мають вигляд

$$\begin{aligned} U_1^k \Big|_{X_1=-L_u, L_1+L_{12}+L_2+L_d} &= 1.5 (1 - 4X_2^2), & U_2^k \Big|_{X_1=-L_u, L_1+L_{12}+L_2+L_d} &= 0, \\ U_i^k \Big|_{S_{ch}, S_j} &= 0, & \partial Q^k / \partial X_1 &= 0, & Q^k &= 1; \\ i, j &= 1, 2, & L_u &\geq 0.5, & L_d &\geq 12. \end{aligned} \quad (17)$$

Вони дозволяють знайти значення потоку середовища та градієнтів швидкостей на межі розрахункової області в рівняннях (15), (16). Дійсно, зі співвідношення (17) випливає, що потік середовища крізь непроникні стінки каналу і обох його звужень буде нульовим:

$$F_{nm}^{(j)k} \Big|_{S_{ch}, S_r} = \left(U_{ic_{nm}}^{(j)k} n_{ji} \Big|_{S_{nm}^{(j)}} \right)_{S_{ch}, S_r} = 0, \quad r = 1, 2.$$

На вході ж та виході зазначеної області, яких можуть торкатися відповідно лише грані $S_{nm}^{(2)}$ та $S_{nm}^{(1)}$ об'єму V_{nm} (див. Рис. 1 і 3), маємо:

$$\begin{aligned} F_{nm}^{(2)k} \Big|_{X_1=-L_u} &= -1.5 (1 - 4X_2^2) dX_2 dX_3, & F_{nm}^{(1)k} \Big|_{X_1=L_1+L_{12}+L_2+L_d} &= 1.5 (1 - 4X_2^2) dX_2 dX_3, \\ F_{nm}^{(3)k} \Big|_{X_1=-L_u, L_1+L_{12}+L_2+L_d} &= F_{nm}^{(4)k} \Big|_{X_1=-L_u, L_1+L_{12}+L_2+L_d} &= 0. \end{aligned}$$

Градієнти швидкостей на верхній та нижній стінках каналу, яких можуть торкатися відповідно лише грані $S_{nm}^{(3)}$ та $S_{nm}^{(4)}$, визначаються так:

$$\vec{\nabla} U_{ic_{nm}}^{(3)k} \Big|_{X_2=1/2} = -\vec{e}_2 U_{ic_{nm}}^k / dX_2, \quad \vec{\nabla} U_{ic_{nm}}^{(4)k} \Big|_{X_2=-1/2} = \vec{e}_2 U_{ic_{nm}}^k / dX_2,$$

$$-L_u \leq X_1 \leq 0, \quad L_1 \leq X_1 \leq L_1 + L_{12}, \quad L_1 + L_{12} + L_2 \leq X_1 \leq L_1 + L_{12} + L_2 + L_d.$$

На вході та виході розрахункової області градієнти виглядають так:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} U_{1c_{nm}}^{(2)k} \Big|_{X_1=-L_u} &= -12X_2 \vec{e}_2, & \vec{\nabla} U_{1c_{nm}}^{(1)k} \Big|_{X_1=L_1+L_{12}+L_2+L_d} &= -12X_2 \vec{e}_2, \\ \vec{\nabla} U_{2c_{nm}}^{(2)k} \Big|_{X_1=-L_u} &= 0, & \vec{\nabla} U_{2c_{nm}}^{(1)k} \Big|_{X_1=L_1+L_{12}+L_2+L_d} &= 0. \end{aligned}$$

І нарешті, на поверхнях звужень градієнти мають вигляд

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} U_{ic_{nm}}^{(1)k} \Big|_{\substack{X_1=0, D_1/2 \leq X_2 \leq 1/2, -1/2 \leq X_2 \leq -1/2+D_1/2 \\ X_1=L_1+L_{12}, D_2/2 \leq X_2 \leq 1/2, -1/2 \leq X_2 \leq -1/2+D_2/2}} &= -\vec{e}_1 U_{ic_{nm}}^k / dX_1, \\ \vec{\nabla} U_{ic_{nm}}^{(2)k} \Big|_{\substack{X_1=L_1, D_1/2 \leq X_2 \leq 1/2, -1/2 \leq X_2 \leq -1/2+D_1/2 \\ X_1=L_1+L_{12}+L_2, D_2/2 \leq X_2 \leq 1/2, -1/2 \leq X_2 \leq -1/2+D_2/2}} &= \vec{e}_1 U_{ic_{nm}}^k / dX_1, \\ \vec{\nabla} U_{ic_{nm}}^{(3)k} \Big|_{0 \leq X_1 \leq L_1, X_2=D_1/2; L_1+L_{12} \leq X_1 \leq L_1+L_{12}+L_2, X_2=D_2/2} &= -\vec{e}_2 U_{ic_{nm}}^k / dX_2, \\ \vec{\nabla} U_{ic_{nm}}^{(4)k} \Big|_{0 \leq X_1 \leq L_1, X_2=-1/2+D_1/2; L_1+L_{12} \leq X_1 \leq L_1+L_{12}+L_2, X_2=-1/2+D_2/2} &= \vec{e}_2 U_{ic_{nm}}^k / dX_2. \end{aligned}$$

Тут $D_1 = d_1/D$, $D_2 = d_2/D$. Також було взято до уваги, що лівих сторін звужень може торкатися лише грань $S_{nm}^{(1)}$, правих – грань $S_{nm}^{(2)}$, верхніх – грань $S_{nm}^{(3)}$, а нижніх – грань $S_{nm}^{(4)}$.

Дискретні аналоги граничних умов для тиску зі співвідношень (12) записуються наступним чином:

$$P_{c_{nm}^{(1)}}^k \Big|_{X_1=L_1+L_{12}+L_2+L_d} = 0, \quad \left(\frac{\partial P^k}{\partial X_2} \right)_{S_{ch}} = 0, \quad \left(\frac{\partial P^k}{\partial n} \right)_{S_j} = 0, \quad j = 1, 2.$$

Тут враховано, які грані об'єму V_{nm} торкаються відповідних частин зазначеної межі.

3.2.3. Дискретні аналоги початкових умов та їх застосування до рівнянь (15), (16)

Запишемо дискретні аналоги початкових умов зі співвідношень (12):

$$U_i^0 = U_i^k \Big|_{k=0} = 0, \quad P^0 = P^k \Big|_{k=0} = 0.$$

З їх допомогою можна визначити значення відповідних членів рівнянь (15), (16) у початковий момент часу в усій розрахунковій області. Дійсно, бачимо, що потік середовища крізь бічну грань $S_{nm}^{(i)}$ об'єму V_{nm} в момент $T = 0$ буде нульовим $F_{nm}^{(j)k} \Big|_{k=0} = 0$, як і градієнти швидкостей: $\vec{\nabla} U_{i_{c_{nm}^{(j)}}}^k \Big|_{k=0} = 0$. Нульовими при $T = 0$ є й похідні $(\partial P / \partial X_i)_{C_{nm}}^k$ у (15).

3.3. Розв'язання рівнянь (15), (16)

Система рівнянь (15), (16) розв'язується чисельно. При цьому виникають дві суттєві проблеми. Перша з них пов'язана з нелінійністю дискретних рівнянь кількості руху (15), які використовуються для визначення компонент швидкості. Ця нелінійність виникає внаслідок залежності потоку $F_{nm}^{(j)k}$ від компонент швидкості. Друга ж зумовлена відсутністю в моделі нестисливої рідини рівняння для тиску, котрий фігурує у правій частині рівнянь (15).

Для вирішення першої проблеми у даній роботі на відповідних етапах проводиться модифікація потоку $F_{nm}^{(j)k}$ за рахунок заміни в ньому шуканих компонент швидкості спочатку їхніми значеннями, знайденими у попередній момент часу, а потім – уже відомими попередніми наближеннями. Це дозволяє переходити від розв'язання зв'язаних систем нелінійних алгебраїчних рівнянь до відповідних незалежних лінійних систем.

Друга проблема вирішується за допомогою введення тиску у дискретне рівняння нерозривності (16) з подальшим узгодженням полів швидкості й тиску при проведенні вищезазначеної модифікації потоку $F_{nm}^{(j)k}$. В подальшому одержані при цьому значення швидкості й тиску уточнюються. Продемонструємо сказане.

3.3.1. Рівняння для швидкості й тиску

Якщо співвідношення (15) формально розв'язати відносно компонент швидкості, то одержимо рівняння, яке має узагальнений вигляд

$$U_{ic_{nm}}^k = A_{ic_{nm}}^0 + A_{ic_{nm}}^k - \left(\frac{A_{ic_{nm}}^p}{|V_{nm}|} \right) \sum_{j=1}^4 P_{c_{nm}}^k n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|. \quad (18)$$

Рівняння (18) може бути записане й так:

$$U_{ic_{nm}}^k = A_{ic_{nm}}^0 + A_{ic_{nm}}^k - A_{ic_{nm}}^p \left(\frac{\partial P}{\partial X_i} \right)_{C_{nm}}^k. \quad (19)$$

У формулах (18), (19) доданок $A_{ic_{nm}}^0$ – раціональна функція, чисельник якої містить відомі значення компонент швидкості $U_{ic_{nm}}^{k-1}$ та $U_{ic_{nm}}^{k-2}$, знайдені в попередні моменти часу в точці C_{nm} . Її ж знаменник включає в себе потік $F_{nm}^{(j)k}$, який лінійно залежить від невідомих компонент швидкості. Dodanok $A_{ic_{nm}}^k$ – також раціональна функція, чий знаменник відрізняється від знаменника $A_{ic_{nm}}^0$ лише множником $|V_{nm}|/\Delta T$. У її ж чисельнику знаходяться як невідомі компоненти швидкості у точці C_j в момент часу $T = k\Delta T$, так і невідомі добутки $F_{nm}^{(j)k} U_{ic_j}^k$. Що стосується дробового множника $A_{ic_{nm}}^p$, то його чисельник складається лише з часового кроку ΔT , а знаменник співпадає зі знаменником функції $A_{ic_{nm}}^0$.

Виконавши інтерполяцію, зі співвідношень (18), (19) одержимо рівняння для компонент швидкості у центрах мас $C_{nm}^{(j)}$ бічних граней $S_{nm}^{(j)}$ об'єму V_{nm} :

$$U_{ic_{nm}}^{k(j)} = A_{ic_{nm}}^{0(j)} + A_{ic_{nm}}^{k(j)} - A_{ic_{nm}}^p \begin{cases} \frac{1}{|V_{nm}|} \sum_{r=1}^4 P_{c_{nm}}^k n_{ri} |S_{nm}^{(r)}|, \\ \left(\frac{\partial P}{\partial X_i} \right)_{C_{nm}^{(j)}}^k, \end{cases} \quad j = 1, \dots, 4. \quad (20)$$

Тепер, підставивши співвідношення (20) у вираз для потоку середовища, а той – у формулу (16), одержимо рівняння для тиску:

$$\sum_{j=1}^4 A_{ic_{nm}}^p \left(\frac{\partial P}{\partial X_i} \right)_{C_{nm}^{(j)}}^k n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| = \sum_{j=1}^4 \left(A_{ic_{nm}}^{0(j)} + A_{ic_{nm}}^{k(j)} \right) n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|. \quad (21)$$

Надалі зв'язані рівняння (18)/(19), (21)³ використовуються для визначення компонент швидкості й тиску.

3.3.2. Послідовні наближення та узгодження швидкості й тиску

Систему рівнянь (18)/(19), (21) розв'язують, знаходячи й узгоджуючи між собою послідовні наближення швидкості й тиску. Кількість наближень визначається заданою точністю розв'язку. Детальний опис цієї процедури дано в [20].

³Рівняння (18)/(19) для компонент швидкості залежать від шуканого тиску, а рівняння (21) для тиску залежить від шуканих компонент швидкості

Перші наближення швидкості й тиску Розв'язання системи рівнянь (18)/(19), (21) починається зі знаходження перших наближень компонент швидкості, які позначимо верхнім індексом: перші наближення всіх шуканих величин – «*», другі – «**», треті – «***». Для слід цього відповідним чином модифікувати рівняння (18). У них, замість невідомих значень тиску $P_{c_{nm}}^k$, вводяться його відомі значення $P_{c_{nm}}^{k-1}$, знайдені у попередній момент часу $T = (k-1)\Delta T$. Також усі функції $A_{ic_{nm}}^{\dots}$ модифікуються за рахунок заміни у потокові $F_{nm}^{(j)k}$, який до них входить, шуканих компонент швидкості їхніми значеннями, одержаними при $T = (k-1)\Delta T$. Це породжує систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення перших наближень компонент швидкості у точках C_{nm} та C_j ($j = 1, \dots, 4$):

$$U_{ic_{nm}}^{k*} = A_{ic_{nm}}^{0l} + A_{ic_{nm}}^{kl} - \left(\frac{A_{ic_{nm}}^{pl}}{|V_{nm}|} \right) \sum_{j=1}^4 P_{c_{nm}}^{k-1} n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|. \quad (22)$$

Тут $A_{ic_{nm}}^{\dots l}$ – модифіковані функції $A_{ic_{nm}}^{\dots}$. При цьому $A_{ic_{nm}}^{0l}$ і $A_{ic_{nm}}^{pl}$ не залежать від невідомих компонент швидкості, а $A_{ic_{nm}}^{kl}$ – лінійні функції швидкостей $U_{ic_j}^{k*}$. Співвідношення (22) не залежить від шуканого тиску.

Після визначення з системи (22)⁴ перших наближень компонент швидкості, останні використовуються для знаходження значень операторів $A_{ic_{nm}}^{\dots(j)}$ і подальшої їх підстановки у співвідношення (21). Це приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь для першого наближення тиску в точках C_{nm} та C_j ($j = 1, \dots, 4$):

$$\sum_{j=1}^4 A_{ic_{nm}}^{p*} \left(\frac{\partial P}{\partial X_i} \right)_{C_{nm}}^{(j)k*} n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| = \sum_{j=1}^4 \left(A_{ic_{nm}}^{0*} + A_{ic_{nm}}^{k*} \right) n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| \quad (23)$$

Тут через $A_{ic_{nm}}^{\dots(j)}$ позначено обчислені значення операторів $A_{ic_{nm}}^{\dots(j)}$. Система (23) не залежить від шуканих швидкостей.

Другі наближення швидкості й тиску Тут застосовується процедура, аналогічна до описаної в підрозділі п. 3.3.2, а саме, знайдені зі співвідношень (23) перші наближення тиску підставляються у рівняння (18) замість $P_{c_{nm}}^k$. У свою чергу, в функціях $A_{ic_{nm}}^{\dots}$ у (18) потік $F_{nm}^{(j)k}$ модифікується за рахунок заміни в ньому шуканих компонент швидкості їхніми першими наближеннями, одержаними з системи (22). Це приводить до систем лінійних алгебраїчних рівнянь для других наближень (або перших корекцій) компонент швидкості у точках C_{nm} та C_j ($j = 1, \dots, 4$):

$$U_{ic_{nm}}^{k**} = A_{ic_{nm}}^{0l*} + A_{ic_{nm}}^{kl*} - \left(\frac{A_{ic_{nm}}^{pl*}}{|V_{nm}|} \right) \sum_{j=1}^4 P_{c_{nm}}^{k*} n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|. \quad (24)$$

Тут $A_{ic_{nm}}^{\dots l*}$ – функції $A_{ic_{nm}}^{\dots}$, в яких проведено зазначену модифікацію потоку. Окрім цього, $A_{ic_{nm}}^{0l*}$ і $A_{ic_{nm}}^{pl*}$ незалежні від невідомих других наближень швидкості, а $A_{ic_{nm}}^{kl*}$ лінійно залежать від $U_{ic_j}^{k**}$. Співвідношення (24) не залежать від шуканого тиску.

⁴Метод розв'язання цієї системи рівнянь описується у підрозділі [разд. 3.3.3](#)

Далі за допомогою знайдених за формулою (24) других наближень швидкостей одержують значення $A_{ic_{nm}}^{\dots(j)}$ операторів $A_{ic_{nm}}^{\dots(j)}$. Їх підстановка у формули (21) замість $A_{ic_{nm}}^{\dots(j)}$ дозволяє записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь для другого наближення (або першої корекції) тиску в точках C_{nm} та C_j ($j = 1, \dots, 4$), аналогічну до співвідношень (23):

$$\sum_{j=1}^4 A_{ic_{nm}}^{p**} \left(\frac{\partial P}{\partial X_i} \right)_{C_{nm}^{(j)}}^{k**} n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| = \sum_{j=1}^4 \left(A_{ic_{nm}}^{0**} + A_{ic_{nm}}^{k**} \right) n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|. \quad (25)$$

Система (25) не залежить від шуканої швидкості.

Третє наближення швидкості й тиску Тут повторюється описаний у підрозділі п. 3.3.2 цикл: у системі (18) невідомі значення тиску $P_{c_{nm}}^k$ замінюються їхніми другими наближеннями, одержаними після розв'язання системи рівнянь (25). Окрім того, у виразі для потоку потоків $F_{nm}^{(j)k}$ замість невідомих швидкостей підставляють їхні другі наближення, знайдені з рівнянь (24). Це дає систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення третіх наближень (другої корекції) компонент швидкості в точках C_{nm} та C_j ($j = 1, \dots, 4$):

$$U_{ic_{nm}}^{k***} = A_{ic_{nm}}^{0l**} + A_{ic_{nm}}^{kl**} - \left(\frac{A_{ic_{nm}}^{pl**}}{|V_{nm}|} \right) \sum_{j=1}^4 P_{c_{nm}}^{k**} n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|. \quad (26)$$

Тут $A_{ic_{nm}}^{\dots l**}$ – оператори $A_{ic_{nm}}^{\dots}$ зі зміненим у зазначений спосіб потоком $F_{nm}^{(j)k}$. При цьому вирази $A_{ic_{nm}}^{kl**}$ лінійно залежать від шуканих швидкостей $U_{ic_j}^{k***}$, а $A_{ic_{nm}}^{0l**}$ та $A_{ic_{nm}}^{pl**}$ – ні). Співвідношення (26) не залежать від шуканого тиску.

Знайдені треті наближення швидкостей дозволяють обчислити значення операторів $A_{ic_{nm}}^{\dots(j)}$. Їх підстановка у співвідношення (21) дає подібну до (25) систему лінійних алгебраїчних рівнянь для третього наближення (або другої корекції) тиску:

$$\sum_{j=1}^4 A_{ic_{nm}}^{p***} \left(\frac{\partial P}{\partial X_i} \right)_{C_{nm}^{(j)}}^{k***} n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| = \sum_{j=1}^4 \left(A_{ic_{nm}}^{0***} + A_{ic_{nm}}^{k***} \right) n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|, \quad (27)$$

де $A_{ic_{nm}}^{\dots***}$ – вказані значення операторів $A_{ic_{nm}}^{\dots(j)}$. Система (27) не залежить від шуканих швидкостей.

Якщо треті наближення компонент швидкості й тиску не задовольняють задані вимоги щодо точності, описаний цикл необхідно повторювати до виконання останніх.

3.3.3. Розв'язання рівнянь для послідовних наближень швидкості й тиску

Наведені в підрозділі розд. 3.3.2 системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) для послідовних наближень швидкості і тиску загалом можна переписати у вигляді

$$a_{c_{nm}}^k \xi_{c_{nm}}^k + \sum_{i=1}^4 a_{c_i}^k \xi_{c_i}^k = b_{c_{nm}}^k, \quad (28)$$

де $\xi_{c_{nm}}^k$ і $\xi_{c_i}^k$ – шукані величини; $a_{c_{nm}}^k$, $a_{c_i}^k$ і $b_{c_{nm}}^k$ – відомі коефіцієнти. Для розв’язання таких систем використовуються методи, які загалом можна розбити на дві основні групи: прямі й ітераційні методи. Зазвичай прямі методи ефективно застосовуються до невеликих систем рівнянь [14, 15, 21, 22]. При роботі ж з великими системами, особливо якщо вони мають розріджені матриці, їх використання недоцільне й призводить до величезних затрат обчислювального часу – останній зростає пропорційно до квадрату кількості невідомих. Ітераційні ж методи при застосуванні до великих лінійних алгебраїчних систем потребують значно менше комп’ютерної пам’яті й часу і дають задовільні результати, за наявності, зберігаючи властивість розрідженості матриць [14, 15, 21, 22].

Виходячи зі сказаного, а також з розміру та ступеня розрідженості системи (28), для її розв’язання у даній роботі було застосовано ітераційний метод. У його рамках вибирається початкове наближення розв’язку, яке потім покращується серією ітерацій доти, поки не досягається наперед задана точність. При цьому слід звернути увагу на дві особливості.

Перша з них стосується необхідності забезпечення діагонального домінування в матриці. У цій роботі воно досягається за рахунок застосування до конвективного члена методу відкладеної корекції, [23] згідно з яким, та частина конвективного члена, яка відповідає протипоточній схемі, вбудовується в матрицю, а решта переноситься в праву частину системи (28).

Друга особливість пов’язана з бажаною мінімізацією кількості ітерацій. Ця опція досягалась за рахунок застосування методу спряжених градієнтів [24], який належить до найбільш ефективних методів розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності. Він дає можливість розв’язувати систему рівнянь за число ітерацій, яке не перевищує кількості її невідомих. При вдалому виборі початкового наближення, кількість ітерацій різко зменшується. Також суттєвому зменшенню кількості ітерацій сприяє передобумовлювання. Для цього у даній роботі використовувались солвери ICSSG для симетричних матриць [25–28] і Bi-CGSTAB для асиметричних матриць [2, 9, 26–28].

Описаний алгоритм розв’язання системи (28) був протестований в роботах [29, 30] і показав добрі результати.

4. ВИСНОВКИ

1. Представлено чисельний метод розв’язання задачі про рух рідини у прямому плоскому жорсткому каналі з двома жорсткістінними осесиметричними звуженнями прямокутної форми. Він має другий порядок точності за просторовими координатами та за часом.
2. У розробленому методі рівняння Нав’є–Стокса та нерозривності розв’язуються в змінних швидкість–тиск інтегруванням по елементарних об’ємах, на які розбивається розрахункова область. Після цього відбувається просторово-часова дискретизація одержаних інтегральних рівнянь (13), (14) і подальше розв’язання нелінійних алгебраїчних рівнянь (15), (16). При виконанні дискретизації часова її частина проводиться на основі неявної триточкової несиметричної схеми з різницями назад, а просторова – на основі TVD-схеми та схеми дискретизації просторових похідних.

3. Розв'язання рівнянь (15), (16) проводиться у три етапи. Спочатку дискретні рівняння кількості руху (15) переписуються у вигляді рівняння для швидкості (18)/(19). Потім на основі дискретного рівняння нерозривності (16) виводиться рівняння для тиску (21). Після цього до зв'язаних нелінійних рівнянь (18)/(19), (21) застосовується розроблена у [20] процедура знаходження та узгодження між собою послідовних наближень шуканих величин. Кількість наближень визначається заданою точністю розв'язку.
4. При знаходженні перших наближень шуканих величин проводиться модифікація рівнянь (18) за допомогою заміни в них невідомих значень тиску та швидкості (у виразі для потоку) їхніми значеннями, знайденими у попередній момент часу. При знаходженні ж наступних наближень їх слід замінити вже відомими значеннями, обчисленими у попередній ітерації. Це дозволяє переходити від зв'язаних систем нелінійних алгебраїчних рівнянь (18)/(19), (21) до відповідних незалежних лінійних рівнянь.
5. Для розв'язання отриманих систем лінійних алгебраїчних рівнянь застосовується ітераційний метод, в якому використовуються методи відкладеної корекції та спряжених градієнтів, а також солвери ICCG для симетричних матриць і Bi-CGSTAB для асиметричних матриць.

ДОДАТОК. ПОЗНАЧЕННЯ

- D ширина каналу;
- d_1, d_2 діаметри звужень;
- D_1, D_2 безрозмірні діаметри звужень;
- l_1, l_2 довжини звужень;
- L_1, L_2 безрозмірні довжини звужень;
- l_{12}, L_{12} розмірна та безрозмірна відстані між звуженнями відповідно;
- l_u, L_u розмірна та безрозмірна відстані від лівої межі розрахункової області до першого звуження;
- l_d, L_d розмірна та безрозмірна відстані від правої межі розрахункової області до другого звуження;
- ρ, ν масова густина та кінематична в'язкість рідини відповідно;
- x_i, X_i розмірні та безрозмірні прямокутні декартові координати ($i = 1, 2, 3$);
- \vec{e}_i орти координатних осей x_i ;
- t, T розмірний та безрозмірний час відповідно;
- ΔT елементарний приріст часу T ;

- u_i, U_i розмірні та безрозмірні компоненти швидкості рідини у напрямках x_i ;
 U_0 максимальна швидкість базового потоку;
 U_a середня у поперечному перерізі каналу швидкість базового потоку;
 q, Q розмірна та безрозмірна об'ємні витрати рідини в каналі на одиницю його глибини відповідно;
 Re_D число Рейнольдса осередненої базової течії;
 ρU_a^2 подвоєний середній динамічний напір базової течії;
 p, P розмірний та безрозмірний тиск відповідно;
 p_u, p_d тиск достатньо далеко перед і далеко за звуженнями відповідно;
 P_u, P_d безрозмірний тиск достатньо далеко перед і далеко за звуженнями відповідно;
 Δp перепад тиску
 S_{ch}, S_1, S_2 стінка каналу та поверхні звужень відповідно;
 \vec{n} зовнішня одинична нормаль до відповідної поверхні;
 V_{nm} елементарний об'єм;
 $|V_{nm}|$ об'єм області V_{nm} ;
 C_{nm} центр мас об'єму V_{nm} ;
 S_{nm} поверхня об'єму V_{nm} ;
 $|S_{nm}|$ площа поверхні S_{nm} ;
 $S_{nm}^{(i)}$ бічні грані об'єму V_{nm} ($i = 1, \dots, 6$);
 $|S_{nm}^{(i)}|$ площі граней $S_{nm}^{(i)}$;
 \vec{n}_i зовнішня одинична нормаль грані $S_{nm}^{(i)}$;
 $C_{nm}^{(i)}$ центр мас грані $S_{nm}^{(i)}$;
 $\vec{r}, \vec{r}_{c_{nm}}, \vec{r}_{c_{nm}}^{(i)}$ радіус-вектори довільної точки об'єму V_{nm} і точок $C_{nm}, C_{nm}^{(i)}$ відповідно;
 \vec{f} умовне позначення відповідних функцій;
 $\vec{f}_{c_{nm}}^k$ значення функції \vec{f} у точці C_{nm} в момент часу $T = k\Delta T$;
 $F_{nm}^{(i)k}$ потік середовища крізь грань $S_{nm}^{(i)}$ в момент часу $T = k\Delta T$;
 $\vec{f}^*, \vec{f}^{**}, \vec{f}^{***}$ перше, друге і третє наближення функції \vec{f} .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Berger S. A., Jou L.-D. Flows in stenotic vessels // *Annual Review of Fluid Mechanics Research*. — 2000. — Vol. 32. — P. 347–382.
- [2] Borisyuk A. O. Experimental study of wall pressure fluctuations in rigid and elastic pipes behind an axisymmetric narrowing // *Journal of Fluids and Structures*. — 2010. — Vol. 26, no. 4. — P. 658–674.
- [3] Borisyuk A. O., Borisyuk Y. A. Wall pressure fluctuations behind a pipe narrowing // *Science-Based Technologies*. — 2017. — Vol. 34, no. 2. — P. 162–170.
- [4] Young D. F. Fluid mechanics of arterial stenoses // *Journal of Biomechanical Engineering*. — 1979. — Vol. 101, no. 3. — P. 157–175.
- [5] Computed tomography coronary angiography in patients with acute myocardial infarction without significant coronary stenosis / Aldrovandi A., Cademartiri F., Arduini D., Lina D., Ugo F., Maffei E., Menozzi A., Martini C., Palumbo A., Bontardelli F., Gherli T., Ruffini L., and Ardissino D. // *Circulation*. — 2012. — Vol. 126, no. 25. — P. 3000–3007.
- [6] Pedrizzetti G. Unsteady tube flow over an expansion // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1996. — Vol. 310, no. 1. — P. 89–111.
- [7] Borisyuk A. O. Study of the flow and acoustic fields in a rigid-walled channel of circular cross-section with a local axisymmetric narrowing. Part 1. A theory // *International Journal of Fluid Mechanics Research*. — 2007. — Vol. 34, no. 2. — P. 99–114.
- [8] Borisyuk A. O. Study of the flow and acoustic fields in a rigid-walled channel of circular cross-section with a local axisymmetric narrowing. Part 2. Numerical results // *International Journal of Fluid Mechanics Research*. — 2007. — Vol. 34, no. 3. — P. 191–209.
- [9] Миролюбов С. Г. Гидродинамика стеноза // *Современные проблемы биомеханики*. — 1983. — Т. 1. — С. 73–136.
- [10] Вовк И. В., Гринченко В. Т., Малюга В. С. Особенности движения среды в каналах со стенозами // *Прикладна гідромеханіка*. — 2009. — Т. 11 (83), № 4. — С. 17–30.
- [11] Малюга В. С. Численное исследование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Алгоритм решения // *Прикладна гідромеханіка*. — 2010. — Т. 12 (84), № 4. — С. 45–62.
- [12] Шалденко А. В., Гуржий А. А. Анализ процессов теплопереноса в прямолинейном канале со вставками при малых числах Рейнольдса // *Прикладна гідромеханіка*. — 2017. — Т. 17 (89), № 3. — С. 55–66.

- [13] Бруязкий Е. В., Костин А. Г., Никифорович Е. И. Численное исследование полей скорости и давления в плоском канале при наличии на его стенке квадратного препятствия // Прикладна гідромеханіка. — 2011. — Т. 13 (85), № 3. — С. 33–47.
- [14] Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows. — Oxford : Butterworth-Heinemann, 2007. — 656 p.
- [15] Ferziger J. H., Perić M. Computational methods for fluid dynamics. — Berlin : Springer, 2002. — 424 p.
- [16] van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme // *Journal of Computational Physics*. — 1974. — Vol. 14, no. 4. — P. 361–370.
- [17] Chakravarthy S., Osher S. High resolution applications of the Osher upwind scheme for the Euler equations // 6th Computational Fluid Dynamics Conference. — American Institute of Aeronautics and Astronautics. — 1983.
- [18] Sweby P. K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. — 1984. — Vol. 21, no. 5. — P. 995–1011.
- [19] Waterson N. P., Deconinck H. Design principles for bounded higher-order convection schemes – a unified approach // *Journal of Computational Physics*. — 2007. — Vol. 224, no. 1. — P. 182–207.
- [20] Issa R. I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // *Journal of Computational Physics*. — 1986. — Vol. 62, no. 1. — P. 40–65.
- [21] Versteeg H. K., Malalasekera W. An introduction to computational fluid dynamics. — Harlow : Pearson Education Ltd, 2007. — 503 p.
- [22] Anderson J. D. j. Computational fluid dynamics. The basics with applications. — New York : McGraw-Hill, 1995. — 547 p.
- [23] Khosla P. K., Rubin S. G. A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme // *Computers & Fluids*. — 1974. — Vol. 2, no. 2. — P. 207–209.
- [24] Hestenes M. R., Stiefel E. L. Method of conjugate gradients for solving linear systems // *Journal of Research of the National Bureau of Standards*. — 1952. — Vol. 49, no. 6. — P. 409–436.
- [25] Jacobs D. A. H. Preconditioned conjugate gradient methods for solving systems of algebraic equations. — Leatherhead, Surrey, 1980. — P. 31.
- [26] Templates for the solution of linear systems: Building blocks for iterative methods / Barrett R., Berry M., Chan T. F., Demmel J., Donato J., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C., and Van der Vorst H. — Philadelphia, PA : SIAM, 1994. — P. 107.

- [27] van der Vorst H. A. Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. — 1992. — Vol. 13, no. 2. — P. 631–644.
- [28] Netlib Repository at UTK and ORNL. — Режим доступу: <https://netlib.org/> (дата звернення: 2023-02-07).
- [29] Бруязкий Е. В., Костин А. Г. Численное исследование течения жидкости в закрытой прямоугольной полости с движущейся верхней крышкой // *Прикладна гідромеханіка*. — 2009. — Т. 11 (83), № 1. — С. 3–15.
- [30] Приходько А. А., Редчиц Д. А. Численное моделирование нестационарного течения в следе за цилиндром на основе уравнений Навье–Стокса // *Прикладна гідромеханіка*. — 2005. — Т. 7 (79), № 1. — С. 56–71.

REFERENCES

- [1] S. A. Berger and L.-D. Jou, “Flows in stenotic vessels,” *Annual Review of Fluid Mechanics Research*, vol. 32, pp. 347–382, 2000.
- [2] A. O. Borisyuk, “Experimental study of wall pressure fluctuations in rigid and elastic pipes behind an axisymmetric narrowing,” *Journal of Fluids and Structures*, vol. 26, no. 4, pp. 658–674, 2010.
- [3] A. O. Borisyuk and Y. A. Borisyuk, “Wall pressure fluctuations behind a pipe narrowing,” *Science-Based Technologies*, vol. 34, no. 2, pp. 162–170, 2017.
- [4] D. F. Young, “Fluid mechanics of arterial stenoses,” *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 101, no. 3, pp. 157–175, 1979.
- [5] A. Aldrovandi, F. Cademartiri, D. Arduini, D. Lina, F. Ugo, E. Maffei, A. Menozzi, C. Martini, A. Palumbo, F. Bontardelli, T. Gherli, L. Ruffini, and D. Ardissino, “Computed tomography coronary angiography in patients with acute myocardial infarction without significant coronary stenosis,” *Circulation*, vol. 126, no. 25, pp. 3000–3007, 2012.
- [6] G. Pedrizzetti, “Unsteady tube flow over an expansion,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 310, no. 1, pp. 89–111, 1996.
- [7] A. O. Borisyuk, “Study of the flow and acoustic fields in a rigid-walled channel of circular cross-section with a local axisymmetric narrowing. part 1. a theory,” *International Journal of Fluid Mechanics Research*, vol. 34, no. 2, pp. 99–114, 2007.
- [8] A. O. Borisyuk, “Study of the flow and acoustic fields in a rigid-walled channel of circular cross-section with a local axisymmetric narrowing. part 2. numerical results,” *International Journal of Fluid Mechanics Research*, vol. 34, no. 3, pp. 191–209, 2007.

- [9] S. G. Miroyubov, “Hydrodynamics of a stenosis,” *Modern Problems of Biomechanics*, vol. 1, pp. 73–136, 1983.
- [10] I. V. Vovk, V. T. Grinchenko, and V. S. Malyuga, “Special features of fluid motion in a duct with stenoses,” *Applied Hydromecanics*, vol. 11 (83), no. 4, pp. 17–30, 2009.
- [11] V. S. Malyuga, “Numerical investigation of flow in a duct with two serial stenosis. an algorithm of the solution,” *Applied Hydromecanics*, vol. 12 (84), no. 4, pp. 45–62, 2010.
- [12] A. V. Shaldenko and A. A. Gourzhii, “Analysis of the heat-transfer processes in a straight channel with insertions at low Reynolds numbers,” *Applied Hydromecanics*, vol. 17 (89), no. 3, pp. 55–66, 2017.
- [13] E. V. Brujatskiy, A. G. Kostin, and E. I. Nikiforovich, “Numerical investigation of the velocity and pressure fields in a flat duct having a rectangular ledge on the wall,” *Applied Hydromecanics*, vol. 13 (85), no. 3, pp. 33–47, 2011.
- [14] C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows*. Butterworth-Heinemann, 2007.
- [15] J. H. Ferziger and M. Perić, *Computational methods for fluid dynamics*. Springer, 2002.
- [16] B. van Leer, “Towards the ultimate conservative difference scheme. II. monotonicity and conservation combined in a second-order scheme,” *Journal of Computational Physics*, vol. 14, no. 4, pp. 361–370, 1974.
- [17] S. Chakravarthy and S. Osher, “High resolution applications of the Osher upwind scheme for the Euler equations,” in *6th Computational Fluid Dynamics Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1983.
- [18] P. K. Sweby, “High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 21, no. 5, pp. 995–1011, 1984.
- [19] N. P. Waterson and H. Deconinck, “Design principles for bounded higher-order convection schemes – a unified approach,” *Journal of Computational Physics*, vol. 224, no. 1, pp. 182–207, 2007.
- [20] R. I. Issa, “Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting,” *Journal of Computational Physics*, vol. 62, no. 1, pp. 40–65, 1986.
- [21] H. K. Versteeg and W. Malalasekera, *An introduction to computational fluid dynamics*. Pearson Education Ltd, 2007.
- [22] J. D. j. Anderson, *Computational fluid dynamics. The basics with applications*. McGraw-Hill, 1995.
- [23] P. K. Khosla and S. G. Rubin, “A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme,” *Computers & Fluids*, vol. 2, no. 2, pp. 207–209, 1974.

- [24] M. R. Hestenes and E. L. Stiefel, “Method of conjugate gradients for solving linear systems,” *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol. 49, no. 6, pp. 409–436, 1952.
- [25] D. A. H. Jacobs, *Preconditioned conjugate gradient methods for solving systems of algebraic equations*, p. 31. 1980.
- [26] R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, and H. Van der Vorst, *Templates for the solution of linear systems: Building blocks for iterative methods*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [27] H. A. van der Vorst, “Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems,” *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 13, no. 2, pp. 631–644, 1992.
- [28] “Netlib repository at utk and ornl.”
- [29] E. V. Brujatskiy and A. G. Kostin, “Numerical investigation of fluid motion in a closed rectangular cavity with movable upper lid,” *Applied Hydromecanics*, vol. 11 (83), no. 1, pp. 3–15, 2009.
- [30] A. A. Prikhodko and D. A. Redchidz, “Numerical simulation of unsteady flow in a wake behind a cylinder on the basis of the navier–stokes equations,” *Applied Hydromecanics*, vol. 7 (79), no. 1, pp. 56–71, 2005.

А. А. Борисюк

Исследование течения в прямом плоском жестком канале с двумя осесимметричными жесткостенными сужениями прямоугольной формы. Часть 1. Теория

Разработан численный метод решения задачи движения жидкости в прямом плоском жестком канале с двумя осесимметричными жесткостенными сужениями прямоугольной формы. Метод имеет второй порядок точности по пространственным координатам и времени. При этом уравнения Навье–Стокса и неразрывности решаются в переменных скорость–давление посредством интегрирования по элементарным объемам, на которые разбивается расчетная область. Полученные в результате интегральные уравнения подлежат пространственно-временной дискретизации, что приводит к решению нелинейных алгебраических уравнений. Временная часть дискретизации производится на основе неявной трехточечной несимметричной схемы с разностями вспять, а пространственная – на основе TVD-схемы с соответствующей схемой дискретизации пространственных производных. Решение указанных алгебраических уравнений производится в три этапа. Первоначально дискретное уравнение количества движения переписывается в виде уравнения для скорости. Затем на основе дискретного уравнения неразрывности выводится уравнение давления. После этого к полученным нелинейным связанным алгебраическим уравнениям для скорости и давления применяется процедура нахождения и согласования между собой последовательных приближений этих величин. При вычислении

первого приближения в уравнении скорости неизвестные значения давления и скорости (в выражении для потока) заменяют их значениями, найденными в предыдущий момент времени. При нахождении следующих приближений эти величины заменяют уже известными предыдущими приближениями. Количество приближений определяется заданной точностью решения. Это позволяет переходить от решения связанных систем нелинейных алгебраических уравнений для скорости и давления к соответствующим независимым линейным уравнениям. Для решения систем линейных алгебраических уравнений применяется итерационный алгоритм с использованием методов отложенной коррекции и сопряженных градиентов, а также солверов ICCG (для симметричных матриц) и Bi-CGSTAB (для асимметричных матриц).

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: течение, канал, сужение, уравнение Навье–Стокса, итерационный метод

A. O. Borisyuk

Studying the flow in a straight flat rigid channel with two axisymmetric rigid-wall narrowings of a rectangular shape. Part 1. Theory

The paper deals with developing a numerical method for solving the problem of fluid movement in a straight flat rigid channel with two axisymmetric rigid-wall narrowings of a rectangular shape. The method has the second order of accuracy in terms of spatial coordinates and time. At the same time, the Navier–Stokes and continuity equations are solved in the velocity-pressure variables using integration over elementary volumes into which the computational domain is divided. The resulting integral equations are subject to spatiotemporal discretization, which leads to the need to solve nonlinear algebraic equations. The base of the temporal discretization part is an implicit three-point asymmetric scheme with backward differences, and the base of the spatial one is the TVD scheme with the appropriate discretization scheme of spatial derivatives. The solving of specified algebraic equations includes three stages. First, rewrite the discrete momentum equation as an equation for velocity. Then, based on the discrete continuity equation, derive the pressure equation. After that, apply the procedure of finding and matching successive approximations of these quantities to the resulting coupled nonlinear algebraic equations for velocity and pressure. When calculating the first approximation in the velocity equation, substitute the unknown pressure and velocity (in the expression for the flow) by their values found at the previous time moment. When finding the following approximations, replace these values with already-known previous approximations. The given solution accuracy determines the approximation number. It makes it possible to move from the solution of coupled systems of nonlinear algebraic equations for velocity and pressure to the corresponding independent linear equations. To solve systems of linear algebraic equations, apply an iterative algorithm using methods of delayed correction and conjugate gradients, as well as ICCG (for symmetric matrices) and Bi-CGSTAB (for asymmetric matrices) solvers.

KEY WORDS: flow, channel, narrowing, the Navier–Stokes equations, iterative method