

УДК 532.517:627.157

## МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ПІЩАНИХ КАР'ЄРІВ У РУСЛОВИХ ПОТОКАХ

І. М. Горбань<sup>†</sup>

*Інститут гідромеханіки НАН України  
вул. Желябова, 8/4, 03057, Київ, Україна  
<sup>†</sup>E-mail: [ivgorban@gmail.com](mailto:ivgorban@gmail.com)*

*Получено 09.11.2017*

Розвинено двовимірний чисельний метод для розрахунку спільної еволюції водної течії та донної поверхні у відкритих водоймах, який враховує взаємний вплив гідродинамічного й морфологічного процесів. Він поєднує центральну схему «проти течії» Курганова—Ноелля—Петрової для інтегрування рівнянь мілкої води та зважену істотно неосцилюючу схему (WENO) п'ятого порядку, за якою розраховується еволюція донної поверхні. Потужність придонного потоку наносів оцінюється за степеневою формулою Грасса. Моделювання тестової задачі про розмив течією води конічного піщаного пагорба виявило довготермінову стійкість отриманого розв'язку, а також його відповідність даним інших дослідників. Метод застосовано для розрахунку еволюції глибоких піщаних кар'єрів на річковому дні. Отримані результати демонструють утворення на донній поверхні складного рельєфу, коли локалізоване заглиблення трансформується в систему ям та невеликих насипів, що переміщуються разом із течією. Водночас, заглиблення розширюється упоперек потоку, спричиняючи формування великих ерозійних зон на річковому дні. Встановлено, що величина кута розмиву, який характеризує еволюцію кар'єру, залежить від початкової глибини кар'єру й параметрів водного потоку і лежить у межах від 20° до 30°. Отримані оцінки «живучості» піщаних кар'єрів вказують на нелінійну залежність інтенсивності їх засипання та швидкості переміщення від характеристик водної течії. Моделювання еволюції вільної поверхні виявило, що над нерівністю дна генерується інтенсивний хвильовий фронт, форма якого змінюється відповідно до процесів, які відбуваються на донній поверхні. Знайдені оцінки можуть бути використані при організації заходів з запобігання негативним техногенним і природним явищам у річкових акваторіях, викликаним взаємодією великих донних утворень з гідротехнічними спорудами та берегами.

*КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: морфологічний процес, донна поверхня, транспорт наносів, піщаний кар'єр, кут розмиву*

## 1. ВСТУП

Для успішної реалізації технічних річкових проектів та вирішення проблем навколишнього середовища важливо досліджувати й відслідковувати морфологічні зміни у природних водоймах. Дійсно, перенесення твердих домішок — піску й мулу — в річках і каналах може спричинити ерозію ґрунту, замулення транспортних шляхів, а також впливати на стійкість гідротехнічних споруд. Морфологічні процеси значно ускладнюються, якщо на донній поверхні присутні нерівності з великим просторовим масштабом. Вони часто виникають унаслідок інтенсивної промислової діяльності в береговій зоні водойм, наприклад, при розробці піщаних кар'єрів чи регулярному скиданні твердих відходів виробництва. Через свої значні розміри, такі нерівності істотно впливають не лише на морфологію русла, а й на водний потік, тому вивчення їхньої еволюції необхідне для отримання загальних характеристик течії в річці й оцінки загроз навколишньому середовищу.

З розвитком комп'ютерних технологій одним із головних інструментів дослідження річкових процесів стало математичне моделювання. Докладний опис фізичних принципів, чисельних методів та основних технічних застосувань обчислювальної річкової гідродинаміки дано в монографії [1]. Утім, зважаючи на те, що річкові течії і транспорт домішок належать до найскладніших явищ гідродинамічної природи, для покращення їх розуміння необхідно розвивати нові чисельні схеми й алгоритми, які б, зокрема, дозволили врахувати більшу кількість фізичних факторів і підвищити точність розрахунків.

У цій статті дослідження транспорту домішок обмежене вивченням придонного потоку наносів, коли зважені частинки котяться або ковзають по донній поверхні, не відриваючись від неї. Зазвичай математична модель руслового потоку з переносом домішок у придонній області складається з системи рівнянь мілкої води для опису течії та рівняння збереження маси наносів, за яким розраховується еволюція дна. Для її замикання використовуються емпіричні залежності, які пов'язують потужність потоку наносів з характеристиками водної течії. Докладний огляд цих законів представлено в роботах [2, 3].

При моделюванні значних деформацій донної поверхні, які цікавитимуть нас у цьому дослідженні, необхідно враховувати взаємний вплив водної течії й донних процесів, а це потребує застосування зв'язаного підходу, коли гідродинамічні й морфологічні рівняння розв'язуються одночасно. В роботі [4] показано, що при зв'язаному інтегруванні гідроморфодинамічної системи чисельні апроксимації є достатньо стійкими, а результати моделювання — адекватними до фізичних процесів. Проблема полягає в тому, що закони, які описують залежності потоку зважених частинок від параметрів водної течії дуже складні, а інколи навіть не можуть бути записані в аналітичному вигляді. Це значно ускладнює знаходження власних чисел якобіана заданої системи, які характеризують швидкості поширення збурень. Хоча останнім часом зв'язаний підхід розвивається досить активно [2, 5], одержані розв'язки стосуються одновимірних моделей зі степеневою залежністю потоку наносів від швидкості водної течії.

У цьому дослідженні застосовується стратегія розщеплення гідроморфодинамічної системи за часом, коли рівняння мілкої води розв'язуються при фіксованій формі дна, після чого вона оновлюється на тому ж часовому кроці. Цей алгоритм простіший, ніж

повністю зв'язаний підхід, оскільки характеристичні швидкості у гідродинамічній і морфологічній моделях оцінюються окремо. Тим не менше, у його рамках зберігається здатність описувати взаємний вплив процесів, оскільки результати гідродинамічного моделювання використовуються як вхідні дані при інтегруванні рівняння еволюції донної поверхні й навпаки. Стійкість таких алгоритмів залежить від типу й порядку чисельних схем, які застосовуються для інтегрування гідроморфодинамічних рівнянь [4, 6, 7]. Оскільки результати натурних досліджень піщаних кар'єрів вказують на їхню складну і довготривалу еволюційну історію [8], то для моделювання таких утворень слід застосовувати чисельні підходи, які здатні забезпечити стійкість і точність морфологічних розрахунків протягом довгого часу.

В роботі [7] зроблено порівняльний аналіз сучасних чисельних схем, які використовуються для апроксимації рівняння еволюції донної поверхні. Вони ґрунтуються на тому, що дане рівняння має хвильову форму, а це, в свою чергу, дозволяє отримати характеристичну інформацію про швидкість і напрямки поширення збурень у придонному потоці наносів. Завдяки цьому, схеми, що розглядаються, коректно описують розриви шуканих величин і можуть бути застосовані до моделювання складних форм поверхні дна. Показано, що найкращі результати щодо стійкості й точності отримуваних розв'язків демонструє зважена істотно неосцилююча апроксимація еволюційного рівняння — WENO-approximation. WENO-схеми вперше були представлені в роботі [9] і з того часу активно залучаються до чисельного інтегрування диференціальних рівнянь у частинних похідних, зокрема, рівнянь гіперболічного типу. Їхні переваги полягають у високому порядку точності в областях монотонності шуканих величин і стійкій неосцилюючій поведінці розв'язків поблизу розривів.

У роботі [3] WENO-схему було інтегровано в чисельний алгоритм, який виконує частково зв'язане моделювання гідродинамічної й морфологічної компонент руслового потоку в одновимірній постановці. Його застосування до розрахунку еволюції нерівностей поверхні великого масштабу показало, що при цьому повністю виключаються нефізичні осциляції шуканих розв'язків, що сприяє успішному моделюванню довготривалих морфологічних процесів та їхнього впливу на характеристики водної течії.

У цьому дослідженні зважену істотно неосцилюючу схему, за допомогою якої апроксимується морфологічне рівняння, адаптовано до двовимірного випадку. Це значно розширює межі застосування WENO-апроксимації. Як і в роботі [3], для просторової дискретизації рівнянь мілкої води тут використано прямокутну сітку й центральну схему з числовим потоком у формі Курганова—Ноелля—Петрової [10] та антидифузійним членом у формі Курганові—Ліня [11]. Еволюція гідродинамічного процесу в часові розраховувалась методом Рунге—Кутта третього порядку, який належить до SSP-схем, що забезпечують стійкий розв'язок [12]. Морфологічне рівняння інтегрувалося за часом методом Ейлера, що значно спрощує застосування моделі до розв'язання практичних проблем.

Розвинений алгоритм було протестовано на відомій модельній задачі про розвив потоком циліндричного піщаного пагорба, розташованого на дні прямокутного каналу [13]. При цьому виявлено стійкість отримуваних розв'язків на довгому часовому проміжку, а також їхню відповідність даним інших авторів [13, 14]. Це свідчить про придатність запропонованої чисельної схеми для розв'язання складних фізично обґрунтованих морфодинамічних проблем.

Проведено розрахунки довгострокових часових і просторових характеристик еволюції піщаних кар'єрів на річковому дні. Результати моделювання продемонстрували утворення складного рельєфу на донній поверхні та його пересування вниз за течією. Так, циліндричне заглиблення, яке на початку мало локалізований характер, у процесі еволюції розпадалось на систему ям і невеликих насипів, які істотно поширювались уздовж поперечного перерізу каналу. Отримані величини кута розмиву, який характеризує поширення заглиблення на дні, знаходиться в межах від  $20^\circ$  до  $30^\circ$  і залежать від початкової глибини кар'єру та параметрів водної течії. Відносні оцінки «живучості» піщаних кар'єрів вказують на істотно нелінійну залежність швидкості їх засипання й пересування вниз за течією від характеристик потоку. Моделювання вільної поверхні виявило, що над заглибленням генерується інтенсивний хвильовий фронт, форма якого змінюється відповідно до динаміки дна.

Зроблені оцінки важливі для прогнозування й попередження негативних техногенних і природних явищ у річкових акваторіях, які можуть бути викликані динамікою великих донних утворень та їхньою взаємодією з гідротехнічними спорудами, берегами річок тощо.

## 2. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

Використана в цій роботі математична модель складається з рівнянь мілкої води, які описують гідродинамічну течію, й рівняння збереження маси наносів, за яким розраховується еволюція дна. Якщо вважати, що основними джерелами збурень водного потоку є зміни геометрії донної поверхні й тертя на ній, а іншими факторами — турбулентною дифузією, силою Кориоліса і впливом вітру — можна знехтувати, то система двовимірних рівнянь мілкої води набуде такого вигляду [1]:

$$h_t + (uh)_x + (vh)_y = 0,$$

$$(uh)_t + \left[ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right]_x + (huv)_y = -gh(S_{0x} - S_{fx}), \quad (1)$$

$$(vh)_t + (huv)_x + \left[ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right]_y = -gh(S_{0y} - S_{fy}),$$

де  $t$  — час;  $x$  і  $y$  — поздовжня й поперечна координати відповідно;  $g$  — прискорення вільного падіння;  $h$  — глибина води;  $u$  і  $v$  — компоненти швидкості потоку в  $x$ - і  $y$ -напрямах відповідно;  $S_0 = (S_{0x}, S_{0y})$  — геометричний нахил донної поверхні;  $S_f = (S_{fx}, S_{fy})$  — нахил тертя.

Рівняння для визначення форми донної поверхні випливає з закону збереження маси твердої речовини в річковому потоці. Для придонного потоку наносів воно відоме як рівняння Екснера [2]:

$$(1 - p_m) \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

де  $p_m$  — пористість донного ґрунту;  $z_b = z_b(x, y, t)$  — функція дна;  $q_1, q_2$  — потужності потоку наносів в  $x$ - і  $y$ -напрямах відповідно. Зазначимо, що рівняння (2) записане в припущенні однорідності дна, коли пористість поверхні й розміри седиментних частинок скрізь однакові.

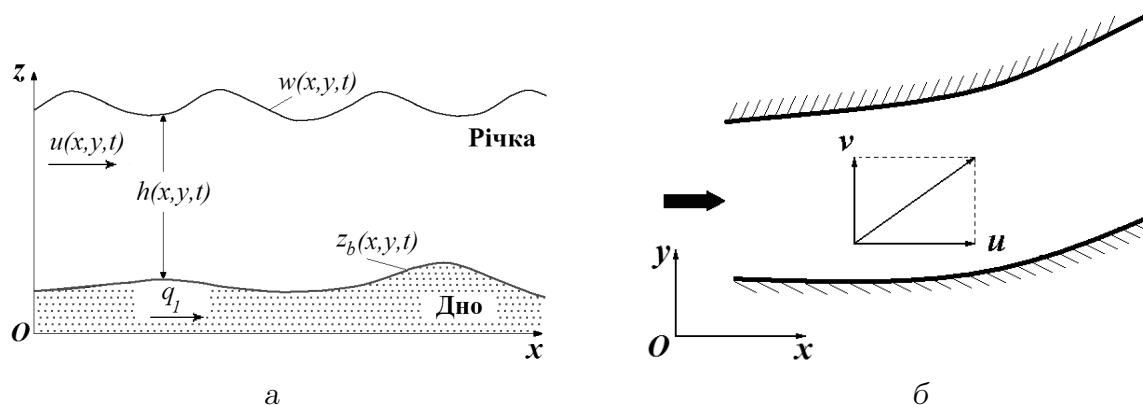


Рис. 1. Схема руслового потоку з розмивним дном:

а — в площині  $Oxz$ , б — в площині  $Oxy$ 

Параметри системи рівнянь (1), (2) показані на Рис. 1, який схематично ілюструє руслову течію в площинах  $Oxz$  і  $Oxy$ . Невідомими тут є глибина води  $h$ , витрати води  $Q_x = uh$  і  $Q_y = vh$ , а також функція дна  $z_b$ .

Геометричний нахил поверхні становить собою градієнт функції  $z_b$ , так що

$$S_{0x} = -\frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad S_{0y} = -\frac{\partial z_b}{\partial y}. \quad (3)$$

Нахил тертя розраховується за емпіричним законом Маннінга

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad (4)$$

де  $n$  — коефіцієнт шорсткості донної поверхні, значення якого для конкретних водойм визначається в натурних експериментах.

Величини  $q_1$ ,  $q_2$  залежать від типу твердої речовини й характеристик гідродинамічної течії. Відомі оцінки для їх визначення сформульовано здебільшого для гранульованих частинок, і вони мають вигляд ймовірнісних або детерміністичних законів [2, 3]. У цьому дослідженні обмежимося застосуванням найпростішої степеневі формули Грасса, в якій потужність потоку наносів виражається безпосередньо через швидкість водної течії:

$$q_1 = A_g u (u^2 + v^2)^{(m-1)/2}, \quad q_2 = A_g v (u^2 + v^2)^{(m-1)/2}. \quad (5)$$

Тут  $A_g$  і  $1 \leq m \leq 4$  — емпіричні константи. Вибір їхніх величин залежить від розміру частинок, що переносяться, в'язкості рідини та інших фізичних факторів. Значення  $A_g \ll 1$  відповідають слабкій взаємодії між течією води й транспортом наносів. Якщо ж  $A_g \sim 1$ , то має місце сильна взаємодія.

### 3. ЧИСЕЛЬНА СХЕМА

Для інтегрування системи рівнянь (1), (2) застосуємо стратегію розщеплення гідроморфодинамічного процесу в рамках часового проміжку  $\Delta t$ , коли рівняння мілкої води розв'язуються при фіксованій формі дна, а розраховані значення гідродинамічних змінних використовуються у морфологічному рівнянні, щоб оновити топографію

донної поверхні. Протягом останнього часу цей підхід активно розвивається [6], оскільки він значно простіший, ніж повністю зв'язаний і, водночас, дозволяє врахувати взаємний вплив гідродинамічного й морфологічного процесів навіть при швидких змінах параметрів.

Розроблений чисельний алгоритм поєднує центральну схему другого порядку Курганова—Ноелля—Петрової (KNP-scheme) [10, 11], використану для інтегрування рівнянь мілкої води, зі схемою «проти течії» п'ятого порядку, за якою розраховується еволюція донної поверхні. Остання ґрунтується на зваженій істотно неосцилюючій апроксимації (WENO-approximation) потоку наносів, запропонованій в роботі [7]. Одновимірною реалізацією описаного алгоритму представлена в роботі [3], де на багатьох тестових прикладах показано, що він повністю виключає нефізичні осциляції шуканих розв'язків, завдяки чому дозволяє успішно моделювати довготривалі морфологічні процеси. Адаптація розвиненого чисельного методу до двовимірного випадку значно розширює межі його застосування, зокрема, дозволяє моделювати еволюцію складних форм донної поверхні.

### 3.1. Моделювання гідродинамічної течії

Головна складність при побудові чисельних апроксимацій для рівнянь мілкої води полягає в тому, що вони належать до гіперболічних законів збереження, внаслідок чого, їхні розв'язки можуть містити розриви. Взаємодія потоку з суттєво нерівним дном неминуче призводить до утворення складної конфігурації вільної поверхні, включно зі стрибками та хвилями розрідження. Коректна чисельна схема повинна не лише описувати такі розв'язки без хибних осциляцій, а й зберігати їх протягом довгого часу. Одним із найпростіших і найефективніших підходів, які відповідають згаданим вимогам, є центральна схема «проти течії», обґрунтована в роботах [10, 11, 15]. Вона належить до проекційно-еволюційних методів типу Годунова, які мають високу роздільну здатність і дозволяють знаходити розривні розв'язки.

Докладне описання напівдискретної центральної схеми «проти течії» представлено в публікаціях [10, 16], що дозволяє обмежитись переліком лише загальних її особливостей. Так, для просторової дискретизації рівнянь мілкої води застосовуються прямокутні скінченні об'єми. Виходячи з цього, замість локальних фізичних величин розглядаються їхні значення, усереднені по елементарному об'єму. Реконструкція змінних на межах комірки виконується за допомогою кусково-лінійної апроксимації. Для розрахунку похідних використовується minmod-лімітер, що дозволяє усунути осциляції шуканих величин в областях з великими градієнтами [17]. Розриви змінних, що вносяться в схему в процесі реконструкції, оцінюються на основі інформації про локальні хвильові швидкості — власні числа якобіана досліджуваної системи.

Конвективні члени у лівих частинах двох останніх рівнянь системи (1) апроксимуються дискретними операторами (чисельними потоками), які розраховуються на основі реконструйованих змінних на границях елементів сітки. У цьому дослідженні використовується чисельний потік у формі Курганова—Ноелля—Петрової [10], побудований таким чином, що інтегрування за часом виконується окремо по області розриву і по тій частині об'єму, де змінні неперервні. Ширина розриву обчислюється за допомогою односторонніх мінімальної та максимальної хвильових швидкостей, завдяки чому за-

пропоновану схему, хоч вона й залишається центральною за природою, слід віднести до схем проти течії з низькою чисельною дифузією. Для подальшого зменшення системної дифузії в роботі [11] запропоновано ввести антидифузійний член, за допомогою якого забезпечується більш якісне виконання проекційної процедури, в ході якої проінтегровані за часом реконструйовані змінні перераховуються на початкову сітку, тобто усереднюються по комірці. Зазначимо, що використана просторова апроксимація має другий порядок точності.

Одержані шляхом просторової дискретизації звичайні диференціальні рівняння інтегруються за часом за допомогою стійкого солвера Рунге—Кутта третього порядку точності (SSP-RK), вигляд якого можна знайти, наприклад, у роботі [16]. Оскільки цей алгоритм є явним за часом, його стійкість повинна забезпечуватись виконанням умови Куранта—Фрідрікса—Леві:

$$\frac{\Delta t}{\min\{\Delta x, \Delta y\}} \max\{a_{\max}, b_{\max}\} \leq \text{CFL}, \quad (6)$$

де  $a_{\max}$  і  $b_{\max}$  — максимальні локальні швидкості поширення збурень у розрахунковій області в  $x$ - та  $y$ -напрямах відповідно; CFL — число Куранта—Фрідрікса—Леві, яке є мірою поширення збурень за часовий проміжок  $\Delta t$ . У роботі [10] показано, що стійкість алгоритму забезпечується при  $\text{CFL} \leq 0.5$ .

Застосування KNP-схеми до неоднорідних законів збереження, до яких належать рівняння мілкої води, представлене в [18]. Консервативність, яка потребує збереження стаціонарних розв'язків з порядком точності не нижче другого, забезпечується тут застосуванням кусково-лінійної апроксимації дна і спеціальних квадратур для дискретизації правої частини рівнянь (1). Збереження позитивної глибини (positive preserving property) у всій області досягається завдяки переходу в рівняннях від змінної  $h$  до змінної  $w$ , яка описує форму вільної поверхні, а також за допомогою спеціальної процедури корекції розв'язків.

Виконані в статті [16] докладні тестування центральної схеми «проти течії» на класичних гідравлічних прикладах і даних лабораторних вимірювань в одно- і двовимірному випадках свідчать про те, що представлена чисельна модель:

- добре описує малі збурення вільної поверхні;
- дозволяє прогнозувати поширення фронтів змочення на дні (wet/dry fronts);
- зберігає стаціонарні гідравлічні розв'язки;
- адекватно описує генерацію хвиль при руйнуванні захисних споруд;
- дозволяє описувати гідравлічні течії в каналах і річках зі складною топографією дна, у тому числі, за наявності ділянок незмоченої донної поверхні.

### 3.2. Дискретизація морфологічного рівняння

Для кращого розуміння природи еволюційного рівняння (2) запишемо його у вигляді

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \xi \left( \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} \right) = 0, \quad (7)$$

де  $\xi = 1/(1 - p_m)$ .

Враховуючи, що поле течії, а значить, і потужності потоку наносів залежать від форми донної поверхні, рівняння (7) може розглядатися як нелінійний закон збереження відносно змінної  $z_b$ . Тому, для його розв'язання повинні застосовуватись методи, які можуть знаходити розривні розв'язки (shock capturing schemes). Вони ґрунтуються на хвильовій апроксимації еволюційного рівняння, яка впливає з припущення про те, що потужності придонного потоку наносів  $q_1, q_2$  залежать лише від форми донної поверхні  $z_b$ . Його коректність обумовлена тим, що просторова дискретизація морфологічного рівняння виконується в межах окремого кроку за часом, коли, за виключенням форми дна, всі фактори, які можуть впливати на потік наносів — глибина і швидкість течії, фізичні властивості частинок, — фіксовані [19].

Поклавши

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} = \frac{\partial q_1}{\partial z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial y} = \frac{\partial q_2}{\partial z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y}, \quad (8)$$

отримуємо з (7) рівняння адвекції відносно змінної  $z_b$ , згідно з яким морфологічна еволюція відбувається як нелінійне поширення деформацій дна у напрямку переносу домішок:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + C_x(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + C_y(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

Тут через

$$C_x(z_b) = \xi \frac{\partial q_1}{\partial z_b}, \quad C_y(z_b) = \xi \frac{\partial q_2}{\partial z_b}$$

позначено фазові швидкості поширення збурень на донній поверхні в поздовжньому й поперечному напрямках відповідно.

Методи дискретизації рівняння адвекції за часом достатньо широко представлені в літературі — від найпростішої схеми Ейлера до багатокрокових SSP-схем високих порядків, розвинутих на основі метода Рунге—Кутта [12]. Головна складність при побудові чисельних апроксимацій для конвективно-дифузійних проблем, так само, як і для гіперболічних законів збереження, пов'язана з просторовою дискретизацією, оскільки при цьому мають враховуватись розриви шуканих величин.

В роботі [7] показано, що дискретизація рівняння (9) класичними центральними алгоритмами типу Лакса—Вендорфа призводить до високочастотних осциляцій у зв'язках навіть при застосуванні регуляризаційних процедур, таких як введення штучної в'язкості [19] або фільтрування [20]. Схеми проти течії, які будуються за допомогою ріманівських солверів, виявляють більшу стійкість, ніж центральні, але мають низький порядок точності, тоді як акуратне моделювання морфологічних процесів потребує схем високого порядку.

Сучасні алгоритми просторової дискретизації диференційних операторів гіперболічного типу ґрунтуються на істотно неосцилюючих схемах (ENO або WENO), які забезпечують високій порядок точності в областях монотонності шуканих величин і стійкість розв'язків поблизу розривів [9, 21]. В роботі [7] зважену істотно неосцилюючу схему було адаптовано до розв'язання одновимірного морфологічного рівняння. У цьому дослідженні її розвинуто для двовимірного випадку, а також інкорпоровано до загальної чисельної моделі, у рамках якої виконується зв'язане інтегрування гідродинамічної й морфологічної задач.



Суть цього методу полягає в тому, що кожна зі складових транспорту наносів розкладається на два потоки — позитивний і негативний. Так, для величини  $q_1$  можемо записати

$$q_1 = q_1^- + q_1^+, \quad (10)$$

де  $q_1^-$  і  $q_1^+$  оцінюються за допомогою односторонніх фазових швидкостей:

$$C_x^- = \min \{C_x, 0\}, \quad C_x^+ = \max \{C_x, 0\}. \quad (11)$$

З (11) випливає, що  $C_x = C_x^- + C_x^+$ . Тоді, для односторонніх потоків, що входять до (10), маємо:

$$q_1^- = \frac{1}{\xi} \int_0^{z_b} C_x^-(z) dz, \quad q_1^+ = \frac{1}{\xi} \int_0^{z_b} C_x^+(z) dz. \quad (12)$$

Аналогічно оцінюється потужність переносу домішок у поперечному напрямку  $q_2$ .

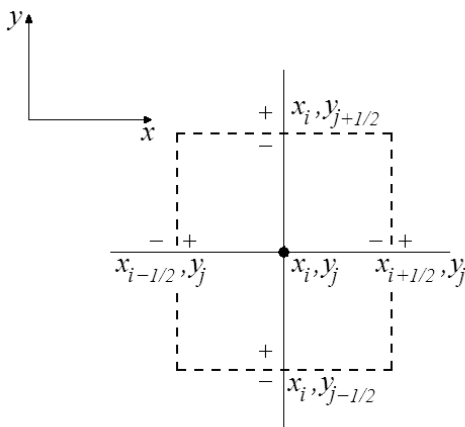


Рис. 2. Елементарний об'єм розрахункової сітки

Для дискретизації рівняння (7) за простором на розрахункову область накладається рівномірна сітка, яка складається з елементарних об'ємів:

$$\Omega_{ij} = \{\xi, \eta : |\xi - x_i| < \Delta x/2, |\eta - y_i| < \Delta y/2\},$$

де  $i = 1, 2, \dots, N_x$ ;  $j = 1, 2, \dots, N_y$ ;  $N_x$  і  $N_y$  — кількість елементів сітки в поздовжньому і поперечному напрямках відповідно (Рис. 2). В чисельній схемі дно буде оновлюватися у вузлових точках  $(x_i, y_j)$ , а потоки твердої речовини  $q_1$  і  $q_2$  оцінюватися на межах елементарних об'ємів.

При застосуванні формули Ейлера для інтегрування процесу за часом чисельна схема для розрахунку форми донної поверхні набуває такого вигляду:

$$\frac{(z_b)_{i,j}^{n+1} - (z_b)_{i,j}^n}{\Delta t_m} = -\xi \left( \frac{(\hat{q}_1)_{i+1/2,j} - (\hat{q}_1)_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{(\hat{q}_2)_{i,j+1/2} - (\hat{q}_2)_{i,j-1/2}}{\Delta y} \right). \quad (13)$$

Тут  $\Delta t_m$  — крок дискретизації за часом морфологічного процесу; величини  $(\hat{q}_1)_{i\pm 1/2,j}$  і  $(\hat{q}_2)_{i,j\pm 1/2}$  — чисельні апроксимації складових транспорту наносів  $q_1, q_2$  на кінцях елементарного об'єму.

Очевидно, що якість результатів, обчислених за схемою (13), залежить від того, наскільки точно оцінюються величини  $(\hat{q}_1)_{i\pm 1/2,j}$  і  $(\hat{q}_2)_{i,j\pm 1/2}$ . В істотно неосцилюючих алгоритмах вони розщеплюються на позитивний і негативний потоки, як показано на Рис. 2. У відповідності до формули (10) маємо

$$\begin{aligned} (\hat{q}_1)_{i\pm 1/2,j} &= (\hat{q}_1^-)_{i\pm 1/2,j} + (\hat{q}_1^+)_{i\pm 1/2,j}, \\ (\hat{q}_2)_{i,j\pm 1/2} &= (\hat{q}_2^-)_{i,j\pm 1/2} + (\hat{q}_2^+)_{i,j\pm 1/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Односторонні потоки в (14) обчислюються, виходячи зі значень  $q_1$  і  $q_2$  в сусідніх із заданою межею вузлових точках сітки. При цьому враховується знак фазової швидкості на цій межі, який визначає напрямок поширення збурень донної поверхні.

Докладний опис WENO-схеми для одновимірного морфологічного рівняння можна знайти в роботах [3, 7]. Її адаптація до двовимірного випадку виконується автоматично, тому її деталі тут не наводяться. Зазначимо лише, що ця схема має п'ятий порядок точності, а завдяки врахуванню односторонніх хвильових швидкостей вона належить до схем «проти течії», завдяки чому здатна забезпечити високу стійкість розрахунків.

У статті [7] показано, що застосування багатокрокових схем типу Рунге—Кутта до інтегрування морфологічного рівняння за часом майже не впливає на результати, але водночас потребує перерахунку гідродинамічних параметрів течії на проміжних часових кроках. Такий підхід може виявитись занадто затратним при виконанні практичних розрахунків. Представлений тут алгоритм, який поєднує WENO-схему з методом Ейлера (WENO-ER), є оптимальним з точки зору досягнення балансу точності результатів і простоти реалізації.

Зазначимо також, оскільки схема (13) — явна за часом, вона потребує виконання стандартного критерію стійкості Куранта—Фрідрікса—Леві:

$$\frac{c\Delta t_m}{\min\{\Delta x, \Delta y\}} \leq 1, \quad c = \max(|C_{xi+1/2,j}|, |C_{yi,j+1/2}|). \quad (15)$$

Втім, при зв'язаному інтегруванні гідроморфодинамічної системи (1), (2), для вибору кроку за часом необхідно реалістично оцінити характерні часові масштаби водного потоку й транспорту наносів. Очевидно, що гідродинамічні зміни розвиваються набагато швидше, ніж морфологічні, тому в нашій моделі крок за часом обирається з критерію (6). При цьому ніяких умов на характер взаємодії між водною течією і дном не накладається.

Зазначимо також, що у всіх морфологічних розрахунках перевіряється збереження об'єму твердої речовини. Загальний об'єм піщаних наносів в області може бути вирахований за формулою

$$V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (z_b(x, y, t) - z_{b\infty}) dx dy, \quad (16)$$

де  $z_{b\infty}$  — умовний рівень незбуреного дна. Відносна похибка розрахунків щодо виконання закону збереження речовини обчислюється як

$$\text{Error} = \frac{V(t) - V(0)}{V(0)}. \quad (17)$$

#### 4. ТЕСТОВІ РОЗРАХУНКИ

У цьому розділі на відомих тестових прикладах буде оцінено здатність представленної чисельної моделі коректно розраховувати гідродинамічні й морфологічні зміни у відкритих водоймах. Спочатку розглянемо застосування кожної зі схем — KNP чи WENO-ER — до відповідного процесу, а потім проілюструємо результати, отримані при зв'язаному моделюванні гідроморфодинамічної задачі.

#### 4.1. Малі збурення вільної поверхні над неплоским нерозмивним дном

Цю тестову задачу запропоновано в роботі [22] для апробації чисельних схем, за якими інтегруються рівняння мілкої води. У ній оцінюється здатність алгоритму коректно описувати хвилі, що генеруються нерівним дном. Розрахункова область має форму прямокутного каналу розмірами  $2 \times 1$  м з сильно вигнутою донною поверхнею (Рис. 3). Конфігурація дна задається функцією

$$z(x, y) = 0.8e^{-5(x-0.9)^2 - 50(y-0.5)^2}.$$

Рівень води в каналі скрізь дорівнює 1 м, за винятком малого локалізованого збу-

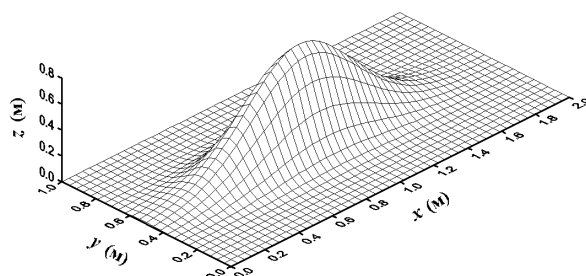


Рис. 3. Конфігурація донної поверхні

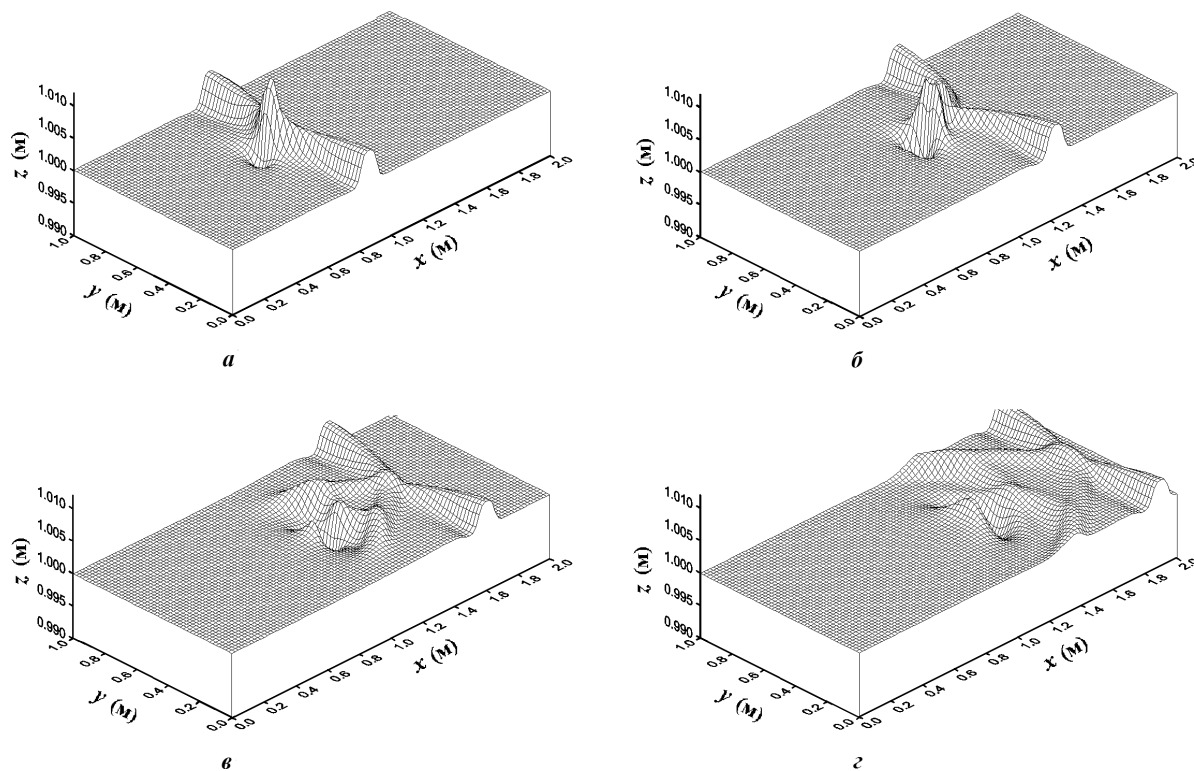


Рис. 4. Еволюція малої хвилі над вигнутим нерозмивним дном:

$a - t = 0.24$  с,  $б - t = 0.36$  с,  $в - t = 0.48$  с,  $г - t = 0.60$  с

рення висотою 1 м, фронт якого паралельний осі  $Oy$ :

$$w(x, y, 0) = \begin{cases} 1.01 \text{ м,} & \text{якщо } x \in [0.05, 0.15]; \\ 1 \text{ м,} & \text{якщо } x \in [0, 0.05) \cup (0.15, 2]. \end{cases}$$

Рідина на початку процесу нерухома, тобто для складових швидкості маємо нульові початкові умови:

$$u(x, y, 0) = 0, \quad v(x, y, 0) = 0.$$

На Рис. 4 представлені одержані в розрахунках трансформації вільної поверхні протягом 0.6 с ( $\Delta x = \Delta y = 0.01$  м). З графіків видно, що внаслідок початкового збурення поверхні над пагорбом утворюється хвиля, яка рухається в додатному напрямку осі  $Ox$ . При її проходженні над вершиною пагорба утворюється вирва, а сама вона розпадається на систему вторинних хвиль, які поступово затухають. Отримані результати добре узгоджуються з даними інших авторів, зокрема, представленими в дисертаційній роботі [23], де для моделювання процесу застосовувалася схема «проти течії».

#### 4.2. Розмив піщаного пагорба в стаціонарному потоці

Цей класичний приклад застосовується для апробації чисельних схем, які моделюють транспорт наносів в придонній області [7]. Розрахуємо розмив симетричного піщаного пагорба потоком води зі сталими параметрами. Початкова форма дна задається функцією

$$z_b(x, 0) = -h_0 + 2 \exp[-\beta(x - x_c)],$$

де  $h_0$  — глибина води над горизонтальним дном;  $x_c$  — центр пагорба;  $\beta$  — параметр, який визначає крутизну пагорба. Покладемо  $h_0 = 6$  м,  $x_c = 150$  м,  $\beta = 0.01$ .

Довжина розрахункової області дорівнює 300 м. Рівень та витрата води протягом всього розрахунку вважаються незмінними:  $w(x, t) = 0$ ,  $q(x, t) = 10 \text{ м}^2/\text{с}$ .

Потужність потоку зважених частинок в розрахунках оцінюється за степеневою формулою (5) при  $A_g = 0.001$ , пористість ґрунту —  $p_m = 0.4$ . В розглянутому випадку вибрано такі параметри розрахункової схеми:  $\Delta x = 1$  м,  $\Delta t = 0.1$  с.

Результати розрахунків та їхнє порівняння з точним розв'язком [7] представлені на Рис. 5. З графіка видно, що розмив піщаного пагорба супроводжується генерацією гострого фронту седиментних частинок, який рухається вниз за течією. Важливо, що чисельна схема описує зміни конфігурації дна без хибних осциляцій і не втрачає стійкості протягом достатньо довгого розрахункового періоду. Отримані результати добре узгоджуються з точним розв'язком.

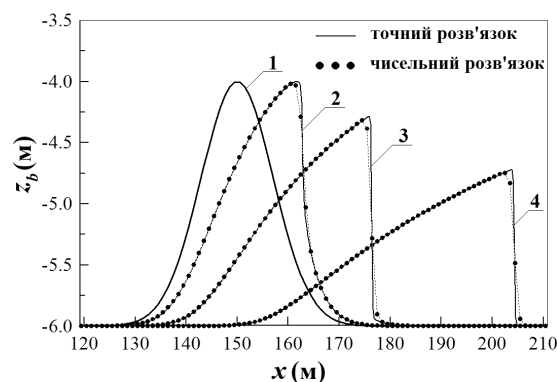


Рис. 5. Розмив піщаного пагорба:

1 —  $t = 0$ , 2 —  $t = 600$  с, 3 —  $t = 2000$  с, 4 —  $t = 6000$  с

### 4.3. Розмив піщаного пагорба в нестационарному потоці

Для верифікації чисельної схеми, яка виконує зв'язане моделювання гідродинамічного й морфологічного процесів у двовимірній постановці, розглянемо тестову задачу про розмив піщаного пагорба [13, 14]. Тут моделюються як еволюція донної поверхні, так і викликані нею зміни гідродинамічних параметрів течії. Розрахункова область являє собою прямокутний канал з горизонтальними розмірами  $1500 \times 1000$  м, на дні якого розташований піщаний пагорб у формі конуса висотою 1 м і діаметром 200 м. Таким чином, форма дна задається функцією (всі розміри в метрах):

$$z_b(x, y, 0) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi(x-300)}{200}\right) \sin^2\left(\frac{\pi(y-400)}{200}\right) & \text{при } x \in [300, 500], y \in [400, 600]; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

У початковий момент поверхня води незбурена, її рівень становить 10 м, а витрата води —  $10 \text{ м}^3/\text{с}$ . Виходячи з цього, початкові умови для гідродинамічних параметрів мають вигляд

$$h(x, y, 0) = 10 - z_b(x, y, 0),$$

$$u(x, y, 0) = \frac{10}{h(x, y, 0)}, \quad v(x, y, 0) = 0.$$

На вході розрахункової області задаються глибина і витрата води, на а виході накладається умова відкритого потоку. На бічних стінках, паралельних основному потоку, накладається умова відбиття, згідно з якою рідина і наноси не перетікають через них. Оскільки розглядається докритична течія ( $Fr = \sqrt{u^2 + v^2}/(gh) \approx 0.1$ ), наведених умов достатньо для коректної постановки граничної задачі для системи рівнянь (1), (2). Докладний опис процедури імплементації граничних умов в дискретну схему з кінцевими об'ємами наведено в статті [16].

Розрахункова область дискретизується відрізками  $\Delta x = \Delta y = 20$  м, а крок за часом обчислюється з критерію Куранта—Фрідріхса—Леві (6) при  $CFL = 0.5$ . Потужність потоку седиментних частинок оцінюється за степеневою формулою (5) при  $m = 3$ , а також  $A_g = 0.001$  або 1 (це що відповідає слабкій і сильній взаємодії транспорту наносів з водною течією). Пористість ґрунту становить  $p_m = 0.4$ .

Для уникнення різкого старту морфологічного процесу на першому етапі моделюється лише гідродинамічна течія до досягнення нею стаціонарного стану при заданій формі дна. Останній визначається з умови

$$|w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n| \leq \varepsilon \quad \forall i, j,$$

де  $\varepsilon$  — задане мале число. У даному випадку було вибрано  $\varepsilon \approx 10^{-8}$ .

На Рис. 6 показані початкова конфігурація дна та розрахована в гідродинамічній задачі форма вільної поверхні, яку стаціонарний потік утримує над нерозмивним пагорбом. З Рис. 6б випливає, що над вигнутим дном на поверхні води утворюється вирва. Але, оскільки в даному разі висота пагорба складає лише 10% від глибини води, викривлення вільної поверхні виявляється дуже слабким — порядку 2 мм. Здатність застосованої тут центральної KNP-схеми описувати такі незначні зміни параметрів течії

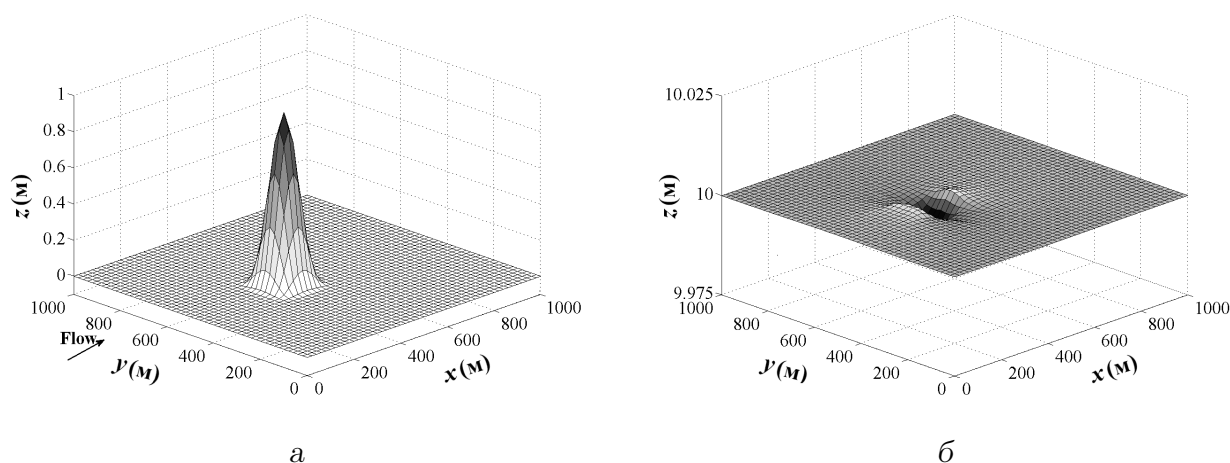


Рис. 6. Початкові умови морфологічної задачі (розмив нестационарною течією):  
а — конфігурація дна, б — форма вільної поверхні

без хибних осциляцій підтверджує її достатню точність при розв'язанні рівнянь мілкої води.

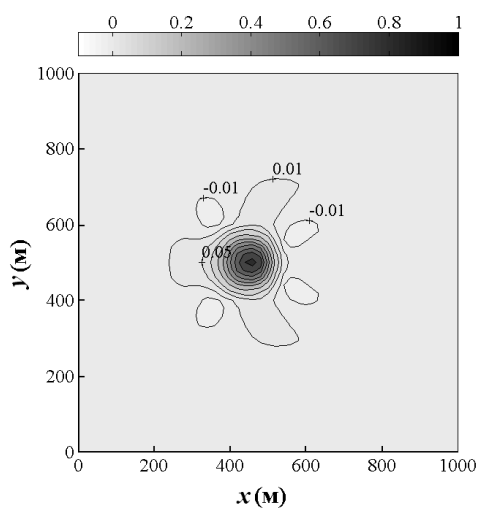
Отримані під час гідродинамічного етапу моделювання параметри рівноважної течії над нерозмивним пагорбом — глибина і складові швидкості — використовуються як початкові умови гідроморфологічної задачі, в якій розраховуються динаміка розмиву дна і зумовлені нею зміни характеристик водного потоку.

На Рис. 7 і 8 представлені отримані в розрахунках контури донної поверхні в різні моменти часу, які відповідають слабкій та сильній взаємодії потоку наносів із водною течією. Зображений тут сценарій розмиву піщаного пагорба виглядає таким чином. Піщинки, які знаходяться ближче до вершини, переміщуються швидше за нижні. Через це верхня частина пагорба зсувається наперед, і, таким чином, генерується поздовжній фронт седиментних частинок. Пісок біля підніжжя розповзається у різні боки, утворюючи рукави, розташовані впоперек каналу. Результатом цих процесів є формування на дні зіркоподібної структури, яка рухається разом із течією води. Біля її підніжжя виникають невеликі заглиблення — ерозійні зони. На вільній поверхні генерується хвиля, яка переміщується разом із фронтом наносів.

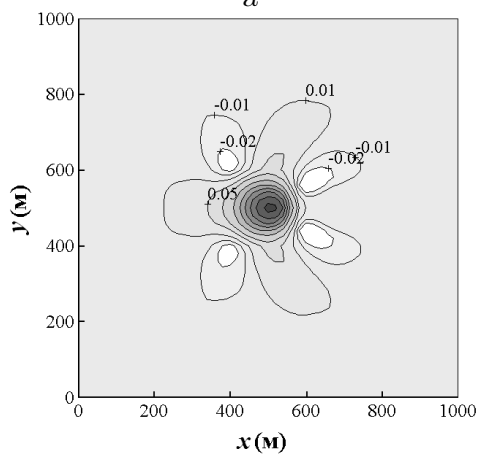
Зазначимо, що ці результати добре узгоджуються з даними аналогічних досліджень, представлених у публікаціях [13, 14, 24]. Відсутність нефізичних осциляцій у розв'язках свідчить про те, що розроблена чисельна схема забезпечує акуратне моделювання еволюції донної поверхні як при слабкій, так і при інтенсивній взаємодії наносів з гідродинамічною течією.

Для оцінки стійкості чисельного алгоритму було проведено довготривале моделювання розмиву пагорба в широкому каналі (розміри розрахункової області  $2 \times 2$  км). Рис. 9 ілюструє отриману в цих розрахунках форму дна для  $A_g = 0.001$  при  $t = 600$  годин, а також відносну похибку щодо збереження об'єму наносів, яка оцінювалася за формулою (17). Незважаючи на те, що з початку процесу минув достатньо великий час, результуюча похибка розрахунку не перевищила 2%.

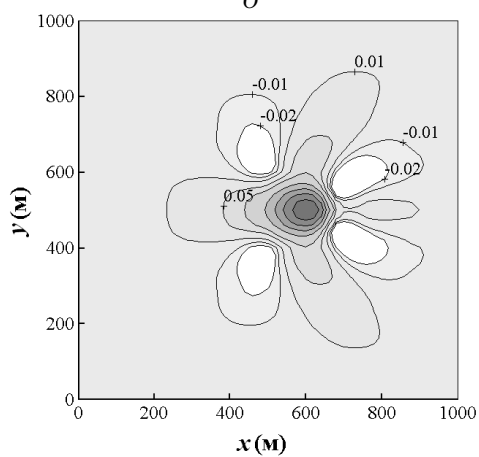
Геометричним параметром, що характеризує еволюцію піщаного пагорба у потоці води, є кут розмиву, утворений центральною віссю нерівності й дотичною до неї в



а

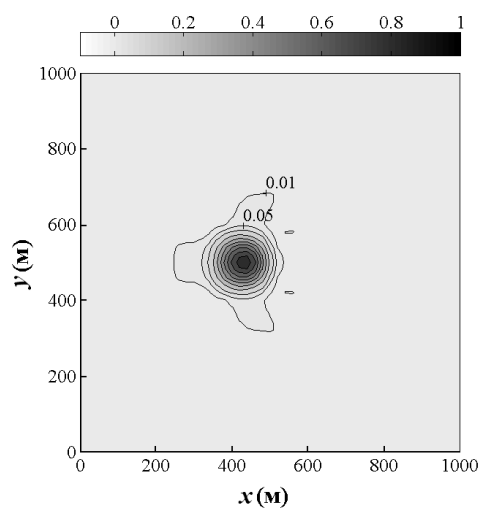


б

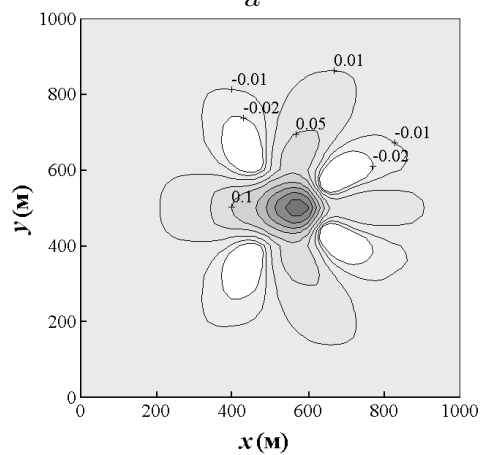


в

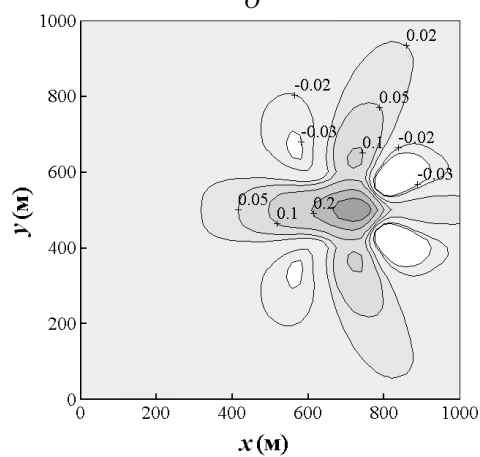
Рис. 7. Еволюція пагорба при  $A_g = 0.001$  (розвив нестационарною течією):  
а –  $t = 25$  год, б –  $t = 50$  год, в –  $t = 100$  год



а



б



в

Рис. 8. Еволюція пагорба при  $A_g = 1$  (розвив нестационарною течією):  
а –  $t = 50$  с, б –  $t = 300$  с, в –  $t = 600$  с

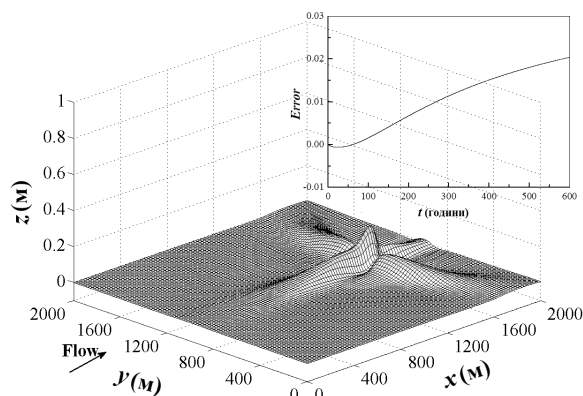


Рис. 9. Форма пагорба при  $t = 600$  год і відносна похибка морфологічного розрахунку

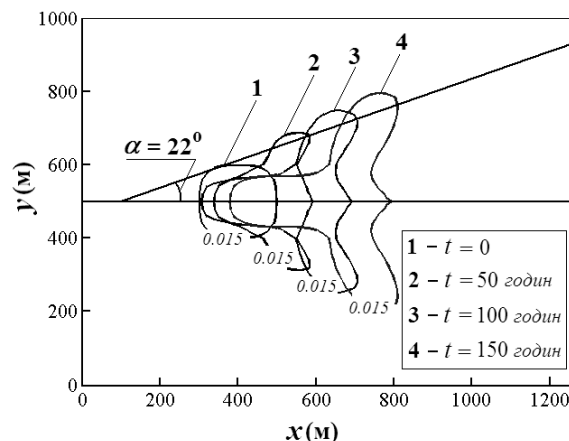


Рис. 10. Кут розмиву піщаного пагорба при  $A_g = 0.001$

крайній точці сформованої на дні зіркоподібної структури. У роботі [24] отримано наближену аналітичну оцінку для кута розмиву  $\alpha$  піщаного пагорба при слабкій взаємодії придонного потоку наносів з течією води ( $A_g < 0.01$ ):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{3(m+1)}}{9m-1}. \quad (18)$$

При  $m = 3$ , як було прийнято в наших розрахунках, із формули (18) одержуємо  $\alpha = \operatorname{arctg}(3\sqrt{3}/3) \approx 22^\circ$ .

На Рис. 10 представлені розраховані контури донної поверхні на рівні 1.5 см у різні моменти часу. Вони ілюструють динаміку розмиву піщаного пагорба при слабкій взаємодії наносів і течії води. Як видно з графіків, еволюція пагорба відбувається в рамках трикутника, кут при вершині якого (кут розмиву) близький до аналітичного прогнозу [24] і чисельних даних, представлених у статтях [13, 14].

В цілому наведені результати свідчать про те, що запропонований чисельний алгоритм забезпечує адекватне моделювання транспорту наносів у придонній області. Це підтверджується відсутністю хибних осциляцій у розв'язках, виконанням законів збереження, а також якісною й кількісною відповідністю отриманих форм донної поверхні чисельним та аналітичним даним, отриманим в інших дослідженнях.

## 5. РОЗМИВ ПІЩАНИХ КАР'ЄРІВ

У цьому розділі розвинений алгоритм застосовується до моделювання еволюції донних заглиблень великих просторових масштабів. Такі заглиблення у формі кар'єрів можуть утворюватись на дні водойм унаслідок видобутку піску для потреб будівельної промисловості. Маючи значні розміри, піщані кар'єри істотно впливають як на гідродинамічні характеристики течії, так і на морфологію русла, що може призводити до пошкодження та руйнування річкових інженерних споруд — мостів, підводних комунікацій, дамб обвалування та ін.



Область моделювання має вигляд прямокутного каналу, на дні якого розташований піщаний кар'єр. Вважаємо, що момент  $t = 0$  відповідає закінченню розробки кар'єру, після чого він починає існувати за законами гідроморфодинаміки. Схема розрахункової області у вертикальній площині  $Oxz$  і початкові умови задачі представлені на Рис. 11. Зазначимо, що для зручності інтерпретації результатів у цьому випадку вісь  $Ox$  пов'язано з незбуреним дном. Характерні геометричні параметри заглиблення — діаметр  $D$  і максимальна глибина  $d_0$ . Його положення в площині  $Oxy$  визначається координатою центральної точки  $(X_0, Y_0)$ , так що на початку процесу отвір кар'єру локалізований в області  $[X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$ , де  $X_1 = X_0 - D/2$ ;  $X_2 = X_0 + D/2$ ;  $Y_1 = Y_0 - D/2$ ;  $Y_2 = Y_0 + D/2$ .

Будемо вважати, що заглиблення має форму конуса. Тоді при  $t = 0$  топографію дна можна описати функцією

$$z_b(x, y, 0) = \begin{cases} -d_0 \sin^2\left(\frac{\pi(x - X_1)}{D}\right) \sin^2\left(\frac{\pi(y - Y_1)}{D}\right) & \text{при } (x, y) \in [X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

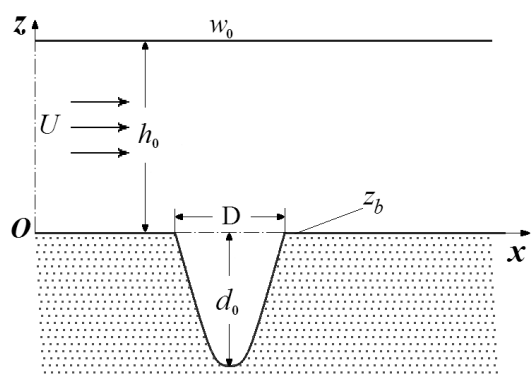


Рис. 11. Конфігурація розрахункової області в центральному перерізі площини  $Oxz$

каналу, нульових градієнтів усіх величин на виході, а також умову відбиття потоків води й наносів на бічних стінках каналу.

Розрахункова область, яка має розміри  $4000 \times 2000$  м, дискретизується відрізками  $\Delta x = \Delta y = 20$  м. Крок за часом обчислюється за критерієм (6) при  $CFL = 0.5$ . При моделюванні покладається властива для рівнинних річок слабка взаємодія між потоками води й наносів ( $A_g = 0.001$  і  $m = 3$  у формулі (5)) при пористості ґрунту  $p_m = 0.4$ . При розв'язанні гідродинамічних рівнянь нахил тертя враховується з коефіцієнтом Маннінга  $n = 0.01 \text{ с/м}^{1/3}$ .

Початкові умови для повної гідроморфологічної проблеми, в рамках якої розраховуються еволюція донної поверхні й зумовлені нею зміни гідродинамічної течії, визначаються з розв'язання гідродинамічних рівнянь при фіксованому дні до набуття потоком стану рівноваги. На Рис. 12 представлені результати моделювання рівноважної течії в каналі з початковим рівнем води  $w_0 = 5$  м і витратою води  $Q = 5 \text{ м}^3/\text{с}$ . На дні каналу розташований піщаний кар'єр діаметром  $D = 200$  м, глибиною  $d_0 = 5$  м, центр якого

Якщо  $w_0$  — рівень незбуреної вільної поверхні, а  $Q$  [ $\text{м}^3/\text{с}$ ] — витрата води в каналі, то початкові умови для гідродинамічних параметрів течії мають наступний вигляд:

$$h(x, y, 0) = w_0 - z_b(x, y, 0),$$

$$u(x, y, 0) = \frac{Q}{h(x, y, 0)}, \quad v(x, y, 0) = 0.$$

Як і в попередній задачі про розмив піщаного пагорба, у постановку граничної задачі слід включити вимоги фіксованості рівня й витрати води у вхідному перерізі

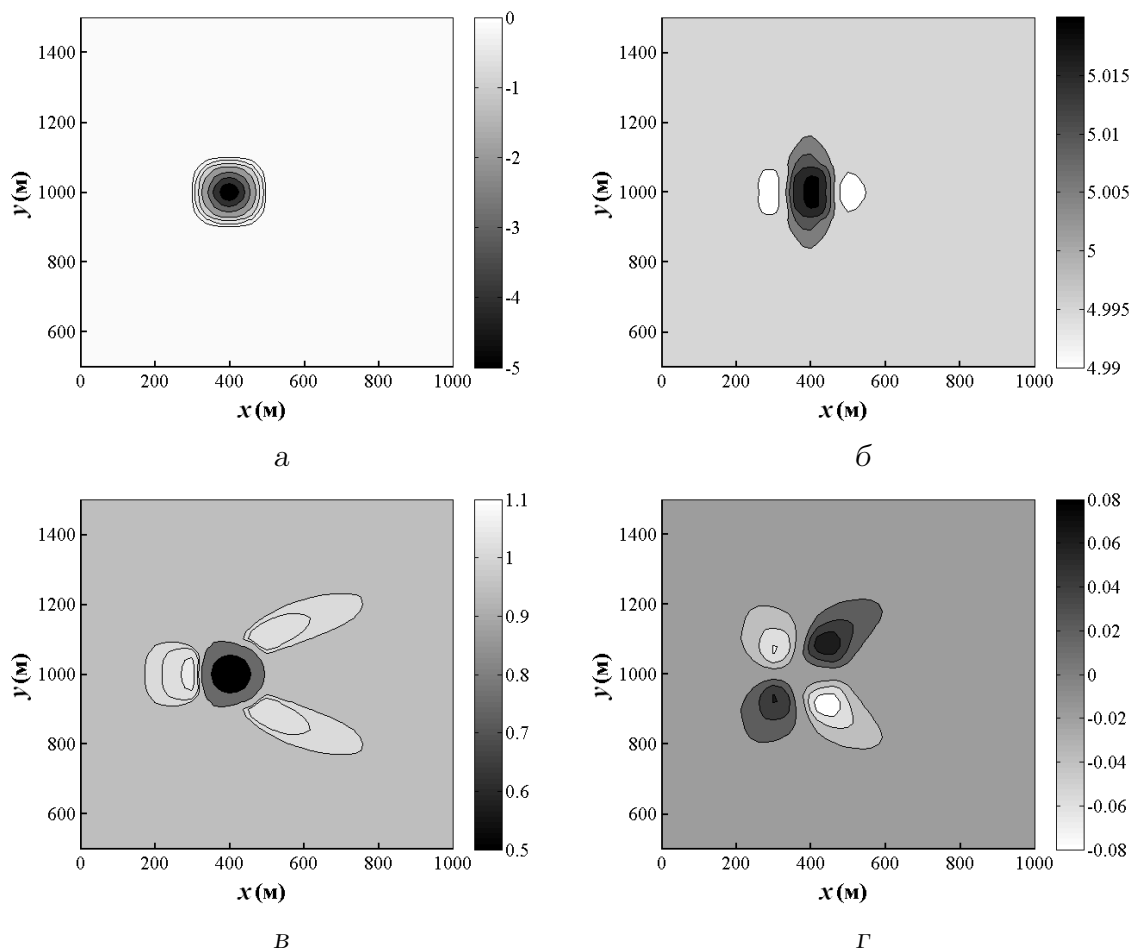


Рис. 12. Форма дна і рівноважні характеристики потоку над западиною:

а — ізолінії донної поверхні  $z_b$ , б — ізолінії поверхні води  $w$ ,  
в — розподіл поздовжньої швидкості  $u$ , г — розподіл поперечної швидкості  $v$

має координати  $X_0 = 400$  м,  $Y_0 = 1000$  м (див. Рис. 12а). На Рис. 12б, який ілюструє отриману в розрахунках форму вільної поверхні, можна бачити невеликий підйом рівня води над заглибленням відносно початкового значення. Рис. 12в і г, на яких наведені ізолінії складових швидкості  $u$  і  $v$  відповідно, показують кінематичну картину, сформовану при обтіканні глибокої западини на донній поверхні. Зокрема, спостерігається відхилення потоку над западиною в боки від прямолінійного напрямку.

Надалі для зручності фізичної інтерпретації результатів будемо характеризувати потік в каналі його глибиною  $h_0$  і швидкістю над незбуреним дном  $U$  (див. Рис. 11). Наприклад, представлені на Рис. 12 результати розрахунків отримано при  $h_0 = w_0 = 5$  м,  $U = Q/h_0 = 1$  м/с. Еволюцію кар'єру в потоці з цими початковими умовами ілюструє Рис. 13, на якому наведені ізолінії функції  $z_b(x, y)$  у різні моменти часу. З цих графіків видно, що під впливом потоку води локалізоване заглиблення трансформується в складну систему ям і невеликих насипів, яка дрейфує вниз за течією й поширюється вздовж поперечного перерізу каналу. З якісної точки зору картина розмиву піщаного кар'єру виглядає наступним чином. Донні наноси, які транспортуються водною течією вище від

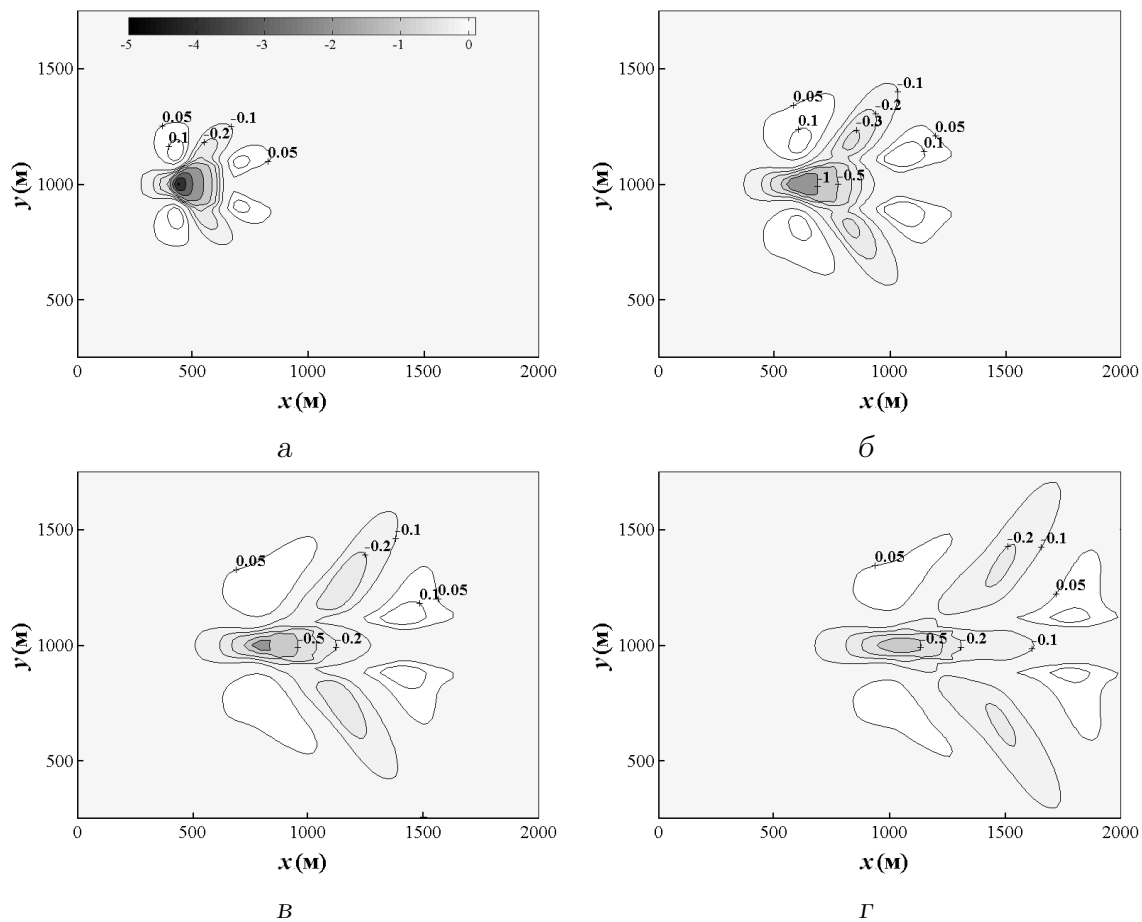


Рис. 13. Еволюція піщаного кар'єру на дні каналу (розподіл функції  $z_b$ )  
 при  $h_0 = 5$  м,  $U = 1$  м/с,  $D = 200$  м,  $d_0 = 5$  м:  
 а –  $t = 100$  год, б –  $t = 300$  год, в –  $t = 500$  год, г –  $t = 700$  год

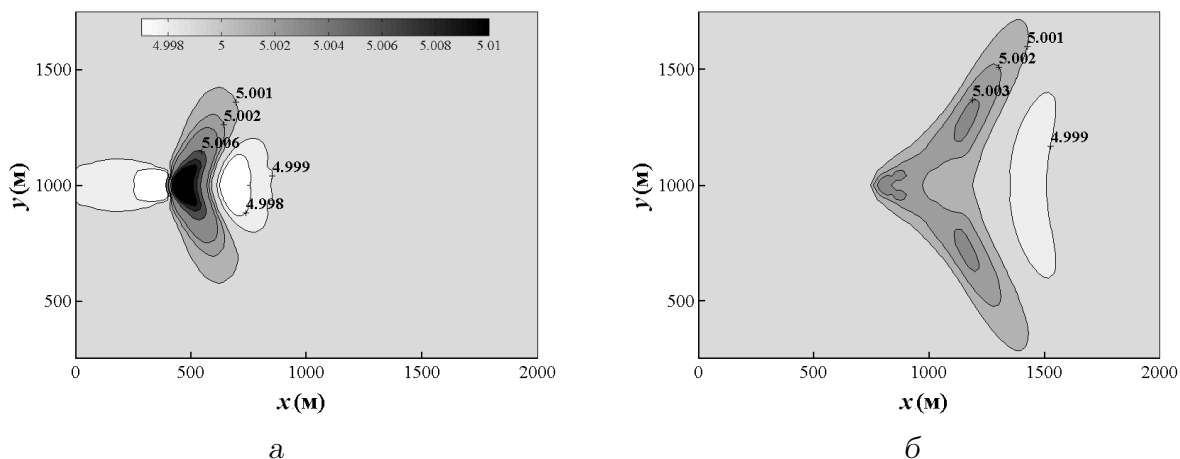


Рис. 14. Зміна форми вільної поверхні в процесі еволюції кар'єру (розподіл функції  $w$ )  
 при  $h_0 = 5$  м,  $U = 1$  м/с,  $D = 200$  м,  $d_0 = 5$  м:  
 а –  $t = 100$  год, б –  $t = 500$  год

кар'єру, підходячи до нього, скочуються по верховому укосові. Таким чином, із цього боку кар'єр поступово засипається. Водночас, удар потоку води об низовий укіс викликає його розмив, через що центральна частина кар'єру сильно видовжується. Утворення бічних ям пов'язане з появою над заглибленням поперечної складової швидкості водної течії, як показано на Рис. 12г. Ці ями мають незначну глибину, але поширюються на велику площу й засипаються дуже повільно — ймовірно, через незначну швидкість води в поперечному напрямку. З плином часу бічні ями можна інтерпретувати як великі зони ерозії, які здатні істотно впливати на загальну структуру ґрунту на річковому дні. Спереду і ззаду від головної нерівності формуються невеликі відкладення седименту. Це може свідчити про складний характер водної течії в цих областях, зокрема, про наявність тривимірних ефектів, які не можуть бути розраховані в рамках даної математичної моделі.

У розрахунках виявлено, що динаміка донної поверхні справляє істотний зворотній вплив на водний потік. Наведені на Рис. 14 ізолінії рівнів води в каналі показують, що в процесі розмиву кар'єру на вільній поверхні утворюється хвильовий фронт, який поширюється впоперек каналу і переміщується за течією разом із нерівністю дна.

Наголосимо, що наведені величини часових проміжків і просторових величин мають лише орієнтовний характер, оскільки результати розрахунків істотно залежать від покладених в основу моделі гідравлічних параметрів. Однак важливі якісні оцінки процесу можна отримати, порівнюючи еволюцію кар'єрів різної глибини чи діаметра чи відслідковуючи динаміку донної поверхні в залежності від гідродинамічних параметрів течії. За кількісні характеристики розмиву піщаного кар'єру візьмемо функцію  $d_{\max}(t)$ , значення якої відповідає максимальній глибині кар'єру в заданий момент часу, та величину  $x(d_{\max})$  — поздовжню координату точки, в якій досягається максимальна глибина. Очевидно, що за функцією  $x(d_{\max}(t))$  можна охарактеризувати швидкість, з якою заглиблення переміщується вздовж русла.

Рис. 15 ілюструє вплив геометричних і гідродинамічних параметрів розглянутої задачі на еволюційні характеристики кар'єру. Представлені на Рис. 15а залежності  $d_{\max}(t)$  і  $x(d_{\max})$  отримано для різних початкових глибин кар'єру  $d_0$  при фіксованих його діаметрі й характеристиках водної течії —  $D = 200$  м,  $h_0 = 5$  м,  $U = 1$  м/с. З цих графіків випливає, що градієнт функції  $d_{\max}(t)$  для глибоких ям набагато вищий, ніж для мілких, тобто, глибокі кар'єри засипаються швидше відносно своєї початкової глибини. З іншого боку, судячи з характеру отриманих залежностей  $x(d_{\max})$ , вони значно повільніше пересуваються по дну.

Вплив швидкості води  $U$  на моделювання еволюції розмиву кар'єрів зумовлений використанням степеневі формули (5) для опису потоку наносів. Зокрема, при  $m = 3$  отримуємо кубічну залежність потужності наносів від швидкості води, з якої випливає, що при  $U < 1$  донні процеси істотно сповільнюються, а при  $U > 1$  — прискорюються. Цей висновок підтверджується Рис. 15б, на якому зображені графіки функцій  $d_{\max}(t)$  і  $x(d_{\max})$ , отримані при фіксованих характеристиках процесу  $d_0 = 12$  м,  $D = 200$  м,  $h_0 = 5$  м для різних значень швидкості води в каналі —  $U = 0.5, 1$  і  $2$  м/с

Залежність морфологічних процесів від глибини води в каналі  $h_0$  не носить такого явного характеру, як від швидкості  $U$ . З представлених на Рис. 15в графіків випливає, що піщані кар'єри в глибоких акваторіях засипаються набагато довше і дрейфують значно повільніше, ніж у мілких. Ці результати було отримано при  $d_0 = 10$  м,

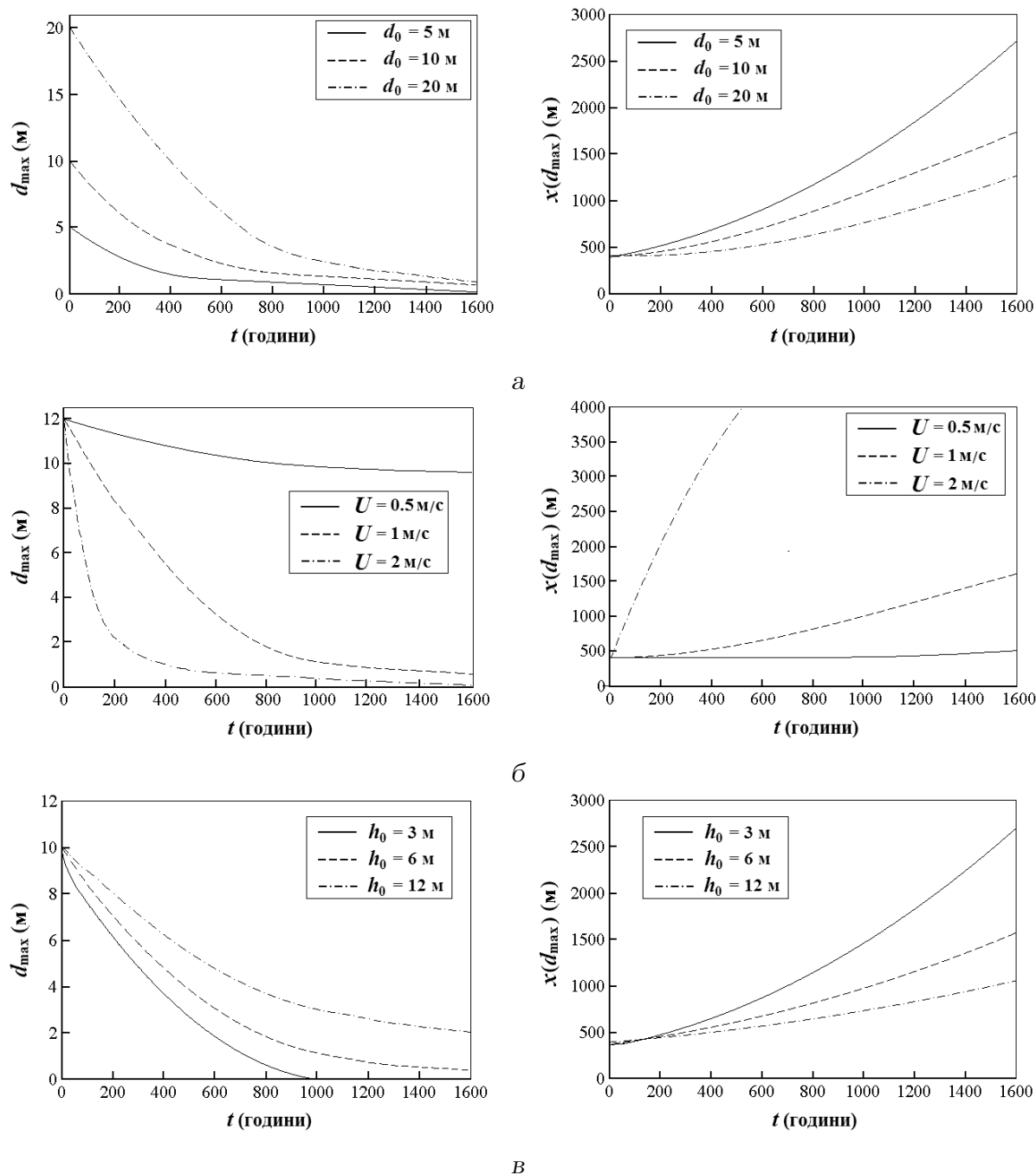


Рис. 15. Еволюційні характеристики кар'єру  $d_{\max}(t)$  і  $x(d_{\max})$ :  
 а — вплив початкової глибини кар'єру, б — вплив швидкості води в каналі,  
 в — вплив глибини води в каналі

$D = 200$  м,  $U = 1$  м/с. Відзначимо також практично лінійну залежність еволюційних характеристик кар'єру від глибини води в каналі.

Розрахунки показують, що еволюція кар'єру відбувається в рамках трикутника, побудованого дотичними до контурів функції  $z_b(x, y)$  одного й того малого ж рівня (див. Рис. 16). Кут  $\alpha$  при вершині цього трикутника (кут розмиву) є одним з головних геомет-

ричних параметрів, які характеризують еволюцію піщаного кар'єру в річковому потоці, оскільки він дозволяє оцінити поширення форми дна в обох напрямках — поперечному і поздовжньому. На Рис. 17 представлені розраховані залежності кута розмиву  $\alpha$  від початкової глибини кар'єру  $d_0$  і швидкості води  $U$ . Тут можна бачити, що кут розмиву зростає зі збільшенням глибини кар'єру нелінійно. Ймовірно, це зумовлено наявністю багатьох факторів, які впливають на процес.

Залежність  $\alpha$  від швидкості потоку  $U$  носить неоднозначний характер. Найбільші кути розмиву в розглянутому діапазоні швидкостей відповідають  $U = 0.5$  м/с. Цей результат підтверджує, що при  $U < 1$  домінує поширення форми дна в поперечному напрямку, яке завершується утворенням великих ерозійних зон уперек потоку. В цілому з графіків, наведених на Рис. 17, випливає, що при реалістичних параметрах течії кути розмиву великих донних заглиблень лежать у межах від  $22^\circ$  до  $34^\circ$ .

На Рис. 18 представлено відносну похибку збереження об'єму наносів (17), отриману при моделюванні розмиву кар'єрів різної початкової глибини. Як видно з графіка, у всіх випадках вона не перевищувала 1%. Цей результат разом з відсутністю нефізичних осциляцій при оцінюванні форм донної поверхні (див. Рис. 13 і 16) свідчить про те, що запропонований алгоритм забезпечує акуратне моделювання транспорту придонних наносів. Окрім того, завдяки застосуванню зв'язаного підходу при розв'язанні системи рівнянь (1), (2), він здатен забезпечити розрахунок оберненого впливу морфологічних процесів на течію води.

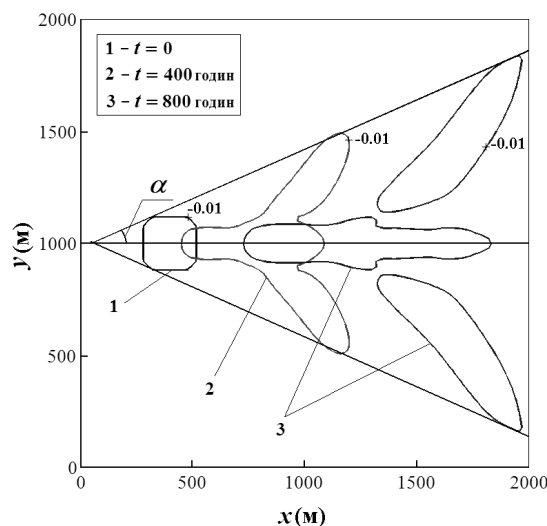


Рис. 16. Кут розмиву  $\alpha$  піщаного кар'єру при  $d_0 = 5$  м,  $D = 200$  м,  $U = 1$  м/с,  $h_0 = 5$  м

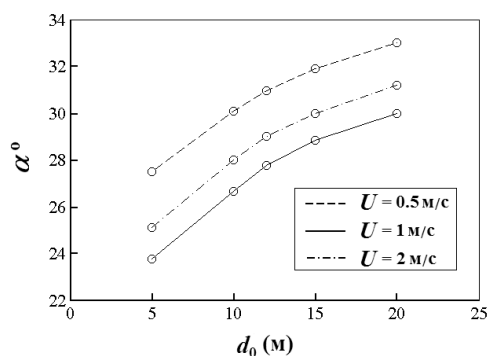


Рис. 17. Залежності кута розмиву  $\alpha$  піщаного кар'єру від початкової глибини  $d_0$  при різних швидкостях води в каналі ( $D = 200$  м,  $h_0 = 5$  м)

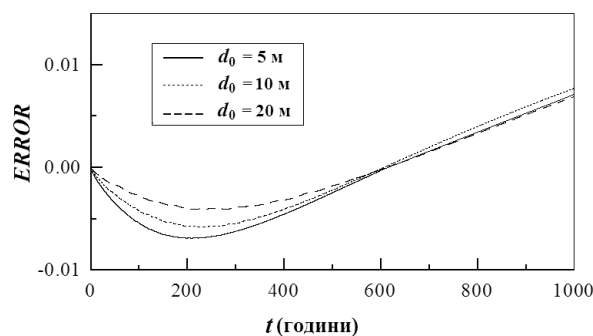


Рис. 18. Відносна похибка розрахунків для кар'єрів різної глибини ( $U = 1$  м/с,  $h_0 = 5$  м)

## 6. ВИСНОВКИ

1. Розроблено математичну модель і чисельний алгоритм для розрахунку гідроморфодинамічних процесів у відкритих водоймах, який поєднує центральну схему другого порядку Курганова—Ноелля—Петрової (KNP-scheme) для інтегрування гідродинамічних рівнянь зі схемою «проти течії» п'ятого порядку, за якою розраховується еволюція донної поверхні. Остання ґрунтується на зваженій істотно неосцилюючій апроксимації (WENO-approximation) потоку наносів.
2. Тестування алгоритму, проведене на відомій модельній задачі про розмив потоком циліндричного піщаного пагорба, виявило стійкість отриманих розв'язків на довгому часовому проміжку, а також їхню збіжність з даними інших авторів. Ці результати свідчать про високу точність чисельної схеми та її здатність забезпечити розв'язання складних фізично обґрунтованих морфодинамічних проблем.
3. Промодельовано еволюцію піщаних кар'єрів на річковому дні в широкому діапазоні геометричних і гідродинамічних параметрів. Якісна картина розмиву кар'єру показує, що локалізоване заглиблення трансформується в складну систему ям і невеликих насипів, яка переміщується разом з течією води. Поширення форми дна в поперечному напрямку викликає формування великих ерозійних зон. Отримані часові й просторові характеристики розмиву кар'єрів у залежності від їхніх початкових геометричних параметрів і гідродинамічних характеристик потоку.
4. Важливий кількісний параметр, яким описується еволюція кар'єру, — кут розмиву, що характеризує як поширення нерівності у поперечному напрямку, так і швидкість її переміщення за течією. Показано, що при реалістичних параметрах модельованої течії кути розмиву великих донних заглиблень знаходяться в діапазоні від  $20^\circ$  до  $35^\circ$  і залежать від їхньої початкової глибини та швидкості руслового потоку.
5. Зроблені оцінки важливі для прогнозування й попередження негативних техногенних і природних явищ в річкових акваторіях, які можуть бути викликані динамікою великих донних утворень та їхньою взаємодією з гідротехнічними спорудами, берегами річок тощо.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Wu W. Computational river dynamics. — London : Taylor and Francis, 2008. — 487 p.
- [2] Castro-Diaz M. J., Fernandez-Nieto E. D., Ferreiro A. M. Sediment transport models in shallow water equations and numerical approach by high order finite volume methods // Computers & Fluids. — 2008. — Vol. 37. — P. 299–316.
- [3] Горбань І. М. Чисельне моделювання еволюції нерівностей великого масштабу на річковому дні // Прикладна гідромеханіка. — 2015. — Т. 17(89), № 1. — С. 21–36.
- [4] Hudson J., Sweby P. K. Formulations for numerically approximating hyperbolic systems governing sediment transport // Journal of Scientific Computing. — 2003. — Vol. 19. — P. 225–252.

- [5] One-dimensional model for transient flows involving bed-load sediment transport and changes in flow regimes / L. Goutiere, S. Soares-Fraza, C. Savary et al. // *Journal of Hydraulic Engineering*. — 2008. — Vol. 134, no. 6. — P. 726–735.
- [6] Kubatko E., Westerink J., Dawson C. An unstructured grid morphodynamic model with a discontinuous galerkin method for bed evolution // *Ocean Modelling*. — 2006. — Vol. 15. — P. 71–89.
- [7] Long W., Kirby J. T., Shao Z. A numerical scheme for morphological bed level calculations // *Coastal Engineering*. — 2008. — Vol. 55. — P. 167–180.
- [8] Сухомел Г. И. Исследование гидравлики открытых русел и сооружений. — Киев : Наукова думка, 1965. — 112 с.
- [9] Liu X.-D., Osher S., Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes // *Journal of Computational Physics*. — 1994. — Vol. 115. — P. 200–211.
- [10] Kurganov A., Noelle S., Petrova S. Semidiscrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and Hamilton—Jacobi equations // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 2001. — Vol. 23, no. 3. — P. 707–740.
- [11] Kurganov A., Lin C.-T. On the reduction of numerical dissipation in central-upwind schemes // *Communications in Computational Physics*. — 2007. — Vol. 2, no. 1. — P. 141–163.
- [12] Gottlieb S., Shu C. W., Tadmor E. Strong stability-preserving high order time discretization methods // *SIAM Review*. — 2001. — Vol. 43. — P. 89–112.
- [13] Hudson J., Sweby P. K. A high-resolution scheme for the equations governing 2d bed-load sediment transport // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 2005. — Vol. 47. — P. 1085–1091.
- [14] Benkhaldoun F., Sahnim S., Seaïd M. A two-dimensional finite volume morphodynamic model on unstructured triangular grids // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 2010. — Vol. 63. — P. 1296–1327.
- [15] Kurganov A., Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations // *Journal of Computational Physics*. — 2000. — Vol. 160. — P. 241–282.
- [16] Горбань В. О., Горбань І. М. Чисельні моделі нестационарних руслових процесів // *Прикладна гідромеханіка*. — 2013. — Т. 15(87), № 4. — С. 19–39.
- [17] Yee H. C. Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications // *Journal of Computational Physics*. — 1987. — Vol. 68. — P. 151–179.
- [18] Kurganov A., Levy D. Central-upwind schemes for the Saint-Venant system // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. — 2002. — Vol. 36. — P. 397–425.



- [19] Johnson H. K., Zyserman J. A. Controlling spatial oscillations in bed level update schemes // *Coastal Engineering*. — 2002. — Vol. 46. — P. 109–126.
- [20] Jensen J. H., Madsen E. Ø., Fredsøe J. Oblique flow over dredged channels: II. Sediment transport and morphology // *Journal of Hydraulic Engineering*. — 1999. — Vol. 125, no. 11. — P. 1190–1198.
- [21] Hurten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // *Journal of Computational Physics*. — 1983. — Vol. 49. — P. 357–365.
- [22] LeVeque R. J. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods: The quasi-steady wave-propagation algorithm // *Journal of Computational Physics*. — 1998. — Vol. 146. — P. 346–356.
- [23] Hing Y., Shu C.-W. High order finite difference WENO schemes with the exact conservation property for the shallow water equations // *Journal of Computational Physics*. — 2005. — Vol. 208. — P. 206–227.
- [24] Hudson J. Numerical techniques for morphodynamic modelling : Ph. D. thesis / J. Hudson ; University of Reading. — 2001. — 185 p.

## REFERENCES

- [1] W. Wu, *Computational river dynamics*. London: Taylor and Francis, 2008.
- [2] M. J. Castro-Diaz, E. D. Fernandez-Nieto, and A. M. Ferreiro, “Sediment transport models in shallow water equations and numerical approach by high order finite volume methods,” *Computers & Fluids*, vol. 37, pp. 299–316, 2008.
- [3] I. M. Gorban, “Numerical simulation of evolution of large-scale irregularities on a river bottom,” *Applied Hydromechanics*, vol. 17(89), no. 1, pp. 21–36, 2015.
- [4] J. Hudson and P. K. Sweby, “Formulations for numerically approximating hyperbolic systems governing sediment transport,” *Journal of Scientific Computing*, vol. 19, pp. 225–252, 2003.
- [5] L. Goutiere, S. Soares-Fraza, C. Savary, T. Laraichi, and Y. Zech, “One-dimensional model for transient flows involving bed-load sediment transport and changes in flow regimes,” *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 134, no. 6, pp. 726–735, 2008.
- [6] E. Kubatko, J. Westerink, and C. Dawson, “An unstructured grid morphodynamic model with a discontinuous Galerkin method for bed evolution,” *Ocean Modelling*, vol. 15, pp. 71–89, 2006.
- [7] W. Long, J. T. Kirby, and Z. Shao, “A numerical scheme for morphological bed level calculations,” *Coastal Engineering*, vol. 55, pp. 167–180, 2008.
- [8] G. I. Suhomel, *A study of hydraulics of open channels and structures*. Kiev: Naukova Dumka, 1965.

- [9] X.-D. Liu, S. Osher, and T. Chan, “Weighted essentially non-oscillatory schemes,” *Journal of Computational Physics*, vol. 115, pp. 200–211, 1994.
- [10] A. Kurganov, S. Noelle, and S. Petrova, “Semidiscrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and Hamilton—Jacobi equations,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 23, no. 3, pp. 707–740, 2001.
- [11] A. Kurganov and C.-T. Lin, “On the reduction of numerical dissipation in central-upwind schemes,” *Communications in Computational Physics*, vol. 2, no. 1, pp. 141–163, 2007.
- [12] S. Gottlieb, C. W. Shu, and E. Tadmor, “Strong stability-preserving high order time discretization methods,” *SIAM Review*, vol. 43, pp. 89–112, 2001.
- [13] J. Hudson and P. K. Sweby, “A high-resolution scheme for the equations governing 2d bed-load sediment transport,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 47, pp. 1085–1091, 2005.
- [14] F. Benkhaldoun, S. Sahmim, and M. Seaïd, “A two-dimensional finite volume morphodynamic model on unstructured triangular grids,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 63, pp. 1296–1327, 2010.
- [15] A. Kurganov and E. Tadmor, “New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 160, pp. 241–282, 2000.
- [16] V. O. Gorban and I. M. Gorban, “Numerical models of non-stationary river processes,” *Applied Hydromechanics*, vol. 15(87), no. 4, pp. 19–39, 2013.
- [17] H. C. Yee, “Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications,” *Journal of Computational Physics*, vol. 68, pp. 151–179, 1987.
- [18] A. Kurganov and D. Levy, “Central-upwind schemes for the Saint-Venant system,” *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, vol. 36, pp. 397–425, 2002.
- [19] H. K. Johnson and J. A. Zyserman, “Controlling spatial oscillations in bed level update schemes,” *Coastal Engineering*, vol. 46, pp. 109–126, 2002.
- [20] J. H. Jensen, E. Ø. Madsen, and J. Fredsøe, “Oblique flow over dredged channels: II. Sediment transport and morphology,” *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 125, no. 11, pp. 1190–1198, 1999.
- [21] A. Hurten, “High resolution schemes for hyperbolic conservation laws,” *Journal of Computational Physics*, vol. 49, pp. 357–365, 1983.
- [22] R. J. LeVeque, “Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods: The quasi-steady wave-propagation algorithm,” *Journal of Computational Physics*, vol. 146, pp. 346–356, 1998.

- [23] Y. Hing and C.-W. Shu, “High order finite difference WENO schemes with the exact conservation property for the shallow water equations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 208, pp. 206–227, 2005.
- [24] J. Hudson, *Numerical techniques for morphodynamic modelling*. phdthesis, University of Reading, 2001.

### **И. Н. Горбань**

#### **Моделирование динамики песчаных карьеров в русловых потоках**

Развит численный метод для расчета совместной эволюции водного течения и донной поверхности в открытых водоемах, учитывающий взаимное влияние гидродинамического и морфологического процессов. Он сочетает центральную схему «против течения» Курганова—Ноелля—Петровой для интегрирования уравнений мелкой воды и взвешенную существенно неосциллирующую (WENO) схему пятого порядка, по которой рассчитывается эволюция донной поверхности. Мощность придонного потока наносов оценивается по степенной формуле Грасса. Моделирование тестовой задачи о размыве потоком воды конического песчаного холма выявило долговременную устойчивость полученного решения, а также его соответствие данным других авторов. Метод применен к расчету эволюции глубоких песчаных карьеров на речном дне. Полученные результаты демонстрируют формирование на донной поверхности сложного рельефа, когда локализованное углубление трансформируется в систему ям и небольших насыпей, перемещающихся вслед за течением. В то же время, углубление расширяется поперек потока, что приводит к формированию протяженных эрозионных зон на речном дне. Установлено, что величина угла размыва, характеризующего эволюцию карьера, зависит от начальной глубины карьера и параметров потока воды и находится в пределах от 20° до 35°. Полученные оценки «живучести» песчаных карьеров указывают на нелинейную зависимость интенсивности их засыпания и скорости перемещения от характеристик течения. Моделирование эволюции свободной поверхности выявило, что над неровностью дна генерируется интенсивный волновой фронт, форма которого изменяется в соответствии с процессами, происходящими на донной поверхности. Найденные оценки могут быть использованы при организации мероприятий по предотвращению негативных техногенных и природных явлений в речных акваториях, вызванных взаимодействием крупномасштабных донных образований с гидротехническими сооружениями и берегами.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** морфологический процесс, донная поверхность, транспорт наносов, песчаный карьер, угол размыва

### **I. M. Gorban**

#### **Modeling of sandpit dynamics in river flows**

A two-dimensional numerical method for simulating of coupled evolution of the water flow and the bed in open reservoirs is developed considering the mutual influence of the morphological processes. It combines the Kurganov-Noelle-Petrova central upwind scheme for integration of shallow water equations and the fifth-order Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) Scheme to describe the evolution of bed surface. The

bedload sediment transport rate is estimated by power-law Grass formula. Simulation of the test problem on erosion of a conical sand dune in a water flow revealed the longterm stability of the obtained solution, as well as its relevance to the data presented by other researchers. The method was used to calculate the evolution of deep sand quarries on the river bed. The obtained results demonstrate formation of a compound relief form on the bed when the localized hollow is transformed into the system of pits and small mounds moving with the flow. At the same time, the deepening expands across the flow that leads to the formation of extended erosion zones on the river bottom. The angle of spread characterizing the evolution of the quarry is found to depend on the initial quarry depth and water flow parameters and ranges from  $20^\circ$  to  $35^\circ$ . The obtained estimates of “survivability” of sand quarries indicate the nonlinear dependence of both the intensity of their filling and motion velocity on the flow parameters. Simulation of free surface evolution revealed an intense wave front generation over the unevenness of the bottom. The shape of this front changes in accordance with the processes occurring at the riverbed. The obtained estimates may be used when organizing the activities to prevent the negative technological and natural phenomena in river water areas initiated by interaction of large-scale bed roughness with hydraulic structures and banks.

*KEY WORDS:* morphological process, bed surface, sediment transport, sand quarry, angle of spread