

## ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН НА СФЕРЕ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

**И.Т. СЕЛЕЗОВ**

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

Рассмотрена задача рассеяния плоских волн на жесткой сфере вблизи плоской жесткой границы. Построены приближенные формулы длинноволнового приближения многократного рассеяния. Проведены расчеты рассеянных полей и диаграмма рассеяния.

### ВВЕДЕНИЕ

Задачи дифракции акустических волн на неоднородностях рассматривались в [1], в случае радиальных неоднородностей в [2]. Применение теорем сложения в многосвязных областях представлено в [3, 4]. В [5] дано содержательное изложение метода изображений. Построение многократно рассеянных полей приведено в [4]. Основные соотношения в сферической системе координат приведены в [6,7]. Решение задачи дифракции волн на сфере в бесконечной области приведено в [8]

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваем сферическую систему координат  $r, \theta, \varphi$  (радиальная, зенитная и азимутальная координаты), соответствующую прямоугольной декартовой системе координат  $x, y, z$ . Ось  $Oz$  перпендикулярна плоской границе с началом координат в центре абсолютно жесткого сферического включения (рассеивателя) и направлена из бесконечности к плоской границе.

Приведем физическую трактовку задачи. При набегании плоских волн из бесконечности (плоские волны распространяются вдоль оси  $Oz$ ) в системе возникает дифрагированное поле многократно переотраженных волн.

Из бесконечности в направлении оси  $Oz$  распространяется плоская волна перемещения

$$\vec{u} = \vec{e}_z u_z(0, 0, z, t) = \vec{u}_0 e^{i(\omega t - pz)}. \quad (1)$$

Движение упругой среды описывается уравнениями

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0, \quad \left( \nabla^2 - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{a} = 0, \quad (2)$$

а вектор перемещений определяется по формуле

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \psi + \vec{\nabla} \times \vec{a}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0. \quad (3)$$

Граничные условия на сфере и на плоской границе имеют вид

$$u_r|_{r=a} = 0, \quad u_\theta|_{r=a} = 0, \quad u_z|_{z=h} = 0, \quad \sigma_{xz}|_{z=h} = 0. \quad (4)$$

Искомые функции должны также удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда.

Выражение для набегающей волны (1) соответствует дилатационным волнам, так что из (1) и (3) получаем

$$\psi = -\frac{1}{ip} u_0 e^{i(\omega t - pz)} + f(x, y, 0, t) + \text{const}. \quad (5)$$

Потенціал  $\psi$  визначений з точністю до довільної функції, яку можна прийняти  $f \equiv 0$  і записати в відповідності з (2) рівняння для  $\psi$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(z, t) = 0. \quad (6)$$

На основі рівнянь (2), (5) і (6) можна написати  $p = \omega / c_e$ ,  $q = \omega / c_s$ .

В подальшому застосовуються формули в сферических координатах, так що  $\vec{\nabla} \times \vec{a}$  включає всі три компоненти вектора  $\vec{a}$ .

Для реалізації методу зображень на основі приведених вище формул застосовується відоме рішення дифракції еластических хвиль на сфері [8]. В цій роботі визначення векторного потенціала також зведено до рішення хвильового рівняння для скалярної функції  $\xi$ . Розділення змінних рішення для потенціалів приводиться до рівняння Лежандра і рівняння Бесселя для сферических функцій.

## РЕШЕНИЕ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Решения в бесконечной области для функций  $\psi$  и  $\xi$  записываются в виде

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ f_m j_m(pr) + a_m h_m^{(2)}(pr) \right] P_m(\cos \theta), \quad \xi = \sum_{m=0}^{\infty} b_m h_m^{(2)}(qr) \frac{\partial}{\partial \theta} P_m(\cos \theta), \quad (7)$$

где  $f_m = -(2m+1) u_0 p^{-1} i^{(m+1)}$ ,  $j_m(pr)$  и  $h_m^{(2)}(pr)$  – сферические функции Бесселя и Ханкеля. Например,  $j_m(\zeta) = J_{m+\frac{1}{2}}(\zeta) \sqrt{\frac{\pi\zeta}{2}}$ .

Первые два граничных условия (4) записываем в виде

$$\left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\phi) \right]_{r=a} = 0, \quad \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left( -\frac{\partial}{\partial r} r a_\phi \right) \right]_{r=a} = 0$$

откуда с учетом (7) получаем коэффициенты  $a_m$  и  $b_m$

$$\begin{aligned} a_m &= f_m \Delta_m^{-1} \left\{ m(m+1) j_m(pa) h_m(qa) - pa j'_m(pa) [h_m(qa) + qah'_m(qa)] \right\}, \\ b_m &= f_m \Delta_m^{-1} \left\{ pa h_m(pa) j'_m(pa) - pa h'_m(pa) j_m(pa) \right\}, \\ \Delta_m &= pa h'_m(pa) [h_m(qa) + qa h'_m(qa)] - m(m+1) h_m(pa) h_m(qa). \end{aligned} \quad (8)$$

Для поля в дальней зоне  $\frac{r}{a} \gg 1$  находим приближенные решения

$$u_{rm} \cong \sum_{m=0}^{\infty} a_m i^m \frac{1}{r} e^{-ipr} P_m(\cos \theta), \quad u_{\theta m} \cong - \sum_{m=0}^{\infty} b_m i^m \frac{1}{r} e^{-iqr} \frac{\partial}{\partial \theta} P_m(\cos \theta). \quad (9)$$

В рэлеевском приближении ( $pa, qa \ll 1$ ) из (8) и (9) можно установить, что доминирующими являются коэффициенты

$$a_1 \cong i 3a \left[ 1 + 2 \left( \frac{q}{p} \right)^2 \right]^{-1}, \quad b_1 \cong i 3a \left[ 1 + 2 \left( \frac{q}{p} \right)^2 \right]^{-1} \left( \frac{q}{p} \right)^2.$$

Решение, удовлетворяющее двум вторым граничным условиям (4), представляем в форме

$$\bar{u}(r, \theta, r^*, \theta^*) = \sum_{k=1}^{\infty} [\bar{u}_k(r, \theta) + \bar{u}_k^*(r^*, \theta^*)]. \quad (10)$$

где суммарные компоненты перемещений для рассеянного поля кратности  $k$  имеют вид

$$\begin{aligned} (\bar{u}_k + \bar{u}_k^*)_r &= U_{rk} = u_{rk} - u_{rk}^* \cos(\theta + \theta^*) + u_{\theta k}^* \sin(\theta + \theta^*), \\ U_{\theta k} &= u_{\theta k} + u_{\theta k}^* \cos(\theta + \theta^*) - u_{rk}^* \sin(\theta + \theta^*). \end{aligned} \quad (11)$$

Различие в расстояниях от действительного и мнимого препятствий до некоторой точки  $r, \theta$  и разновременность прихода  $p$  и  $s$ -волн учитываются формулами вида

$$\begin{aligned} \exp(-i\alpha_j) &= (\cos \eta_j - i \sin \eta_j) \exp(-ipr), \quad \alpha_0 = qr, \quad \alpha_1 = pr^*, \quad \alpha_2 = qr^*, \\ \eta_0 &= pr \left( \frac{q}{p} - 1 \right), \quad \eta_1 = \eta_p = pr(\eta - 1), \quad \eta_2 = \eta_q = pr \left( \frac{q}{p} \eta - 1 \right). \end{aligned} \quad (12)$$

По формулам (10)–(12) после ряда преобразований для однократно рассеянного поля находим

$$\begin{aligned} U_{r1} &\cong -\cos \theta + \left( \frac{2h}{r} \cos \theta - 1 \right) \left( \frac{2h}{r} - \cos \theta \right) (\cos \eta_p - i \sin \eta_p) \eta^{-3} + \\ &+ \left( \frac{q}{p} \right)^2 (\cos \eta_q - i \sin \eta_q) \frac{2h}{r} \eta^{-3} \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{\theta 1} &\cong \left[ -\left( \frac{q}{p} \right)^2 (\cos \eta_\theta - i \sin \eta_\theta) - \left( \frac{2h}{r} \cos \theta - 1 \right) (\cos \eta_q - i \sin \eta_q) \eta^{-3} \left( \frac{q}{p} \right)^2 - \right. \\ &\left. - \left( \frac{2h}{r} - \cos \theta \right) (\cos \eta_p - i \sin \eta_p) \frac{2h}{r} \eta^{-3} \right] \sin \theta \end{aligned}$$

В правых частях опущен множитель  $\frac{a}{r} \exp(ipr)$ , левые части нормированы множителем  $3 \left[ 1 + 2 \left( \frac{q}{p} \right)^2 \right]^{-1}$ , а перемещения отнесены к  $u_0$ . Поле падающей волны и соответствующее ему поле отраженной от границы волны имеют вид:  $u_y = u_y^i - u_y^* = \exp(ipz) - \exp[i(pz - 2ph)]$ .

Однократно дифрагированное поле описывается формулами выше.

Вторичное дифрагированное поле состоит из двух частей. Падающее поле для первой части можно принять в виде волн, рассеянных на мнимом препятствии и достигающих действительного препятствия.

Приближенное решение задачи рассеяния представляется в виде

$$u_r \cong U_{r1} + U_{r2}; \quad u_\theta \cong U_{\theta 1} + U_{\theta 2}.$$

В качестве примера найдем перемещения  $u_r$  и  $u_\theta$  при следующих данных: коэффициент Пуассона  $\nu = 0,25$ ;  $pa = 0,18$ ;  $r/a = 200$ . При выбранных параметрах погрешность применяемых формул не превышает 10%. Вычисления выполнены в точках с шагом  $\pi/36$ . Результаты расчетов приведены на рис. 1.

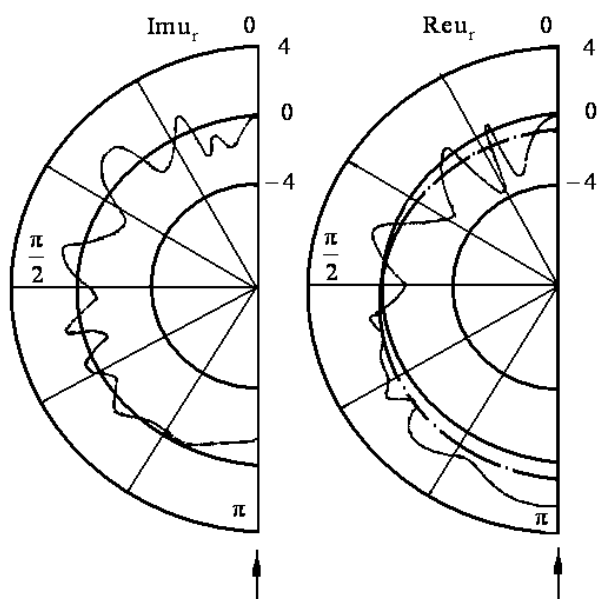


Рис. 1. Изменение величин рассеянного поля  $\text{Im} u_r$  и  $\text{Re} u_r$  при  $h/r = 200$  (сплошная линия) и при  $h/r = \infty$  (штрих-пунктирная линия)

Из полученных результатов следует появление сильно осциллирующих полей многократно переотраженных волн.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Вовк И.В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. – К.: Наук. думка, 1986. – 240 с.
2. Selezov I.T. Diffraction of waves by radially inhomogeneous inclusions // Physical Express. – 1993. – 1(2). – P. 104–115.
3. Friedman B., Russek J. Addition theorem for spherical waves // Quart. Appl. Math. – 1954. – Vol. 12, No. 1. – P. 13–23.
4. Selezov I.T., Kryvonos Yu.G., Gandzha I.S. Wave propagation and diffraction. Mathematical methods and applications. – Springer, 2017. – 237 p. [В серии Foundations of Engineering Mechanics, DOI 10.1007/978-981-10-4923-1].
5. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965. – 702 с.
6. Кратцер А., Франц Б. Трансцендентные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 467 с.
7. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. – Т. 1, 2. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 798 с.
8. Knopoff L. Scattering of compression waves by spherical obstacles // Geophysics. – 1959. – Vol. 24, No. 1. – P. 30–39.