

УДК 532.52

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ПОВЕРХНОСТНЫХ ЗАГРЯЗНЕНИЙ В ДЕЛЬТАХ РЕЧНЫХ СИСТЕМ

А. А. Гуржий<sup>1</sup>, В. И. Осадчий<sup>2</sup>, Е. И. Никифорович<sup>3†</sup>, О. И. Кордас<sup>4‡</sup>,  
Д. И. Черний<sup>5</sup>

<sup>1</sup> *Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»  
пр. Победы, 37, 03056, Киев, Украина*

<sup>2</sup> *Украинский гидрометеорологический институт ГСЧС Украины и НАН Украины  
пр. Науки, 37, 03028, Киев, Украина*

<sup>3</sup> *Институт гидромеханики НАН Украины  
ул. Желябова, 8/4, 030570, Киев, Украина  
† E-mail: [eugenen@kth.se](mailto:eugenen@kth.se)*

<sup>4</sup> *Королевский технологический институт  
Текникринген 10В, 10044, Стокгольм, Швеция  
‡ E-mail: [olga@kth.se](mailto:olga@kth.se)*

<sup>5</sup> *Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко  
ул. Владимирская, 64/13, 01601, Киев, Украина*

*Получено 02.03.2018*

В приближении идеальной несжимаемой жидкости рассмотрена двухмерная адвекция пассивной примеси поверхностными течениями в дельте речных систем со сложной геометрией береговой линии. Задача решена с использованием численного метода дискретных особенностей, адаптированного к задачам адвекции жидкости. Модель предусматривает предварительную оцифровку береговой линии, которая связана с размещением вдоль береговой линии системы точек коллокаций и системы фиксированных точечных вихрей в соответствии с определенными рекомендациями. Математическая модель допускает учет влияния ветра на процессы распространения выделенной пассивной жидкости (загрязнения) в моделируемом течении. Для этого в динамическую систему вводится система вихревых вращений, расположенная над расчетной поверхностью. В работе обсуждается иллюстрационный пример эволюции поверхностного загрязнения в Днепровско-Бугском лимане, сформированном в низовье рек Днепр и Южный Буг. Показано, что действие ветра оказывает значительное влияние на характер движения выделенной жидкости. В частности, образование циркуляционных зон течения приводит к заметному замедлению скорости движения загрязнения и его смещению в поперечном направлении по отношению к основному потоку. Анализ количественных данных показывает,

что, в сравнении со случаем адвекции жидкости в штילевых условиях, под влиянием умеренного ветра с различными направлениями площадь загрязнения акватории лимана существенно увеличивается.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** адвекция, поверхностное течение, загрязнение, метод дискретных особенностей, Днепровско-Бугский лиман

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы стремительное развитие новых инновационных технологий, интенсификация транспортного сообщения и экологическая безопасность ставят перед исследователями ряд новых прикладных задач, которые должны быть решены в ближайшее время. Создание и ввод в эксплуатацию новых систем контроля и управления сообщений на транспорте, человеческий фактор, а, в некоторых случаях, и неблагоприятные погодные условия приводят к существенному повышению рисков аварий на транспорте, могущих сопровождаться загрязнением окружающей среды и экологическими катастрофами [1].

Одна из важных задач экологической безопасности государства состоит в поддержании экологической системы в условиях нарастающей опасности техногенных катастроф на транспорте. Для этого во многих передовых странах Европы, Северной Америки и Юго-Восточной Азии сегодня сформированы центры мониторинга и контроля экологической обстановки на море, предназначенных для выработки решений по локализации и действий по ликвидации последствий аварий на морских шельфах и в зонах экономических интересов государств [2, 3].

Во многих случаях центры по ликвидации последствий экологических аварий используют различные моделирующие системы, включающие в себя целый комплекс мониторинговых, прогнозирующих и информационных систем. Для обеспечения прогноза распространения поверхностного загрязнения некоторые из них включают в себя системы подвижных и стационарных буев, измеряющих параметры ветра и течений, химические и физические параметры морской среды [4]. Такие данные посредством спутниковой связи передаются в национальные вычислительные центры для составления прогноза, включая долгосрочный [5]. Часть систем включает метеорологическую составляющую, предназначенную для уточнения прогноза распространения нефтепродуктов в условиях сложной геометрии береговой линии [6, 7]. Описание и классификацию моделей, созданные за последние десятилетия, а также некоторые детали их применения можно найти в работе [8].

Взаимодействие загрязнения с морской поверхностью является сложным явлением, включающим в себя различные физические и химические процессы. Например, распространение нефтяного пятна по морской поверхности связано не только с переносом, вызванным морскими течениями, приливами и дрейфом под действием ветра, но и диффузией частиц нефти, механическим растеканием пятна, испарением и оседанием различных компонент нефти, эмульгированием, испарением воды и пр. [9, 10].

Учет этих эффектов значительно улучшает качество прогноза и открывает определенные возможности для составления долгосрочных прогнозов распространения поверхностных загрязнений на водной поверхности. В этом случае необходимо проводить

объемные вычисления с использованием различных комбинированных методов, опираясь на широкую базу уже имеющейся и текущей информации [11, 12]. Для решения подобных проблем в передовых странах существуют специальные вычислительные центры [7, 13], из которых результаты расчетов поступают непосредственно в отделы по чрезвычайным ситуациям службы береговой охраны.

Экологическая безопасность на планете зависит не только от передовых стран, но и от обстановки в странах, для которых разработка, приобретение или кооперация в использовании комплексных моделирующих систем встречает ряд трудностей, в первую очередь, финансовых. Исходя из этого, возникает острая необходимость в создании простых мобильных систем для краткосрочного прогнозирования распространения загрязнений в прибрежной зоне государств, которые могут обеспечивать формирование краткосрочных прогнозов для заинтересованных национальных служб на персональных компьютерах средней производительности. Основным требованием к таким прикладным системам является доступность исходной информации, достоверность прогнозирования и умеренный объем вычислений, который может быть реализован в режиме, опережающем реальное время.

Для создания математической модели краткосрочного прогноза эволюции различного вида загрязнений, которая могла быть реализована на мобильных вычислительных средствах, необходимо выделить определяющие факторы, влияющие на процесс распространения поверхностного загрязнения. Прежде всего, к их числу следует отнести глобальное течение, образованное океаническим движением вод, локальными морскими циркуляциями, речными потоками и приливными течениями [14]. Другим важным фактором является действие ветровой нагрузки, которое вносит в локальные течения нестационарную составляющую скорости [15].

Основная задача моделирующей системы для составления краткосрочного прогноза состоит в расчете эволюции распространения загрязнения в рассматриваемой акватории для принятия службами береговой охраны последовательности действий по локализации и ликвидации последствий экологической аварии. Поэтому точность составления прогноза на заданном временном интервале должна быть в пределах возможностей визуального и локационного мониторинга на судах специального назначения. Поскольку на протяжении первых нескольких дней физическое и химическое взаимодействие загрязнения с водной средой не приводит к появлению существенного смещения в его локации, можно предположить, что для большинства видов загрязнений морской поверхности эти факторы не окажут существенного влияния на процесс переноса [16, 17]. Таким образом, при составлении модели составляющие загрязнения могут быть рассмотрены исключительно в виде системы пассивных жидких частиц [4–6, 18, 19].

Фактически это означает, что загрязнение участвует в нелинейном конвективном переносе потоком жидкости [20, 21]. Анализ масштабов физических процессов в жидкостях [16, 22–24] показывает, что такое допущение оправдано только на малых временных интервалах, в течение которых диффузионные эффекты еще не успели проявить заметного влияния. В современной научной литературе появился термин *адвекция жидкости*, означающий физическое явление, связанное с переносом различных скалярных полей (транспортное свойство) только за счет движения сплошной среды [20, 25, 26].

Простое условие равенства скорости движения пассивной жидкой частицы скорости

течения в точке, в которой она расположена, приводит к уравнению движения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

которое в современной литературе [20] называют уравнением адвекции. При этом нелинейность движения жидкости сосредоточена в правой части уравнения, описывающего движение лагранжевой жидкой частицы в эйлеровом поле скорости.

Уравнение (1) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с соответствующими начальными условиями (задача Коши). Оно позволяет свести начально-краевую задачу переноса выделенной жидкости поверхностным течением к решению двух отдельных задач: двухмерной гидродинамической задачи течения жидкости в расчетной области и задачи адвекции жидкости в рассматриваемом течении. Определение правой части этого уравнения представляет собой независимую гидродинамическую задачу. Во многих случаях именно она связана с большими объемами вычислений и требует наибольших компьютерных ресурсов.

В последнее время в вычислительной гидродинамике активно применяется метод дискретных особенностей [27, 28]. Основная его идея связана с аналогией, которая существует между потенциальным и циркуляционным движениями идеальной несжимаемой жидкости. Так, введение в систему определенных граничных условий на безграничной плоскости вдоль произвольной линии, совпадающей с границей течения, приводит к системе интегральных сингулярных уравнений. Это эквивалентно введению в численную схему решения гидродинамической задачи системы точечных вихрей [27, 29, 30], интенсивность которых определяется граничными условиями.

Несмотря на то, что метод дискретных особенностей позволяет достаточно точно описать гидродинамическое течение со сложной геометрией ограничивающих поверхностей, в нем есть один существенный недостаток: система сингулярных вихрей, расположенная на границе течения, наводит бесконечную скорость по мере приближения к точечным вихрям вдоль границы. Это приводит к тому, что метод дискретных особенностей вносит существенные ошибки в определении поля скорости в окрестности границ течения. Специальные методики интегрирования некоторых характеристик течения вдоль границы течения позволяют усреднить сингулярности [28], однако этот прием неприменим для отдельной жидкой частицы. Побочным результатом такого моделирования становится то, что жидкая частица, движущаяся рядом с границей течения, может ее «пересекать». Из-за вносимых погрешностей метод дискретных особенностей находит ограниченное применение в задачах переноса пассивной примеси [31].

Недавние исследования [32, 33] позволили устранить эту особенность течения жидкости около границ за счет смещения системы сингулярных вихревых структур за его границу. Следует однако заметить, что это приводит к появлению высокой обусловленности системы линейных алгебраических уравнений для определения интенсивности вихрей. Введение определенных правил размещения системы контрольных точек (точек коллокации) и точечных вихрей позволяет уменьшить обусловленность системы и решить поставленную задачу с заданной точностью [33, 34].

Цель данного исследования состоит в формировании математической модели процесса переноса выделенной жидкости поверхностными течениями в дельтах речных систем с учетом влияния силы и направления ветра. При этом подразумевается выяв-

ление основных закономерностей процесса адвекции жидкости во внутренних течениях со сложной геометрией ограничивающих поверхностей и составление примера краткосрочного прогноза в акватории дельты речных систем при попадании загрязнения на водную поверхность.

Статья организована следующим образом. Первый раздел является вводным. Во втором разделе рассматриваются этапы формирования математической модели, описывающей эволюцию загрязнения на водной поверхности. Третий раздел посвящен обоснованию метода мониторинга выделенной жидкости в произвольном поле скорости. В четвертом разделе приведен пример построения краткосрочного прогноза распространения загрязнения в Днепровско-Бугском лимане в случае возможной аварии в дельте реки Днепр. В последнем разделе статьи сформулированы выводы по работе.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим двухмерное потенциальное движение идеальной несжимаемой жидкости внутри канала, ограниченного непроницаемыми границами сложной геометрии (Рис. 1). Метод дискретных особенностей, адаптированный к задачам адвекции [32], позволяет определить функцию тока  $\Psi(x, y, t)$  течения для заданной геометрии канала и профиль скорости  $U_1(s, t)$  или расхода жидкости  $Q(t)$  в произвольном сечении канала (где  $s$  — линия соединяющая границы течения). Необходимо найти распределение поля скорости  $\mathbf{U} = \{U(x, y, t), V(x, y, t)\}$  в рассматриваемом течении.

Гидродинамическая задача решается в терминах функции тока  $\Psi(x, y, t)$ . Поскольку линия тока постоянного значения представляет собой кривую, вдоль которой нормальная компонента скорости равна нулю, то граничные условия на ограничивающих поверхностях канала  $(x_c, y_c)$  на каждой из поверхностей можно записать в виде

$$\Psi|_{(x_c, y_c)} = \text{const.} \quad (2)$$

Известно, что распределение функции тока в двухмерном случае связано с распределением компонент поля скорости выражениями [35]

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3)$$

В этом случае при проведении вычислений удобно принять значение функции тока на одной из береговых линий канала  $\Psi_0 = 0$ . Тогда значения функции тока на других

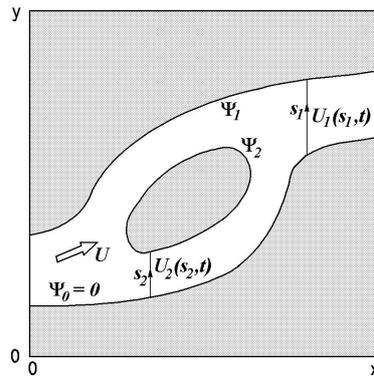


Рис. 1. Пример геометрии канала

ограничивающих поверхностях канала определяются интегралом

$$\Psi_\alpha = \int_{C_\alpha} U_\alpha(s) ds + \Psi_0. \quad (4)$$

Здесь  $C_\alpha$  — линия, соединяющая границу  $\theta$  с границей  $\alpha$ , а  $U(s)$  — профиль компоненты поля скорости течения в направлении, перпендикулярном к линии  $s$  в текущей точке (Рис. 1). Фактически, интеграл в правой части выражения (4) представляет собой поверхностный расход жидкости  $Q(t)$ , протекающей между границами канала.

Для корректного определения линии тока, совпадающей с границей канала, метод дискретных особенностей предусматривает введение в расчетную схему системы точек коллокаций и фиксированных точечных вихрей. Точки коллокаций располагаются вдоль границ на некоторых расстояниях  $\Delta_i$  одна от другой ( $i = 1, \dots, N$ , где  $N$  — общее число точек коллокаций в рассматриваемой системе). Этими расстояниями определяется точность дискретизации границ канала. Чем больше точек коллокаций, тем качественнее формируется граница течения. При этом, чем меньше локальный радиус кривизны, тем больше точек коллокаций должен содержать сегмент границы.

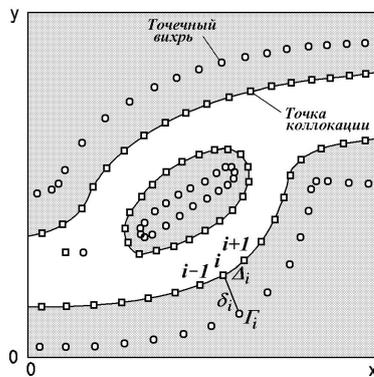


Рис. 2. Пример расположения системы точек коллокаций и фиксированных точечных вихрей

Опыт проведения дискретизации береговой линии морских течений показывает, что несоблюдение этих рекомендаций может привести либо к существенной деформации фиксированной линии тока между точками коллокаций (и, в конечном итоге, к «протеканию» жидкости через границу течения), либо высокой обусловленности финальной системы линейных алгебраических уравнений [32,33]. Численное решение таких систем может привести к существенным ошибкам в решении, также вызывающим ложное «проникновение» жидкости через границы. Пример расположения точек коллокаций для двухмерного канала с островом показан на Рис. 2.

Система фиксированных точечных вихрей, расположенных около точек коллокаций, наводит поле функции тока, которое описывает течение внутри канала. Согласно рекомендаций [32, 33], каждый точечный вихрь должен располагаться на расстоянии  $\delta_i$  на перпендикуляре к касательной, проведенной к границе течения в точке коллокации. При этом следует выбирать  $\delta_i > \Delta_i$ , где  $\Delta_i$  — расстояние между текущей и предыдущей точками коллокаций [32]. Обычно принимают  $\delta_i = (1.0 \dots 1.5)\Delta_i$ . Рис. 2 иллюстрирует расположение системы фиксированных точечных вихрей в примере, рассматриваемом на Рис. 1. Количество точек коллокаций и фиксированных точечных вихрей в методе дискретных особенностей, адаптированном к задаче переноса выделенной жидкости, должно совпадать.

Функция тока, наведенная системой точечных вихрей с интенсивностями  $\Gamma_i$ , рас-

положенных в точках с координатами  $(x_i, y_i)$ , определяется выражением [36] которое представляет собой сумму вкладов каждого точечного вихря в рассматриваемую точку течения:

$$\Psi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \ln[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]. \quad (5)$$

Условие равенства значений функции тока в точках коллокаций на каждой границе рассматриваемого течения позволяет сформировать на основе (5) систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных интенсивностей  $\Gamma_i$  системы фиксированных точечных вихрей:

$$\sum_{i=1}^N \Gamma_i \ln[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] = -4\pi\Psi(x_j, y_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (6)$$

В этом случае распределение функции тока определяется суммой (5), а компоненты скорости течения — дифференцированием этого уравнения по пространственным координатам в соответствии с (3).

Следовательно, компоненты поля скорости течения в точке  $(x, y)$  задаются выражениями

$$U(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i(y - y_i)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \quad (7)$$

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i(x - x_i)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2},$$

учитывающими вклады всех фиксированных точечных вихрей.

При решении гидродинамической задачи метод дискретных особенностей позволяет принять во внимание вклад ветровой компоненты скорости на поверхности течения. Для этого над некоторой базовой точкой  $A$  расчетной области можно разместить систему вихрей (Рис. 3). Она состоит из  $K$  вихрей одинаковой интенсивности  $\Gamma$  (в глубине рисунка) и вихрей с интенсивностью  $-\Gamma$  (в передней его части). Интенсивность вихрей задает величину модуля скорости поверхностного течения, наведенного ветром, а угол  $\alpha$  — направление ветра. Здесь  $a$  — длина слоя вихрей,  $b$  — расстояние между слоями вихрей с противоположными по знаку интенсивностями.

В случае  $\alpha = 0^\circ$  каждый вихрь в системе координат, связанной с точкой  $A$ , имеет следующие параметры ( $k = 1, \dots, K$ )

$$\hat{x}_k^{(1)} = -\frac{a}{2} + \frac{ak}{K-1}, \quad \hat{y}_k^{(1)} = \frac{b}{2}, \quad \Gamma_k^{(1)} = \Gamma, \quad (8)$$

$$\hat{x}_k^{(2)} = -\frac{a}{2} + \frac{ak}{K-1}, \quad \hat{y}_k^{(2)} = -\frac{b}{2}, \quad \Gamma_k^{(2)} = -\Gamma.$$

Такая система наводит в точке  $A$  скорость, модуль которой определяется выражением

$$U_s = \frac{\Gamma b}{2\pi} \sum_{k=1}^K \frac{1}{\left[\hat{x}_k^{(1)}\right]^2 + b^2/4 + h^2}. \quad (9)$$

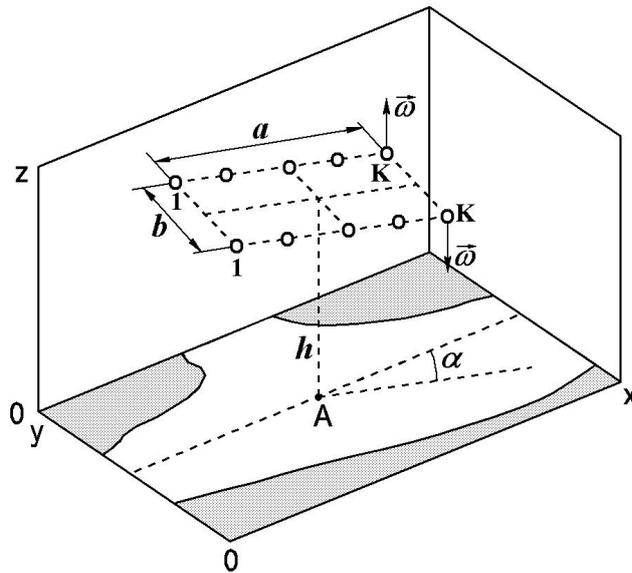


Рис. 3. Распределение системы вихортов над плоскостью течения

Зависимость усредненной по времени скорости поверхностного течения  $U_s$  от усредненного значения скорости ветра  $U_w$ , построенная по результатам натурных измерений [37], показана на Рис. 4. Таким образом, для заданной скорости ветра можно определить соответствующее значение модуля скорости поверхностного течения. Далее, выражение (9) позволяет для каждого момента времени определить интенсивности вихортов над расчетной плоскостью, моделирующих влияние ветра на скорость поверхностного течения.

Поворот системы на угол  $\alpha$  приводит к изменению координат вихортов для каждого из слоев:

$$\begin{aligned} x_k &= x_A + \hat{x}_k \cos \alpha + \hat{y}_k \sin \alpha, \\ y_k &= y_A - \hat{x}_k \sin \alpha + \hat{y}_k \cos \alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда наведенная системой вихортов функция тока принимает значение

$$\Psi_b(x, y) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{[x - x_k^{(1)}]^2 + [y - y_k^{(1)}]^2 + h^2}{[x - x_k^{(2)}]^2 + [y - y_k^{(2)}]^2 + h^2}, \quad (11)$$

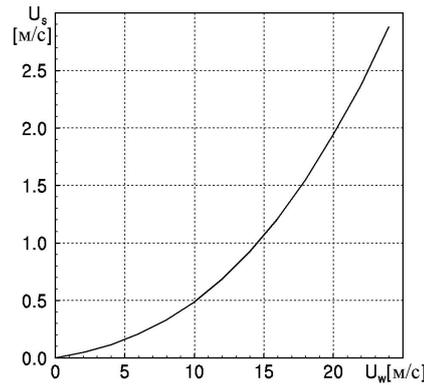


Рис. 4. Зависимость скорости поверхностного течения  $U_s$  от скорости ветра  $U_w$  по результатам натуральных измерений [37]

а компоненты скорости течения в текущий момент времени определяются из выражений

$$U_b(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{y - y_k^{(1)}}{[x - x_k^{(1)}]^2 + [y - y_k^{(1)}]^2 + h^2} - \frac{y - y_k^{(2)}}{[x - x_k^{(2)}]^2 + [y - y_k^{(2)}]^2 + h^2} \right\}, \quad (12)$$

$$V_b(x, y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{x - x_k^{(1)}}{[x - x_k^{(1)}]^2 + [y - y_k^{(1)}]^2 + h^2} - \frac{x - x_k^{(2)}}{[x - x_k^{(2)}]^2 + [y - y_k^{(2)}]^2 + h^2} \right\}.$$

для заданных величины ветра и его направления.

Тогда система линейных алгебраических уравнений (6) относительно неизвестных интенсивностей фиксированных точечных вихрей принимает вид ( $j = 1, \dots, N$ )

$$\sum_{i=1}^N \Gamma_i(t) \ln[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] = -4\pi \{ \Psi(x_j, y_j) + \Psi_b(x_j, y_j, t) \}. \quad (13)$$

После определения интенсивностей  $\Gamma_i$  фиксированных точечных вихрей можно определить в произвольной точке течения значения функции тока

$$\Psi(x, y, t) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \ln[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2] + \Psi_b(x, y, t) \quad (14)$$

и проекции скорости течения поверхностного течения

$$U(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i(y - y_i)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} + U_b(x, y, t), \quad (15)$$

$$V(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i(x - x_i)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} + V_b(x, y, t)$$

с учетом нестационарности ветровой нагрузки.

Поставленную математическую задачу удобно обезразмерить на характерный геометрический масштаб задачи  $L_0$  и характерный временной масштаб  $T_0$ :

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L_0}, & y^* &= \frac{y}{L_0}, & z^* &= \frac{z}{L_0}, \\ U^* &= \frac{UT_0}{L_0}, & V^* &= \frac{VT_0}{L_0}, & \Gamma^* &= \frac{\Gamma T_0}{L_0^2}, & \Psi^* &= \frac{\Psi T_0}{L_0^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Подстановка выражений (16) в расчетные соотношения приводит к нормированным уравнениям, математическая запись которых при этом не меняется. При необходимости, нормированные величины могут быть денормированы:

$$\begin{aligned} x &= x^* L_0, & y &= y^* L_0, & z &= z^* L_0, \\ U &= \frac{U^* L_0}{T_0}, & V &= \frac{V^* L_0}{T_0}, & \Gamma &= \frac{\Gamma^* L_0^2}{T_0}, & \Psi &= \frac{\Psi^* L_0^2}{T_0}. \end{aligned} \quad (17)$$

В дальнейшем поставленная математическая задача будет решена в безразмерном виде. Для краткости записи звездочки при безразмерных величинах будем опускать.

### 3. МОНИТОРИНГ КОНТУРА

Перемешивание жидкости поверхностными течениями представляет собой сложное природное явление. Оно связано не только с переносом выделенного объема жидкости в направлении глобального течения, но и с его деформацией из-за неоднородности поля скорости. Распространение загрязнений в жидкостях удобно проводить на основе анализа траекторий отдельных жидких частиц (маркеров), составляющих границы выделенной области. Известно, что адвекция в различных течениях может приводить к различным видам деформации, в результате которых границы выделенной области жидкости претерпевают существенное растяжение [20].

Отличительная особенность процесса адвекции жидкости состоит в том, что некоторые части сегментов границ могут растягиваться сильнее по сравнению с другими [38, 39], а отдельные фрагменты границ выделенной жидкости — даже сжиматься. Во многих случаях увеличение общего числа маркеров, формирующих границу выделенной жидкости, не решает проблему корректного ее отслеживания. По этой причине для описания процесса эволюции границ в рассматриваемых течениях применяют различные виды интерполяции. Некоторые аспекты этой проблемы и виды интерполяций, которые применяемые сегодня в задачах адвекции жидкости, можно почерпнуть в работе [21]. Часто используют параметрические методы, в которых параметром интерполяции является расстояние между маркерами.

На Рис. 5 показан пример зависимости координат маркеров границ замкнутого контура, в котором в качестве аргумента функции принято расстояние от некоторого произвольно выбранного маркера до текущего маркера. С одной стороны, интерполяция контура позволяет сократить общее количество маркеров для случая, когда расстояние

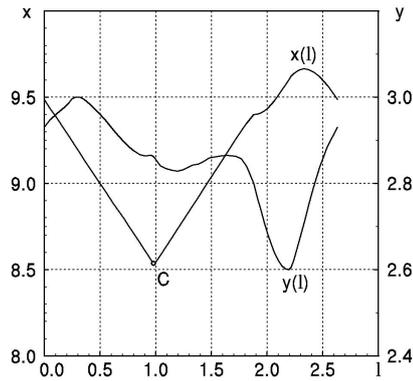


Рис. 5. Зависимость координат точек замкнутого контура от его длины

от текущего маркера до соседних меньше некоторого критического значения  $\delta_{min}^{cr}$ . Это в некоторых случаях может значительно уменьшить общий объем вычислений. С другой стороны, если расстояние между маркерами окажется больше критического значения  $\delta_{max}^{cr}$ , можно прибегнуть к добавлению необходимого количества маркеров.

В работе применяется интерполяционный многочлен Лежандра  $N$ -го порядка по схеме Эйткена [40], построенный на системе узловых точек  $(x_0, l_0), (x_1, l_1), \dots, (x_N, l_N)$ . Интерполяционная формула имеет следующий вид:

$$x(l) = \sum_{n=0}^N b_n \prod_{i=0}^{N-1} (l - l_i). \quad (18)$$

Здесь

$$b_0 = l_0, \quad b_1 = \frac{x_1 - x_0}{l_1 - l_0}, \quad b_2 = \left( \frac{x_2 - x_0}{l_2 - l_0} - b_1 \right) \frac{1}{l_2 - l_1},$$

$$b_3 = \left[ \left( \frac{x_3 - x_0}{l_3 - l_0} - b_1 \right) \frac{1}{l_3 - l_1} \right] \frac{1}{l_3 - l_2}, \dots$$

Аналогично строится интерполяционная формула для функции  $y(l)$ .

Анализ процесса адвекции в различных гидродинамических течениях [21, 25, 38] показывает, что первоначально гладкая граница часто приобретает изломы, появляются спиральные структуры, растяжения в различных направлениях. Трассировка таких сегментов непрерывными интерполяционными формулами различного порядка приводит к появлению численных ошибок, связанных с локальными погрешностями интерполяции сегментов, содержащих разрывы первого рода. На Рис. 5 показан случай, в котором функция  $y(l)$  является гладкой и непрерывной, а функция  $x(l)$  имеет разрыв первого рода (точка  $C$ ). Для таких фрагментов можно воспользоваться кусочной интерполяцией [41], в которой граница сначала анализируется на наличие разрывов, а только затем гладкие ее фрагменты подвергаются интерполяции.

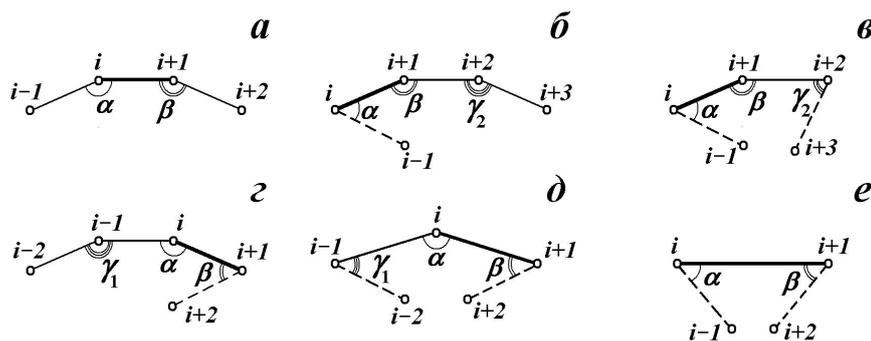


Рис. 6. Примеры положения участка интерполирования между точками с индексами  $i$  и  $i + 1$  со вспомогательными точками для построения интерполяционного многочлена

При построении интерполяционной функции точка разрыва точек оказаться на различных участках интерполяционного отрезка. Все возможные случаи интерполяции сегмента между точками с индексами  $i$  и  $i + 1$  показаны на Рис. 6.

Для интерполяции сегмента границы между маркерами с индексами  $i$  и  $i + 1$  может быть использован следующий алгоритм.

- Если  $\alpha > \Theta_{cr}$  и  $\beta > \Theta_{cr}$ , то интерполяционный полином третьего порядка (18) строится по координатам четырех маркеров с индексами  $i - 1, i, i + 1$  и  $i + 2$  для текущего интерполяционного отрезка (Рис. 6а).
- Если  $\alpha < \Theta_{cr}$ , но  $\beta > \Theta_{cr}$ , то необходимо анализировать угол  $\gamma_2$ . Если  $\gamma_2 > \Theta_{cr}$ , то интерполяционный полином третьего порядка (18) строится по координатам четырех маркеров с индексами  $i, i + 1, i + 2$  и  $i + 3$  для текущего интерполяционного отрезка (Рис. 6б). Если же  $\gamma_2 < \Theta_{cr}$ , то строится интерполяционный полином второго порядка (18) по координатам трех маркеров  $i, i + 1$  и  $i + 2$  (Рис. 6в).
- Если  $\alpha > \Theta_{cr}$ , но  $\beta < \Theta_{cr}$ , то необходимо анализировать угол  $\gamma_1$ . Если  $\gamma_1 > \Theta_{cr}$ , то интерполяционный полином третьего порядка (18) строится по координатам четырех маркеров с индексами  $i - 2, i - 1, i$  и  $i + 1$  для интерполяции текущего сегмента (Рис. 6г). В противном случае, если  $\gamma_1 < \Theta_{cr}$ , то для интерполяции текущего отрезка строится интерполяционный полином второго порядка (18) по координатам трех маркеров с индексами  $i - 1, i$  и  $i + 1$  (Рис. 6д).
- Если  $\alpha < \Theta_{cr}$  и  $\beta < \Theta_{cr}$ , то строится интерполяционный полином первого порядка (18) по координатам двух маркеров с индексами  $i$  и  $i + 1$  (Рис. 6е).

Заметим, что интерполирование необходимо проводить на каждом шаге интегрирования по времени задачи Коши (1).

Таким образом, предлагаемая модель описывает пространственно-временной перенос выделенной пассивной жидкости в течении со сложной геометрией границ. Математическая постановка сводится к последовательному решению адаптированном к зада-

чам адвекции жидкости методом дискретных особенностей краевой задачи по определению поля скорости поверхностного потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости с учетом ветровой нагрузки и задачи Коши, позволяющей определить новое пространственное системы пассивных жидких частиц (маркеров), образующих границы выделенной области в рассматриваемом течении.

Необходимо анализировать расстояния и углы между последовательностью маркеров. Если расстояния между текущим и соседними маркерами меньше некоторого критического значения, то проводится удаление маркера. Если расстояние между маркерами больше некоторого критического значения, в модель добавляется необходимое количество маркеров с использованием интерполяции их координат на основе полиномиальной интерполяции третьего порядка для гладких участков. В качестве аргумента интерполяционной функции выбрана длина контура от произвольно выбранного опорного маркера. В математической модели для интерполяции используются только гладкие участки интерполяционной функции.

Анализ поставленной задачи показывает, что точность решения зависит от точности дискретизации береговой линии, точности определения профиля скорости в произвольном сечении канала (или поверхностного расхода жидкости), точности используемого в расчетах прогноза ветровой нагрузки, временного шага и интервала интегрирования задачи Коши, и точности пространственной дискретизации границ выделенной жидкости.

#### 4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В качестве примера составления прогноза рассмотрим возможный случай выброса поверхностного загрязнения в Днепро-Бугском лимане (Днепровском заливе), в который впадают реки Днепр и Южный Буг. Схема залива показана на Рис. 7, который выполнен в масштабе  $L_0 = 5.0$  км. В качестве временного масштаба выбрано значение  $T_0 = 1.0$  час.

Днепр является одной из полноводных рек восточной Европы со среднегодовым расходом  $1700 \text{ м}^3/\text{с}$  в устье [42, 43]. Средняя скорость течения в устье реки составляет  $0.6 \dots 0.7 \text{ м/с}$  при его ширине порядка  $4.0 \dots 5.0$  км. Река Южный Буг — одна из больших рек Украины со средним расходом воды порядка  $160 \text{ м}^3/\text{с}$  в устье и средней скоростью течения  $0.4 \dots 0.5 \text{ м/с}$  [43, 44]. Днепро-Бугский лиман представляет собой водоем длиной  $35 \dots 40$  км и шириной  $5 \dots 10$  км. С востока в лиман впадает р. Днепр (в его южную часть со стороны Крымского полуострова), а в среднюю часть (со стороны континентальной Украины) — р. Южный Буг. Выход Днепро-Бугского лимана в Черное море представляет собой

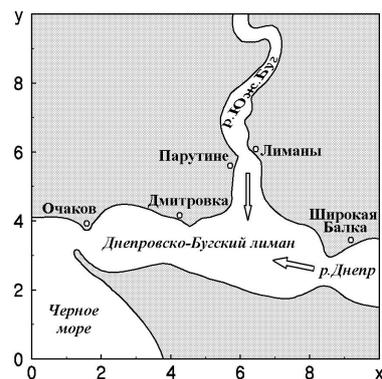


Рис. 7. Карта Днепровского залива, сформированного устьями рек Днепр и Южный Буг

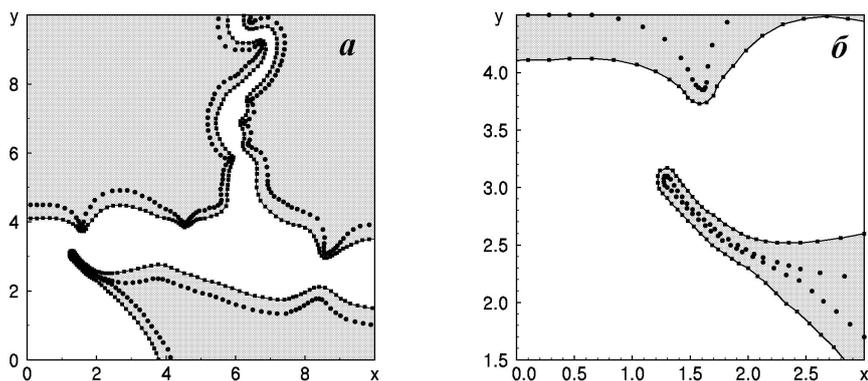


Рис. 8. Пространственное положение системы точек коллокаций и фиксированных точечных вихрей:  
 а — расчетная область течения, б — устье Днепровско-Бугского лимана

узкий пролив, образованный выступом со стороны г.Очаков и Кинбурнской косы со стороны Крымского полуострова.

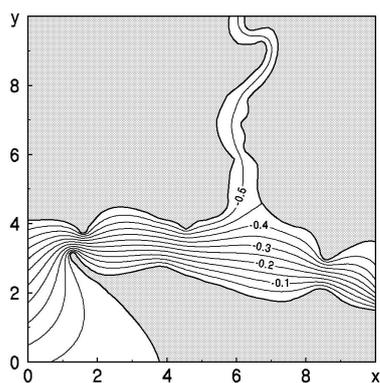


Рис. 9. Распределение функции тока в Днепровско-Бугском лимане при отсутствии ветра

Анализ средних скоростей течений в устьях рек Днепр и Южный Буг позволяет определить разницу значений функции тока на их береговых линиях с учетом нормировки (16). Если принять на южной границе р. Днепр  $\Psi_0 = 0.0$ , то на северной границе с учетом направления течения получим  $\Psi_1 \approx -0.45$ . Аналогичным путем для р. Южный Буг определяем разницу значений функции тока на ее западном и восточном берегах. Поскольку Южный Буг течет в южном направлении, на его западном берегу принимаем  $\Psi_2 \approx -0.55$ .

На Рис. 8 даны результаты оцифровки береговой линии Днепровско-Бугского лимана в расчетной области. Квадратиками показана система точек коллокаций, а сплошными кружочками — система фиксированных точечных вихрей. На процедуру оцифровки было использовано  $N = 369$  точек коллокаций со средним расстоянием между точками  $\Delta_i = 0.15$ . На участках береговой линии со сложной геометрией точки коллокации располагаются на меньших расстояниях друг от друга. Пример оцифровки в методе дискретных особенностей, адаптированный к задачам адвекции жидкости, на Кинбурнской косе в устье Днепровско-Бугского лимана показан на Рис. 8б.

Распределение функции тока в Днепровско-Бугском лимане в штиль (при отсутствии ветра) показано на Рис. 9. На нем нанесено семейство линий тока с эквидистантным шагом  $\Delta\Psi = 0.05$ . Видно, что интенсивный водный поток реки Днепр занимает южную часть лимана, а воды реки Южный Буг протекают в северной его части. Течение внутри Днепровско-Бугского лимана обладает сепаратрисой, разделяющей водные потоки двух рек. Отметим, что она подходит к береговой линии в точке, расположенной на восточном берегу южнее устья р. Южный Буг. Поскольку жидкость при стационарном течении не пересекает линии тока, сепаратриса показывает какую область лимана может занять загрязнение, попавшее в начальный момент в воды Днепра или Южного Буга. Видно, что поверхностное загрязнение из р. Южный Буг может занять только тонкую береговую зону вдоль континентальной Украины, в то время как загрязнение

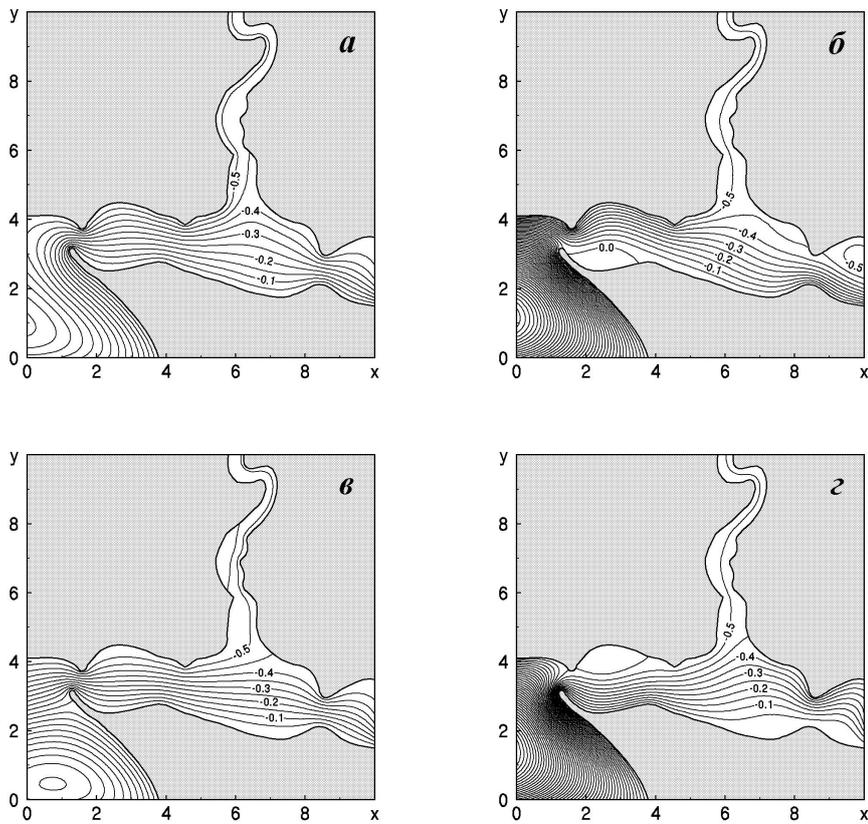


Рис. 10. Распределение функции тока в Днепровско-Бугском лимане для умеренного ветра ( $U_w = 15.0$  м/с):

а —  $\alpha = 0^\circ$  (западный ветер), б —  $\alpha = 90^\circ$  (северный ветер),  
в —  $\alpha = 180^\circ$  (восточный ветер), г —  $\alpha = 270^\circ$  (южный ветер)

из р. Днепр может покрыть фактически всю акваторию Днепровско-Бугского лимана.

Наличие ветра меняет структуру поверхностного течения в Днепровско-Бугском лимане. На Рис. 10, выполненном в том же стиле, что и Рис. 9, показано распределение поля функции тока при ветре силой  $U_w = 15.0$  м/с в разных направлениях. Такая скорость соответствует умеренному ветру силой 4 балла по шкале Бофорта [45]. В расчетах положение базовой точки (аналог точки А на Рис. 3) было выбрано в средней части Днепровско-Бугского лимана —  $x_A = 5.0$ ,  $y_A = 3.0$ . Над этой точкой была размещена система вихревых пар с параметрами  $a = 30.0$ ,  $b = 25.0$ ,  $K = 20$ ,  $h = 10.0$ .

При западном ветре ( $\alpha = 0^\circ$ ) поверхностное течение замедляется, а сепаратриса смещается вверх по течению р. Южный Буг (Рис. 10а). Большая часть вод лимана движется вдоль Крымского полуострова из-за геометрии Кинбурнской косы при данном направлении ветра.

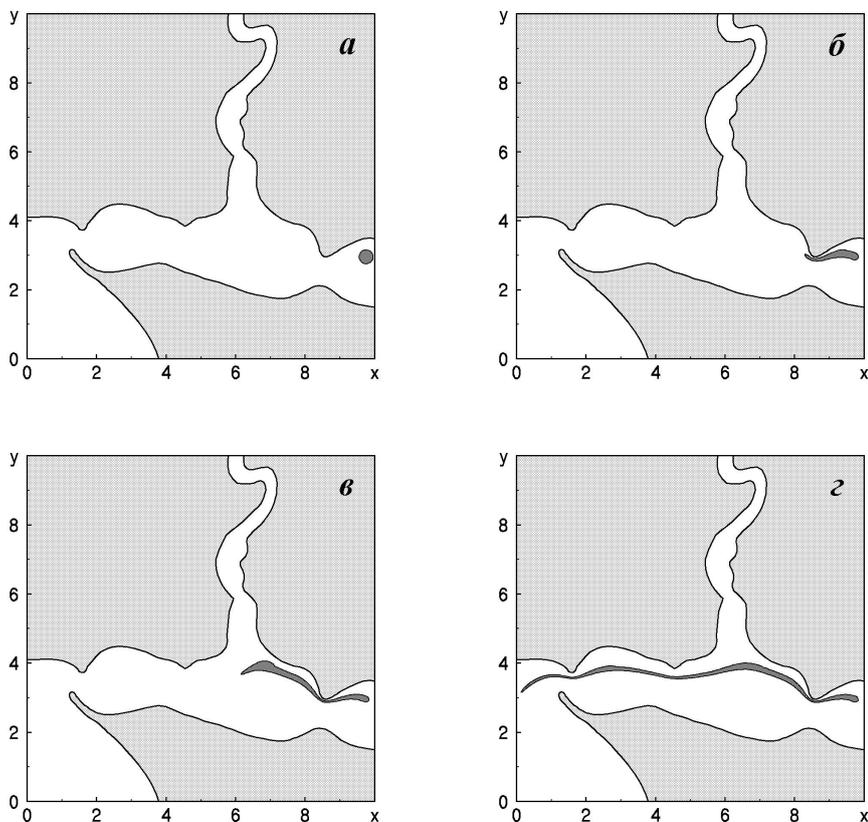


Рис. 11. Положение пятна поверхностного загрязнения в Днепровско-Бугском лимане при отсутствии ветра:

$$a - t = 0, \bar{b} - t = 4, \bar{в} - t = 16, \bar{г} - t = 34$$

В случае северного ветра ( $\alpha = 90^\circ$ ) сепаратриса, разделяющая воды двух рек Днепр, смещается в сторону устья р. Днепр (Рис. 10б). При этом часть вод р. Южный Буг попадает на северо-восточное побережье Днепровско-Бугского лимана. Интересно отметить, что северный ветер способствует образованию циркуляционных зон. Например, в устье Днепра действие сильного течения вдоль крымского побережья и северного ветра сформировали циркуляционную зону, в которой жидкость движется по замкнутым траекториям. Характерной особенностью этого случая являются поверхностные течения существенно более медленные, чем скорость течения р. Днепр. Еще одной особенностью поверхностного течения в Днепровско-Бугском лимане является образование циркуляционной зоны на восточном побережье Кинбурнской косы. Исследования показывают, что оно вызвано не только влиянием ветра, но и геометрией косы, а также относительным ускорением течения в средней части лимана. Анализ количественных данных показывает, что скорость течения в этой циркуляционной зоне на порядок меньше, чем скорость основного течения Днепровско-Бугского лимана в западном направлении.

Рис. 10в иллюстрирует распределение поля функции тока в случае восточного ветра ( $\alpha = 180^\circ$ ) умеренной силы. Сравнение этого рисунка с Рис. 9 показывает, что структура поверхностного течения Днепровско-Бугского лимана мало отличается от течения в безветренную погоду. Некоторые различия можно заметить на выходе из лимана в акватории Черного моря. Совместное действие восточного ветра и основного течения лимана приводят к формированию интенсивного течения вдоль береговой линии континентальной Украины. Отметим, что действие восточного ветра также способствует формированию циркуляционных зон. Здесь одна из них наблюдается в нижнем течении Южного Буга (выше с. Парутине). Как и в других случаях, в этой области жидкость движется по замкнутым траекториям со скоростями, значительно меньшими, чем основное течение реки.

Анализ численных результатов показывает, что действие южного ветра ( $\alpha = 270^\circ$ ) умеренной силы приводит к общему смещению вод Днепра в северном направлении (Рис. 10г). При этом сепаратриса, разделяющая воды рек, не смещается далеко против течения р. Южный Буг (ср. с Рис. 10а). Однако влияние южного ветра, инерционных свойств основного водного потока и геометрии береговой линии Днепровско-Бугского лимана около г. Очаков приводит к формированию достаточно большой циркуляционной зоны вдоль побережья континентальной Украины.

Рассмотрим процесс адвекции загрязнения в акватории Днепровско-Бугского лимана при отсутствии ветра. Пусть в начальный момент загрязнение поступает на водную поверхность в точке  $x_c = 9.75$ ,  $y_c = 2.95$  (расположенной в устье реки Днепр со стороны г. Херсона) и занимает круг радиуса  $R_c = 0.2$ , Рис. 11а). В дальнейшем будем полагать, что в круговую область радиуса  $R_c/2$  с центром в точке с координатами  $(x_c, y_c)$  загрязнения поступают с постоянной скоростью.

С течением времени пятно сносится водами Днепра в направлении Днепровско-Бугского лимана. Его положение в момент  $t = 4.0$  показан на Рис. 11б. Видно, что пятно загрязнения движется вдоль правого берега Днепра и плавно обтекает мыс в его устье.

В начальный момент времени центр пятна расположен на линии тока со значением  $\Psi \approx -0.40$ , а остальные его точки — на линиях тока в диапазоне значений  $\Psi_c = -0.43 \dots -0.36$ . При стационарном движении жидкие частицы двигаются вдоль

линий тока. Анализ рисунка Рис. 9 показывает, что с течением времени пятно должно двигаться вдоль правого берега Днепра, приближаясь к сепаратрисе, разделяющей воды двух рек. Этот вывод подтверждают данные Рис. 11в, на котором показано положение пятна в момент  $t = 16.0$ .

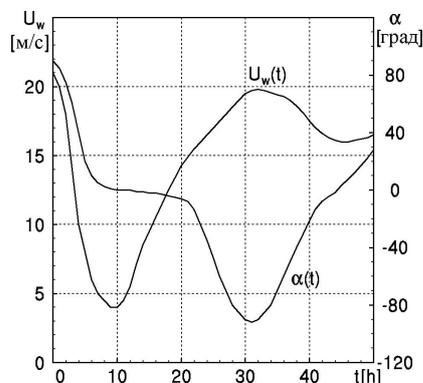


Рис. 12. Прогноз направления и силы ветра в Днепро-Бугском лимане

В дальнейшем водный поток в западном направлении выносит загрязнение из Днепро-Бугского лимана в Черное море. Рис. 11г иллюстрирует положение пятна поверхностного загрязнения в момент времени  $t = 34.0$ . Видно, что оно движется вдоль северной береговой линии лимана вдоль соответствующих линий тока.

Теперь рассмотрим процесс адвекции загрязнения в Днепро-Бугском лимане при наличии ветра. Предположим, что прогноз направления и силы ветра соответствует Рис. 12. В начальный момент времени дул северный ветер умеренной силы. По истечении 10 часов он сменился на западный, а его сила уменьшилась до слабого. Пусть в дальнейшем сила ветра снова увеличивается до умеренных значений, а сам он становится южным. Предположим, что на финальном временном отрезке ветер остается в пределах умеренного, снова меняясь на западный. Такой характер изменения ветра типичен для прохождения циклона или антициклона в непосредственной близости от Днепро-Бугского лимана [46].

В этих условиях процесс распространения поверхностного загрязнения претерпевает некоторые изменения. Пусть в начальный момент времени геометрические размеры пятна и его положение совпадает со случаем, рассмотренным ранее (см. Рис. 11а). Эволюция пятна в Днепро-Бугском лимане с учетом действия ветровой нагрузки (см. Рис. 12) показана на Рис. 13, масштаб которого тот же, что и для Рис. 11.

Поскольку в начальный момент времени имел место умеренный северный ветер, пятно загрязнения попало в циркуляционную зону (Рис. 10б) и стало смещаться в сторону левого берега Днепра с малой скоростью по сравнению с основным течением реки. На Рис. 13а показано положение загрязнения при  $t = 3.0$ . Видно, что к этому моменту времени загрязнение приблизилось к береговой линии и стало постепенно смещаться в сторону Днепро-Бугского лимана.

В дальнейшем, когда ветер стал постепенно меняться на восточный, уменьшая свою силу, пятно под действием основного течения (см. Рис. 9) движется вдоль правобережного выступа в дельте р. Днепр. Рис. 13б иллюстрирует положение загрязнения в момент  $t = 6.0$  под действием уменьшающегося по силе ветра, постепенной сменяющегося на западный.

Следует отметить, что, в отличие от случая, показанного на Рис. 11б, загрязнение фактически движется вдоль береговой линии лимана. При отсутствии ветра пятно движется на некотором расстоянии от береговой линии, а при северном ветре может приблизиться к северной береговой линии. Такая необычность поведения вызвана сложной

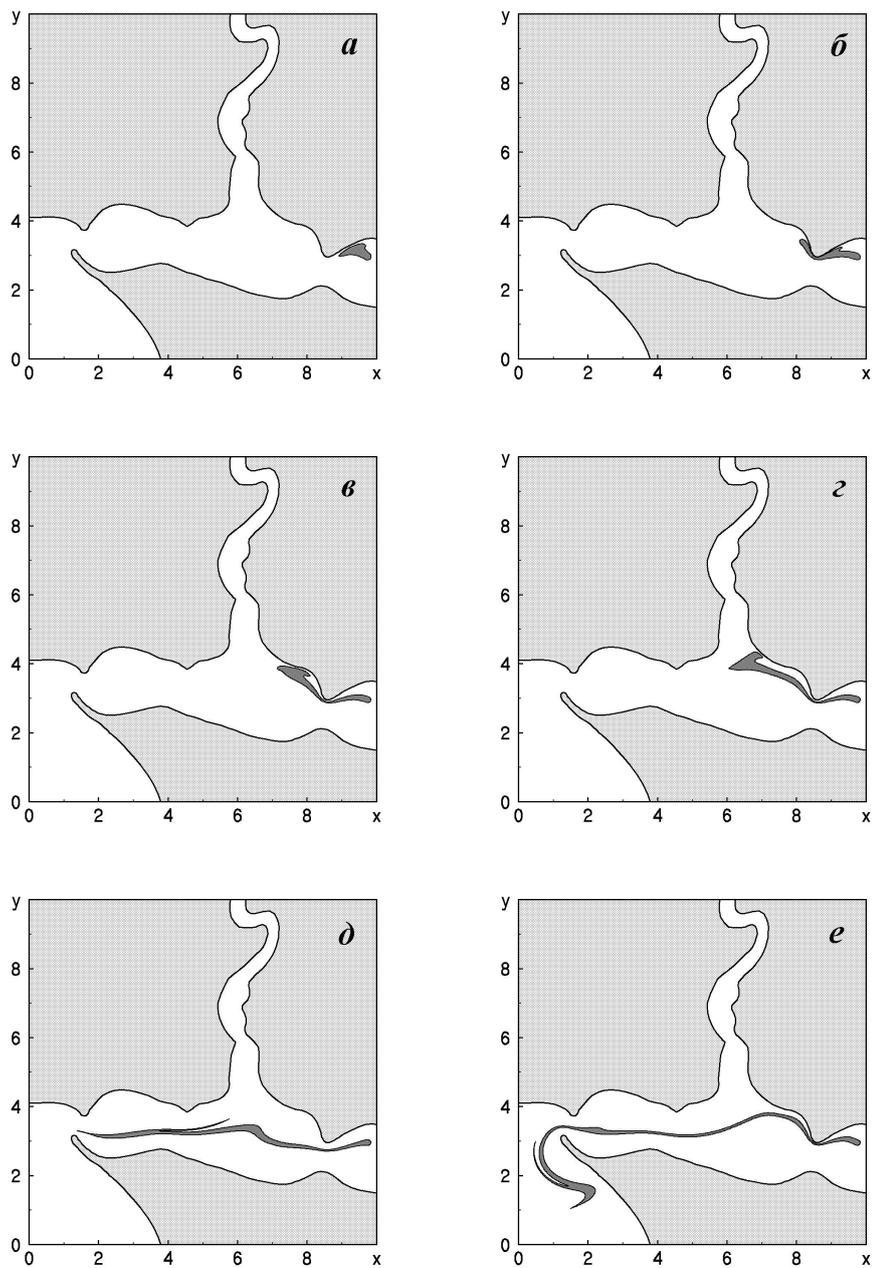


Рис. 13. Положение пятна поверхностного загрязнения в Днепроовско-Бугском лимане под влиянием ветра:  
 $a - t = 3$ ,  $б - t = 6$ ,  $в - t = 12$ ,  $г - t = 20$ ,  $д - t = 34$ ,  $е - t = 50$

геометрией береговой линией в устье Днепра, где ветровая компонента скорости формирует циркуляционное движение, направленное против ветра.

Уменьшение ветра до слабого приводит к тому, что загрязнение продолжает свое движение вплоть до сепаратрисы (Рис. 9), разделяющей воды речных систем. Характерный случай показан на Рис. 13в для момента времени  $t = 12.0$ . Видно, что передняя часть пятна движется фактически вдоль береговой линии, а загрязнение, выходящее из источника, — в западном направлении (по аналогии с распространением выделенной пассивной жидкости в безветренную погоду).

На Рис. 13г показано положение пятна в момент времени  $t = 20.0$ , при котором передняя часть области загрязнения начала свое движение вдоль сепаратрисы. В этот момент ветер стал постепенно усиливаться в западном направлении. Отметим, что большая часть загрязнения по-прежнему находится около левой береговой линии Днепра в северо-восточной части лимана.

В дальнейшем сила ветра достигает значений, соответствующих умеренному ветру, а его направление ветра меняется на северное (южный ветер). В этом случае в устье Днепровско-Бугского лимана, около побережья континентальной Украины, начинает формироваться циркуляционная зона Рис. 10г, которая смещает основной водный поток лимана в сторону Крымского полуострова. Это отражается на распределении загрязнения на водной поверхности. На Рис. 13д показано положение выделенной жидкости в момент  $t = 34.0$ , которое соответствует Рис. 11г для безветренной погоды. Видно, что ветровая нагрузка способна смещать поверхностное загрязнение на большие расстояния в масштабах Днепровско-Бугского лимана. Отметим, что хвостовая часть пятна, расположенная около входа в лиман со стороны р. Днепр, под действием ветра также смещается в южном направлении.

Незначительное изменение скорости ветра и изменение его направления снова за западный ветер, приводит к возвратному смещению хвостовой части загрязнения в направлении континентальной Украины. При этом передняя часть пятна выходит в Черное море и смещается вдоль Кинбурнской косы Крымского полуострова. Рис. 13е иллюстрирует положение загрязнения в финальный момент составления прогноза ( $t = 50.0$ ). Видно, что средняя часть пятна снова возвращается к сепаратрисе, разделяющей воды рек Днепр и Южный Буг. Поскольку на определенном отрезке времени в Днепровско-Бугском лимане наблюдался западный ветер, действующий против основного течения, загрязнение пересекло его медленнее, чем в безветренную погоду (Рис. 11).

Анализ результатов численного моделирования показывает значимость влияния умеренного по силе ветра в распределении загрязнения по исследуемой акватории. Глобальное смещение пятна под действием основного течения в лимане приводит к заметному его вытягиванию, постепенному увеличению длины границы выделенной жидкости. На Рис. 14 показана зависимость изменения длины границы загрязнения с течением времени при адвекции жидкости безветренную погоду (штриховая линия, обозначенная цифрой 1) и при учете действия ветра (сплошная линия, обозначенная цифрой 2). Видно, что обе эти зависимости в первом приближении можно считать линейными функциями.

Несмотря на то, что длины границы области загрязнения для произвольного момента времени в обоих случаях были примерно одинаковы, можно предположить, что ветровая нагрузка оказывает существенное влияние, поскольку процессы эмульгирова-

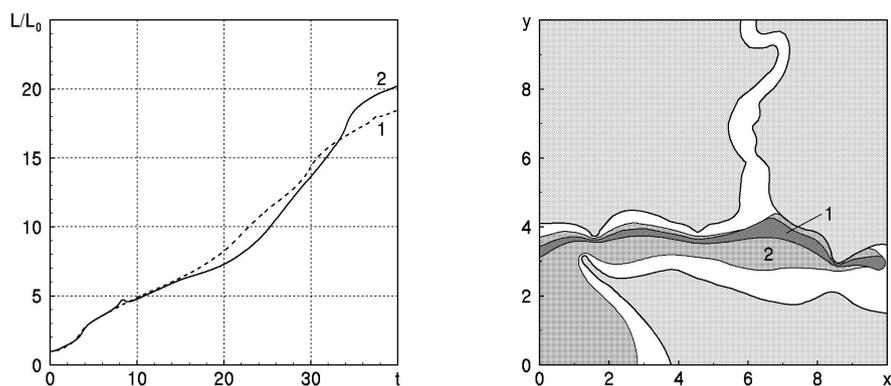


Рис. 14. Изменение длины границы поверхностного загрязнения в Днепровско-Бугском лимане:  
1 — при отсутствии ветра, 2 — с учетом ветровой нагрузки

Рис. 15. Изменение площади загрязнения в Днепровско-Бугском лимане:  
1 — при отсутствии ветра, 2 — с учетом ветровой нагрузки

ния и диссоциации загрязнений (например, нефтепродуктов) на морской поверхности прямо пропорциональны силе ветра и длине границы раздела загрязнения с чистой водой [9, 10, 47].

Если протяженность загрязненной области в обоих случаях имеет один порядок, то площадь поражения, каждую точку которой пересекло загрязнение, существенно отличаются. На Рис. 15 показаны площади заражения загрязнением поверхности Днепровско-Бугского лимана. Здесь обозначения те же, что и на Рис. 14. Видно, что в случае безветренной погоды загрязнение пересекло только фарватерную часть лимана. Под влиянием умеренного ветра меняющихся направлений (см. Рис. 12) пятно распространилось на большую часть поверхности Днепровско-Бугского лимана, начиная от левого берега устья Днепра до вод, прилегающих к Кинбурнской косе Крымского полуострова.

## 5. ВЫВОДЫ

В работе рассмотрена задача о двумерной адвекции пассивной примеси поверхностными течениями в устьях речных системах со сложной геометрией береговой линии при учете ветровой нагрузки. Численное решение задачи основано на методе дискретных особенностей, адаптированном к задачам адвекции жидкости. Составление краткосрочного прогноза начинается с оцифровки береговой линии. Этот процесс связан с расстановки системы точек коллокаций вдоль береговых линий на расчетной области течения и системы фиксированных точечных вихрей, расположенных вне области течения на некотором расстоянии от точек коллокаций. Для повышения точности численного решения задачи необходимо уменьшать расстояние между точками коллокаций, особенно на участках с малыми радиусами кривизны береговой линии. Общее количество точек коллокаций в методе не ограничено — оно определяется вычислительными ресурсами

и производительностью компьютера.

Условие стационарности и непротекания жидкости через береговые линии расчетной области требует равенства значений функции тока в точках коллокации, принадлежащих каждой береговой линии в рассматриваемом течении. Конкретное ее значение на каждой береговой линии определяется либо интегрированием вдоль линии, соединяющей берега, перпендикулярных к ней компонент скорости течения или поверхностным (в двумерном случае) расходом жидкости по сечению канала.

Влияние ветра моделируется двухрядной системой вихревых пар с одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку, интенсивностями, которые расположены над расчетной областью. Интенсивность вихревых пар определяется значением скорости на водной поверхности для заданной скорости ветра по результатам натурных наблюдений в акватории внутреннего моря [37].

Далее необходимо выяснить краткосрочный прогноз ветра над расчетной областью, а также провести интерполяцию значений скорости ветра и направления для произвольного момента времени. Заметим, что продолжительность и точность прогноза ветровой обстановки оказывает большое влияние на точность составления краткосрочного прогноза распространения примеси.

Условие равенства значений функции тока в точках коллокаций вдоль береговых линий позволяет сформировать систему линейных алгебраически уравнений относительно неизвестных интенсивностей системы фиксированных точечных вихрей, расположенных около каждой точки коллокации. Добавка влияния системы вихревых пар в правую часть с обратным знаком позволяет определить интенсивности фиксированных точечных вихрей для текущего момента времени.

В рассматриваемой модели движение отдельной жидкой частицы-маркера описывается в лагранжевом представлении системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (задач Коши) с соответствующими начальными условиями. Система маркеров, расставленная в начальный момент на границе загрязнения, позволяет описать эволюцию границы с течением времени в расчетной области. В процессе адвекции жидкости границы области могут сжиматься и растягиваться. Исходя из этого, в модели предусмотрена процедура сокращения и добавления необходимого количества маркеров на границе выделенной жидкости, выполненная на основе интерполяционных формул Лагранжа по схеме Эйткена третьего порядка.

Установлено, что сложная геометрия Днепровско-Бугского лимана и умеренный ветер различных направлений существенно меняют распределение поля функции тока, по сравнению с течением при отсутствии ветра. Показано, что течение в лимане имеет сепаратрису, разделяющую движение под реками Днепр и Южный Буг. Положение сепаратрисы в значительной степени зависит от направления ветра. Показано, что для западного ветра она может заходить даже в устье реки Южный Буг, а для северного — приближается к устью реки Днепр. Установлено, что сложная геометрия прохода вод лимана в Черное море около Кинбурнской косы (полуостров Крым) и действие ветра способствуют формированию циркуляционных зон. При северном ветре такая зона образуется на восточном побережье Кинбурнской косы, а при южном — около береговой линии континентальной Украины.

Изменение структуры поля функции тока поверхностного течения Днепровско-Бугского лимана под действием ветра приводит к заметным изменениям в смещении за-

грязнения, по сравнению со случаем отсутствия ветра. В стационарной задаче (штилевая погода) поверхностное загрязнение движется вдоль линий тока равного значения. Скорости движения жидких частиц зависят от геометрии лимана, поэтому граница загрязнения вытягивается в западном направлении. Тем не менее, траекторию загрязнения можно считать вполне предсказуемой по распределению линий равного уровня функции тока течения.

В нестационарной задаче, связанной с изменением направления и скорости ветра, распространение пятна становится сложным. Часть загрязнения может существенно затормозиться, попав в область с циркуляционным движением. Это, в свою очередь, приводит к тому, что часть загрязнения достигает побережья лимана. Смена направления ветра может привести к заметному смещению выделенной области жидкости в поперечном направлении. Иными словами, действие ветра существенно увеличивает площадь загрязнения акватории Днепровско-Бугского лимана.

Предлагаемая математическая модель не требует больших вычислительных ресурсов и может быть реализована на персональном компьютере умеренной мощности. В частности, решение задачи адвекции, результаты которого представлены на Рис. 13 потребовала порядка двух часов на процессоре Pentium(R) Dual-Core CPU E5700, 3.0 GHz.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Mee L. Between the Devil and the Deep Blue Sea: The coastal zone in an era of globalization // *Estuarine, Coastal and Shelf Science*. — 2012. — Vol. 96, no. 1. — P. 1–8.
- [2] Liu X. Integrated modeling of oil spill response strategies: A coastal management case study // *Environmental Science Policy*. — 2010. — Vol. 13, no. 5. — P. 415–422.
- [3] Oil spill vulnerability assessment integrating physical, biological and socio-economical aspects: Application to the Cantabrian coast (Bay of Biscay, Spain) / Castanedo S., Juanes J. A., Medina R., Puente A., Fernandez F., Olabarrieta M., and Pombo C. // *Journal of Environmental Management*. — 2009. — Vol. 91, no. 1. — P. 149–159.
- [4] The Poseidon operational tools for the prediction of floating pollutant transport / Polani A., Triantafyllou G., Petihakis G., Nittis K., and Christoforos C. D. K. // *Marine Pollution Bulletin*. — 2001. — Vol. 43, no. 7–12. — P. 270–278.
- [5] Operational monitoring and forecasting for marine environmental applications in the Aegean Sea / Nittis K., Perivoliotis L., Korres G., Tziavos C., and Thanos I. // *Environmental Modelling Software*. — 2006. — Vol. 21, no. 2. — P. 243–257.
- [6] Improvement of pollutant drift forecast system applied to the Prestige oil spills in Galicia Coast (NW of Spain): Development of an operational system / Carracedo P., S.Torres-López, Barreiro M., Montero P., Balseiro C. F., Penabad E., Leitao P. C., and Pérez-Muñuzuria V. // *Marine Pollution Bulletin*. — 2001. — Vol. 53, no. 5–7. — P. 350–360.
- [7] General NOAA Operational Modeling Environment (GNOME) Technical Documentation / ed. by Zelenke B., O'Connor C., Barker C. et al. — Seattle, WA : Emergency Response Division, NOAA, 2012. — 105 p.

- [8] Berry A., Dabrowski T., Lyons K. The oil spill model OILTRANS and its application to the Celtic Sea // *Marine Pollution Bulletin*. — 2012. — Vol. 64, no. 11. — P. 2489–2501.
- [9] Christiansen B. M. 3D Oil Drift and Fate Forecast at DMI. — Copenhagen, 2003. — 29 p.
- [10] Lehr W. J., Simecek-Beatty D. The relation of Langmuir circulation process to the standard oil spill spreading, dispersion, and transport algorithms // *Spill Science Technology Bulletin*. — 2000. — Vol. 6, no. 3–4. — P. 247–253.
- [11] Blumberg A. F., Mellor G. L. Diagnostic and prognostic numerical circulation studies of the South Atlantic Bight // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. — 1983. — Vol. 88, no. 8. — P. 4579–4592.
- [12] Zavatarelli M., Mellor G. L. The numerical study of the Mediterranean Sea circulation // *Journal of Physical Oceanography*. — 1995. — Vol. 25, no. 6. — P. 1384–1414.
- [13] Ezer T., Mellor G. L. Diagnostic and prognostic calculations of the North Atlantic circulation and sea level using a sigma coordinate ocean model // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. — 1994. — Vol. 99, no. C7. — P. 14159–14171.
- [14] Добровольский А. Д., Залогин Б. С. Моря СССР. — Москва : Изд-во МГУ, 1982. — 192 с.
- [15] Chu P. C., Lu S., Chen Y. Evaluation of the Princeton ocean model using South China sea monsoon experiment (SCSMEX) data // *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*. — 2001. — Vol. 18, no. 9. — P. 1521–1539.
- [16] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — Москва : Наука, 1986. — Т. VI из Теоретическая физика. — 736 с.
- [17] Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. — Москва : ГИФМЛ, 1959. — 700 с.
- [18] SAR observation and model tracking of an oil spill event in coastal waters / Cheng Y., Li X., Xu Q., Garcia-Pineda O., Andersen O. B., and Pichel W. G. // *Marine Pollution Bulletin*. — 2011. — Vol. 62, no. 2. — P. 350–363.
- [19] A multi-model assessment of the impact of currents, waves and wind in modelling surface drifters and oil spill / Dominici M. D., Bruciaferri D., Gerin R., Pinardi N., Poulain P. M., Garreau P., Zodiatis G., Perivoliotis L., Fazioli L., Sorgente R., and Manganiello C. // *Deep Sea Research Part II: Topical Studies Oceanography*. — 2016. — Vol. 133. — P. 21–38.
- [20] Ottino J. M. The kinematics of mixing: Stretching, chaos and transport. — Cambridge : Cambridge University Press, 1989. — 683 p.
- [21] Mancho A. M., Small D., Wiggins S. A tutorial on dynamical systems concept applied to Lagrangian transport in oceanic flows defined as finite time data sets: Theoretical and computational issues // *Physics Reports*. — 2006. — Vol. 437, no. 3–4. — P. 55–124.

- [22] Kusch H. A., Ottino J. M. Experiments on mixing in continuous chaotic flows // Journal of Fluid Mechanics. — 1992. — Vol. 236. — P. 319–348.
- [23] Experimental test of scaling of mixing by chaotic advection in droplets moving through microfluidic channels / Song H., Bringer M. B., Tice J. D., Gerdts C. J., and Ismagilov R. F. // Applied Physics Letters. — 2003. — Vol. 83. — P. 4464–4666.
- [24] Voth G. A., Haller G., Gollub J. P. Experimental measurements of stretching fields in fluid mixing // Physical Review Letters. — 2002. — Vol. 88, no. 25. — P. 254501(1–4).
- [25] Aref H. Stirring by chaotic advection // Journal of Fluid Mechanics. — 1984. — Vol. 143. — P. 1–21.
- [26] Aref H. Chaotic advection of fluid particle // Transactions of the Royal Society London A. — 1990. — Vol. 333, no. 1631. — P. 273–288.
- [27] Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел / Белоцерковский С. М., Котовский В. Н., Ништ М. И. и Федоров Р. М. — Москва : Наука, 1988. — 232 с.
- [28] Довгий С. О., Лифанов І. К. Метод сингулярних інтегральних рівнянь. Теорія та застосування. — Київ : Наукова думка, 2004. — 510 с.
- [29] Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. — Москва : Наука, 1985. — 254 с.
- [30] Pedrizzetti G. Insight into singular vortex flows // Fluid Dynamics Research. — 1993. — Vol. 10, no. 2. — P. 101–115.
- [31] Сарпайка Т. Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988 // Труды Американского общества инженеров-механиков. Машиностроение. — 1989. — № 10. — С. 1–60.
- [32] Гуржий А. А., Черний Д. И. Адаптированный метод дискретных особенностей к задаче адвекции пассивной примеси морскими течениями // Прикладная гидромеханика. — 2009. — Т. 11(83), № 2. — С. 30–39.
- [33] A study on mathematical short-term modelling of environmental pollutant transport by sea currents: The Lagrangian approach / Kordas O., Gourjii A., Nikiforovich E., and Cherniy D. // Journal of Environmental Accounting and Management. — 2017. — Vol. 5, no. 2. — P. 87–104.
- [34] Горелов Д. Н. К выбору контрольных точек в методе дискретных вихрей // Прикладная механика и техническая физика. — 1990. — № 1. — С. 167–170.
- [35] Ламб Г. Гидродинамика. — Москва : Гостехиздат, 1947. — 928 с.
- [36] Вилля Г. Теория вихрей. — Москва/Ленинград : ОНТИ, 1936. — 266 с.

- [37] Иванов В. А., Черкесов Л. В., Шульга Т. Я. Экстремальные отклонения уровня и скорости течений, вызываемые постоянным ветром в Азовском море // *Морской гидрофизический журнал*. — 2011. — № 2. — С. 24–32.
- [38] Dritschel D. S. Contour dynamics and contour surgery: Numerical algorithms for extended, high-resolution modelling of vortex dynamics in two-dimensional, inviscid, incompressible flows // *Computer Physics Reports*. — 1989. — Vol. 10, no. 3. — P. 77–146.
- [39] Jones S. W., Thomas O. M., Aref H. Chaotic advection by laminar flow in a twisted pipe // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1989. — Vol. 209. — P. 335–357.
- [40] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — Москва : Наука, 1979. — 832 с.
- [41] Гуржій О. А., Мелешко В. В., ван Хейст Г. Я. Ф. Метод кускової сплайн-інтерполяції в задачі про адекватність пасивної домішки у відомому полі швидкості // *Доповіді Національної академії наук України*. — 1996. — № 8. — С. 54–62.
- [42] Динамика экологически значимых элементов гидрологического режима низовья Днепра / Тимченко В. М., Коржов Е. И., Гуляева О. А. и Батог С. В. // *Гидробиологический журнал*. — 2015. — Т. 51, № 4. — С. 81–90.
- [43] Миньковская Р. Я. Эволюция побережья морского устья рек Днепр и Южный Буг // *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа*. — 2009. — № 20. — С. 63–77.
- [44] Рахматуллина Э., Гребень В. Анализ однородности характеристик зимнего режима рек бассейна Южного Буга // *Энергетика*. — 2014. — Т. 60, № 3. — С. 184–196.
- [45] Saucier W. J. Principles of meteorological analysis. — New York : Dover, 1989. — 438 p.
- [46] Гилл А. Динамика атмосферы и океана. — Москва : Мир, 1986. — Т. 1. — 396 с.
- [47] Guo W. J., Wang Y. X. A numerical oil spill model based on a hybrid method // *Marine Pollution Bulletin*. — 2009. — Vol. 58, no. 5. — P. 726–734.

## REFERENCES

- [1] L. Mee, “Between the Devil and the Deep Blue Sea: The coastal zone in an era of globalization,” *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, vol. 96, no. 1, pp. 1–8, 2012.
- [2] X. Liu, “Integrated modeling of oil spill response strategies: A coastal management case study,” *Environmental Science Policy*, vol. 13, no. 5, pp. 415–422, 2010.
- [3] S. Castanedo, J. A. Juanes, R. Medina, A. Puente, F. Fernandez, M. Olabarrieta, and C. Pombo, “Oil spill vulnerability assessment integrating physical, biological and socio-economical aspects: Application to the Cantabrian coast (Bay of Biscay, Spain),” *Journal of Environmental Management*, vol. 91, no. 1, pp. 149–159, 2009.

- [4] A. Pollani, G. Triantafyllou, G. Petihakis, K. Nittis, and C. D. K. Christoforos, “The Poseidon operational tools for the prediction of floating pollutant transport,” *Marine Pollution Bulletin*, vol. 43, no. 7–12, pp. 270–278, 2001.
- [5] K. Nittis, L. Perivoliotis, G. Korres, C. Tziavos, and I. Thanos, “Operational monitoring and forecasting for marine environmental applications in the Aegean Sea,” *Environmental Modelling Software*, vol. 21, no. 2, pp. 243–257, 2006.
- [6] P. Carracedo, S. Torres-López, M. Barreiro, P. Montero, C. F. Balseiro, E. Penabad, P. C. Leitaó, and V. Pérez-Muñuzuria, “Improvement of pollutant drift forecast system applied to the Prestige oil spills in Galicia Coast (NW of Spain): Development of an operational system,” *Marine Pollution Bulletin*, vol. 53, no. 5–7, pp. 350–360, 2001.
- [7] B. Zelenke, C. O’Connor, C. Barker, C. J. Beegle-Krause, and L. Eclipse, eds., *General NOAA Operational Modeling Environment (GNOME) Technical Documentation*. Seattle, WA: Emergency Response Division, NOAA, 2012.
- [8] A. Berry, T. Dabrowski, and K. Lyons, “The oil spill model OILTRANS and its application to the Celtic Sea,” *Marine Pollution Bulletin*, vol. 64, no. 11, pp. 2489–2501.
- [9] B. M. Christiansen, *3D Oil Drift and Fate Forecast at DMI*. 2003.
- [10] W. J. Lehr and D. Simecek-Beatty, “The relation of Langmuir circulation process to the standart oil spill spreading, dispersion, and transport algorithms,” *Spill Science Technology Bulletin*, vol. 6, no. 3–4, pp. 247–253, 2000.
- [11] A. F. Blumberg and G. L. Mellor, “Diagnostic and prognostic numerical circulation studies of the South Atlantic Bight,” *Journal of Geophysical Research: Oceans*, vol. 88, no. 8, pp. 4579–4592, 1983.
- [12] M. Zavatarelli and G. L. Mellor, “The numerical study of the Mediterranean Sea circulation,” *Journal of Physical Oceanography*, vol. 25, no. 6, pp. 1384–1414, 1995.
- [13] T. Ezer and G. L. Mellor, “Diagnostic and prognostic calculations of the North Atlantic circulation and sea level using a sigma coordinate ocean model,” *Journal of Geophysical Research: Oceans*, vol. 99, no. C7, pp. 14159–14171, 1994.
- [14] A. D. Dobrovolskii and B. S. Zalogin, *USSR sea*. Moscow: Moscow State University Publications, 1982.
- [15] P. C. Chu, S. Lu, and Y. Chen, “Evaluation of the Princeton ocean model using South China sea monsoon experiment (SCSMEX) data,” *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, vol. 18, no. 9, pp. 1521–1539, 2001.
- [16] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid mechanics*, vol. 6 of *Course of Theoretical Physics*. Oxford: Pergamon Press, 1966.
- [17] V. G. Levich, *Physicochemical hydrodynamics*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1962.

- [18] Y. Cheng, X. Li, Q. Xu, O. Garcia-Pineda, O. B. Andersen, and W. G. Pichel, “SAR observation and model tracking of an oil spill event in coastal waters,” *Marine Pollution Bulletin*, vol. 62, no. 2, pp. 350–363, 2011.
- [19] M. D. Dominicis, D. Bruciaferri, R. Gerin, N. Pinardi, P. M. Poulain, P. Garreau, G. Zodiatis, L. Perivoliotis, L. Fazioli, R. Sorgente, and C. Manganiello, “A multi-model assessment of the impact of currents, waves and wind in modelling surface drifters and oil spill,” *Deep Sea Research Part II: Topical Studies Oceanography*, vol. 133, pp. 21–38, 2016.
- [20] J. M. Ottino, *The kinematics of mixing: Stretching, chaos and transport*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- [21] A. M. Mancho, D. Small, and S. Wiggins, “A tutorial on dynamical systems concept applied to Lagrangian transport in oceanic flows defined as finite time data sets: Theoretical and computational issues,” *Physics Reports*, vol. 437, no. 3-4, pp. 55–124, 2006.
- [22] H. A. Kusch and J. M. Ottino, “Experiments on mixing in continuous chaotic flows,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 236, pp. 319–348, 1992.
- [23] H. Song, M. B. Bringer, J. D. Tice, C. J. Gerds, and R. F. Ismagilov, “Experimental test of scaling of mixing by chaotic advection in droplets moving through microfluidic channels,” *Applied Physics Letters*, vol. 83, pp. 4464–4666, 2003.
- [24] G. A. Voth, G. Haller, and J. P. Gollub, “Experimental measurements of stretching fields in fluid mixing,” *Physical Review Letters*, vol. 88, no. 25, pp. 254501(1–4), 2002.
- [25] H. Aref, “Stirring by chaotic advection,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 143, pp. 1–21, 1984.
- [26] H. Aref, “Chaotic advection of fluid particle,” *Transactions of the Royal Society London A*, vol. 333, no. 1631, pp. 273–288, 1990.
- [27] S. M. Belotserkovskii, V. N. Kotovskii, M. I. Nisht, and R. M. Fedorov, *Mathematical modeling of plane-parallel separated flow around bodies*. Moscow: Nauka, 1988.
- [28] S. O. Dovgyi and I. K. Lifanov, *The method of singular integral equations. Theory and application*. Kyiv: Naukova Dumka, 2004.
- [29] S. M. Belotserkovskii and I. K. Lifanov, *Numerical methods in singular integral equations*. Moscow: Nauka, 1985.
- [30] G. Pedrizzetti, “Insight into singular vortex flows,” *Fluid Dynamics Research*, vol. 10, no. 2, pp. 101–115, 1993.
- [31] T. Sarpkaya, “Computational methods with vortices — The 1988 Freeman scholar lecture,” *Journal of Fluids Engineering*, vol. 111, no. 1, pp. 5–52, 1989.

- [32] A. A. Gourjii and D. I. Cherniy, “Adapted discrete singularity method to the advection problem of passive impurities by sea flows,” *Applied Hydromechanics*, vol. 11(83), no. 2, pp. 30–39, 2009.
- [33] O. Kordas, A. Gourjii, E. Nikiforovich, and D. Cherniy, “A study on mathematical short-term modelling of environmental pollutant transport by sea currents: The Lagrangian approach,” *Journal of Environmental Accounting and Management*, vol. 5, no. 2, pp. 87–104, 2017.
- [34] D. N. Gorelov, “Discussion of the choice of control points in the method of discrete vortices,” *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 31, no. 1, pp. 156–160, 1990.
- [35] H. Lamb, *Hydrodynamics*. New York: Dover, 1945.
- [36] H. Villat, *Leçons sur la théorie des tourbillons*. Paris: Gauthier-Villars, 1930.
- [37] V. A. Ivanov, L. V. Cherkesov, and T. Y. Shul’ga, “Extreme deviations of the sea level and the velocities of currents induced by constant winds in the Azov Sea,” *Physical Oceanography*, vol. 21, no. 2, pp. 98–105, 2011.
- [38] D. S. Dritschel, “Contour dynamics and contour surgery: Numerical algorithms for extended, high-resolution modelling of vortex dynamics in two-dimensional, inviscid, incompressible flows,” *Computer Physics Reports*, vol. 10, no. 3, pp. 77–146, 1989.
- [39] S. W. Jones, O. M. Thomas, and H. Aref, “Chaotic advection by laminar flow in a twisted pipe,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 209, pp. 335–357, 1989.
- [40] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover, 1972.
- [41] O. A. Gourjii, V. V. Meleshko, and G. J. F. van Heijst, “A method of piecewise spline interpolation in the problem of passive admixture identification in a known velocity field,” *Dopovidi Nacional’noi akademii nauk Ukraini*, no. 8, pp. 54–62, 1996.
- [42] V. M. Timchenko, E. I. Korzhov, O. A. Gulyaeva, and S. V. Batog, “A dynamics of ecologically important elements of the hydrological regime of the lower Dnieper,” *Gidrobiologichnyi Zhurnal*, vol. 51, no. 4, pp. 81–90, 2015.
- [43] R. Y. Minkovskaya, “The evolution of the coast of the sea mouth of the Dnieper and Southern Bug,” *Ecological Safety of Coastal and Shelf Zones and Comprehensive Use of Shelf Resources*, no. 20, pp. 63–77, 2009.
- [44] E. Rachmatullina and V. Grebin, “Homogeneity analysis of winter regime characteristics for the Southern Bug river basin,” *Energetika*, vol. 60, no. 3, pp. 184–196, 2014.
- [45] W. J. Saucier, *Principles of meteorological analysis*. New York: Dover, 1989.
- [46] A. E. Gill, *Atmosphere-ocean dynamics*, vol. 30 of *International Geophysics Series*. New York: Academic Press, 1982.

- [47] W. J. Guo and Y. X. Wang, “A numerical oil spill model based on a hybrid method,” *Marine Pollution Bulletin*, vol. 58, no. 5, pp. 726–734, 2009.

**О. А. Гуржій, В. І. Осадчий, Є. І. Никифорович,  
О. І. Кордас, Д. І. Черній**  
**Моделювання процесів переносу поверхневих забруднень  
у дельтах річкових систем**

У наближенні ідеальної стисливої рідини розглянуто двовимірну адвекцію пасивної домішки поверхневими течіями в дельті річкових систем зі складною геометрією берегової лінії. Завдання вирішено з використанням чисельного методу дискретних особливостей, адаптованого до задач адвекції рідини. Модель передбачає попереднє оцифрування берегової лінії, яке пов'язане з розміщенням уздовж берегової лінії системи точок колокацій та системи фіксованих точкових вихрів відповідно до певних рекомендацій. Математична модель допускає урахування впливу вітру на процеси поширення виділеної пасивної рідини (забруднення) у модельованій течії. Для цього в динамічну систему вводиться система вортонів, розташована над розрахунковою поверхнею. У роботі обговорюється ілюстраційний приклад еволюції поверхневого забруднення у Дніпровсько-Бузькому лимані, сформованому в пониззі річок Дніпро та Південний Буг. Показано, що дія вітру значно впливає на характер руху виділеної рідини. Зокрема, утворення циркуляційних зон течії призводить до помітного сповільнення швидкості руху забруднення та його зміщення в поперечному напрямку відносно основного потоку. Аналіз кількісних даних показує, що, у порівнянні з випадком адвекції рідини в штільових умовах, під впливом помірного вітру з різними напрямками площі забруднення акваторії лиману суттєво збільшується.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** адвекція, поверхнева течія, забруднення, метод дискретних особливостей, Дніпровсько-Бузький лиман

**A. A. Gourjii, V. I. Osadchy, E. I. Nikiforovich,  
O. I. Kordas, D. I. Cherniy**  
**Modelling of transfer process of surface impurities  
in deltas of river systems**

The problem of two-dimensional advection of a passive pollution by surface flows in the delta of river systems with complex geometry of the coastline in approximation of an ideal incompressible fluid. The problem is solved by numerical method of discrete singularities adapted to fluid advection problems. The model provides for the preliminary digitization of the shoreline, which is associated with the system of collocation points located along the coastline and system of fixed point vortices, following certain recommendations. The mathematical model allows to take into account the influence of wind on the distribution processes of allocated passive fluid (pollution) in the flow under consideration. To do this, a system of vortons placed in the dynamic system above the calculated surface is introduced. An illustrative example of the evolution of the surface pollution in the Dnieper-Bug estuary, formed in lower reach of Dnepr River and the Yuzhny Bug River. It is shown that the effect of wind leads to significant changes in motion of the separated fluid. In particular, the formation of circulation flow zones leads to a significant slowing of velocity motion of the pollution and its displacement in transverse direction with respect to the main flow. The analysis of quantitative data

shows that the area of pollution on the lagoon water area is substantially increases under the influence of a moderate wind with different directions in comparison with the case of fluid advection with absence of wind.

*KEY WORDS: advection, surface current, pollution, method of discrete singularities, Dnieper-Bug estuary*