

ПРО АКУСТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ СФЕРИ З КОНЦЕНТРИЧНИМ ІМПЕДАНСНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

В. Н. ОЛІЙНИК

*Інститут гідромеханіки НАН України
вул. Желябова, 8/4, 03057, Київ, Україна
тел. (044) 456-69-83; e-mail: v_oliyuk@yahoo.com*

Розв’язано задачу про гармонічні пульсації заповненої акустичним середовищем сфери з концентричним імпедансним включенням. Знайдено аналітичний вираз для акустичного імпедансу поверхні такої сфери. Проаналізовано залежність шуканого імпедансу від частоти для різних значень імпедансу поверхні внутрішнього включення. Показано, що для достатньо низькоімпедансних включень тип реакції зовнішньої поверхні сфери може змінюватися з пружного на інерційний. Висловлено припущення про те, що означений випадок виявляється внутрішньо суперечливим з фізичної точки зору, оскільки тут для розглянутої сфери можуть порушуватись умови динамічної стійкості.

ВСТУП

Вивчення пульсуючих коливань сферичних об’єктів і випромінювання ними звуку належить до вельми традиційних напрямків акустики. Тим не менше, попри сотні, а то й тисячі публікацій на цю тему, видається можливим відшукати нюанси, які залишились поза увагою попередників і є водночас важливими для розуміння перебігу певних фізичних процесів чи особливостей формування макроскопічних характеристик гетерогенних середовищ. Дійсно, сферичні елементи можна вважати одним з найпростіших і, разом з тим, найпоширеніших видів включень у дисперсних середовищах і композитних матеріалах. Надаючи цим включенням певних властивостей, можна в широких межах модифікувати властивості середовища в цілому. З іншого боку, складний характер поведінки природних неоднорідних середовищ можна пояснити саме визначивши, які фізичні особливості включень грають при цьому головну роль.

Переходячи від загальних міркувань до конкретики, звернімося до структури одного з життєво важливих органів людини – легень. Так, біологічний матеріал, який зазвичай називають легеневою паренхімою, складається з великої кількості повітряноносних мішечків-альвеол субміліметрового розміру (хорда характерного перерізу – до 0.3 мм) [1]. Саме завдяки своїй “піноподібній” будові, яка забезпечує сильну розвиненість поверхні контакту стінок альвеол з повітряним наповненням, легені й виконують притаманну їм функцію газообміну між кров’ю і повітрям при диханні.

Як відомо, легені – орган, слабо контрастний для рентгенівських променів і практично непроникний для ультразвуку. Тому й досі основними при їхньому медико-діагностичному дослідженні залишаються низькочастотні, здебільшого, пасивні методи. Найпоширеніша з них, аускультация нині переживає період модернізації, стимульований швидким розвитком акусто-електронної та комп’ютерної техніки. У ході цього переходу діагност починає спиратися вже не на суб’єктивні судження якісного хара-

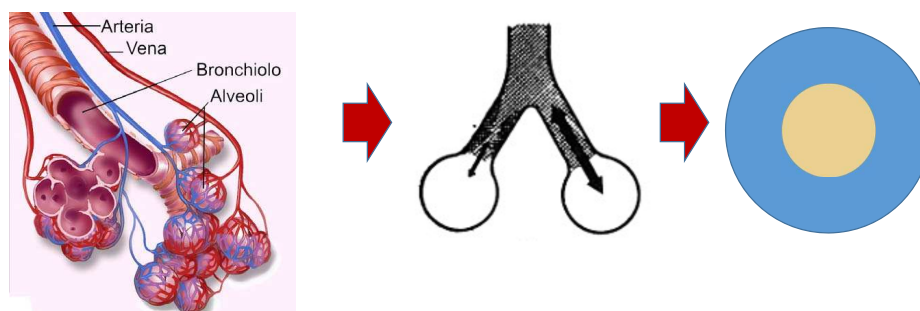


Рис. 1. Етапи спрощення геометрії альвеол при моделюванні легеневої паренхіми

ктеру, а на об'єктивні параметри акустичних сигналів, зафіксованих апаратурою для електронно-цифрової аускультції.

З цієї точки зору стає зрозумілим сталий інтерес до фізичних властивостей самої паренхіми як джерела поширення звуку в діапазоні чутних частот. Численні експериментальні й теоретичні дослідження підтвердили унікальність цих властивостей для тканин і органів людського організму, а також той факт, що ці властивості значною мірою визначаються вже згаданою мікроструктурованою будовою. Напевне, одним з найбільш плідних підходів стало моделювання легеневої тканини концентрованим бульбашковим середовищем типу дрібнодисперсної суспензії газу у воді. Це дозволило не тільки пояснити причини існування аномально низької швидкості поширення звуку в такому середовищі, але й, до певної міри, розкрити механізм формування притаманної йому високої акустичної дисипації в широкому частотному діапазоні [2].

Незважаючи на очевидні переваги, бульбашкова модель паренхіми має й суттєве обмеження, пов'язане з тим, що в реальних легенях альвеолярні камери не замкнені, відкриті в альвеолярні ходи, сполучені з елементами бронхіального дерева. Недарма, при розгляді задач транспорту газу при диханні майже завжди оперують повітровоодною моделлю респіраторного тракту. Для того, щоб урахувати ефекти зв'язаності з бронхіальним деревом при поширенні звуку в легенях, застосовують гібридні моделі, у яких декілька старших поколінь бронхів розглядаються як з'єднані канали-звуководи, навантажені з дочірнього боку на легеневу тканину.

Не викликає сумнівів, що правомірним має бути й зворотний підхід з моделюванням “відкритих” альвеол, навантажених на дочірні гілки розгалуженого звукОВОДА, який моделює бронхіальне дерево. Очевидно також, що, завдяки малості хвильових розмірів альвеолярних камер, можна без звуження загальності міркувань значно спростити геометрію досліджуваної системи, розглядаючи пульсуючі коливання сферичних альвеол під дією тиску сталої амплітуди, який гармонічно змінюється в часі з певною частотою. У цьому випадку зв'язок з бронхіальним деревом доцільно звести до скінченного акустичного імпедансу, який нав'язується на частині поверхні альвеоли. Для того, щоб не розглядати задачу з мішаними граничними умовами, імпедансу частину поверхні “сховаємо” всередину камери – така ідеалізація підходить для першого наближення, оскільки вона не повинна істотно спотворити картину її реакції на зовнішнє навантаження (тиск).

Виходячи з цих міркувань, у даній доповіді запропоновано розглянути модель сферичного об’єму з акустичним заповненням, зовнішня поверхня якого перебуває під дією рівномірного гармонічного тиску, а всередині знаходиться сферичне включення з імпедансною поверхнею. Результати дослідження такої системи в подальшому будуть застосовані для побудови гібридної моделі паренхіми як акустичного середовища з урахуванням зв’язку альвеол з бронхіальним деревом.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай куля, заповнена акустичним середовищем з густиною ρ і швидкістю звуку c , має радіус r_a , а її зовнішня поверхня перебуває під дією гармонічного тиску $P_a \exp(-i\omega t)$, де P_0 – амплітуда, а ω – кругова частота. Всередині сфери знаходиться концентричне включення радіуса $r_b < r_a$ з поверхнею, на якій задано скінченний акустичний імпеданс Z (див. рис. 1).

З математичної точки зору постановка цієї задачі має такий вигляд. Якщо відкинути періодичну часову залежність і перейти до розгляду амплітудних величин, то акустичне поле в сферичному об’ємі можна описати рівнянням Гельмгольца для потенціалу коливальної швидкості Φ :

$$\nabla^2 \Phi + k^2 = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (1)$$

Враховуючи те, що розглядаються чисто радіальні коливання, оператор Лапласа спростимо до вигляду

$$\nabla^2 \cdot = \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} (\cdot).$$

При цьому акустичний тиск p і нормальна швидкість $v_n \equiv v_r$ у цій області виражаються стандартним чином:

$$p = -i\omega\rho\Phi, \quad v_n = -\frac{d\Phi}{dr}.$$

Гранична умова на зовнішній поверхні записується як

$$-i\omega\rho\Phi = P_0, \quad r = r_a. \quad (2)$$

а на внутрішній –

$$-i\omega\rho\Phi = -Z \frac{d\Phi}{dr}, \quad r = r_b. \quad (3)$$

Наведена постановка (1)–(3) дозволяє отримати точний аналітичний розв’язок для акустичного потенціалу у формі

$$\Phi(r) = i \frac{P_0 r_a}{\rho c} \frac{1}{kr} \frac{(kr_b - i\zeta) \sin k(r - r_b) - i\zeta kr_b \cos(r - r_b)}{(kr_b - i\zeta) \sin k(r_a - r_b) - i\zeta kr_b \cos(r_a - r_b)}, \quad (4)$$

де $\zeta = Z/(\rho c)$. Простота виразу (4) дає надію на можливість детального дослідження асимптотичної поведінки розглянутого об’єкта при малих хвильових числах ($kr_a \rightarrow 0$),

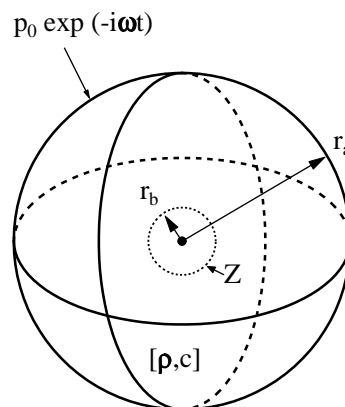


Рис. 2. Геометрія акустичної сфери з імпедансним включенням

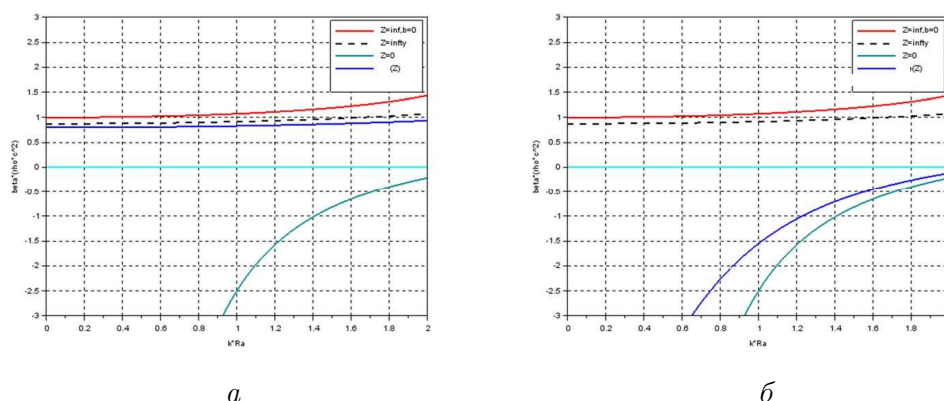


Рис. 3. Стисливість акустичної сфери з пружним імпедансним включенням при $r_b/r_a = 0.5$:
 $a - S/(\rho c) = 10$; $b - S/(\rho c) = 0.1$

характерної для випадку поширення порівняно низькочастотного звуку в паренхімі. Саме такий, добре контрольований, характер розв'язку і був метою зроблених вище суттєвих геометричних спрощень модельної системи.

Надалі нас цікавитиме, насамперед, як впливає характер і величина імпедансу Z на об'ємну стисливість β кулі. Справа у тому, що макроскопічні акустичні параметри рідинно-газової суспензії формуються саме за рахунок об'ємно усереднених стисливостей і густин диспергованої фази і фази-носія. Зрозуміло, що модельний об'єкт $r_b < r < r_a$ можна розглядати як прототип такого дисперсного включення [2, 4].

Для того, щоб перейти від власне акустичного потенціалу до стисливості, згадаємо її визначення як відносну зміну об'єму при зміні зовнішнього тиску. Skorиставшись на додачу добре відомими властивостями похідних, отримуємо:

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = \frac{1}{V} \frac{dV/dt}{dp/dt} = \frac{i}{\omega P_0} \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}. \quad (5)$$

Тут можна вважати

$$V \approx \frac{4\pi}{3} r_a^3, \quad \frac{dV}{dt} \approx 4\pi r_a^2 v_n|_{r=r_a}.$$

Таке наближення дозволяє повністю виразити об'ємну стисливість через розв'язок (4) для акустичного потенціалу Φ .

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Переходячи до аналізу числових результатів, відзначимо, що на цьому етапі ставилась мета перевірки того, як змінюється об'ємна стисливість β в залежності від заданого на поверхні $r = r_b$ імпедансу Z для деяких окремих випадків:

- $Z = S/(-i\omega)$ – імпеданс пружного типу (тут $S = \text{const}$ – еквівалентна піддатливість на одиницю площі внутрішньої поверхні);
- $Z = -i\omega M$ – імпеданс інерційного типу (тут $M = \text{const}$ – еквівалентна маса на одиницю площі внутрішньої поверхні).

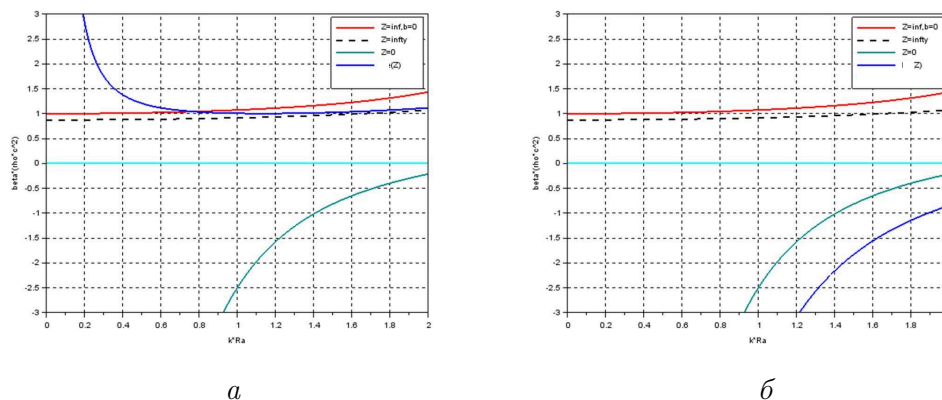


Рис. 4. Стисливість акустичної сфери з інерційним імпедансним включенням при $r_b/r_a = 0.5$:
 а - $M/(\rho c) = 10$; б - $M/(\rho c) = 0.1$

Також розглядались асимптотичні значення $Z \rightarrow 0$ і $Z \rightarrow \infty$.

На рис. 3 показані залежності величини нормованої (безрозмірної) об’ємної стисливості $\beta \rho c^2$ від хвильового радіуса kr_a сфери $r = r_a$ для імпедансу Z типу пружності. Лівий графік відповідає $S = 10$, а правий – $S = 0.1$.

Видно, що для достатньо великих S стисливість β у широкому діапазоні хвильових чисел демонструє поведінку, дуже близьку до асимптотичного випадку твердого включення. Як і очікувалось, для скінченних значень пружного імпедансу куля виявилась дещо менш стисливою, ніж для $Z \rightarrow \infty$ – у першому випадку зросла інтегральна пружність системи. При $r_b = 0$ (суцільна куля з радіусом r_a , включення відсутнє) досліджуваний об’єкт поводить себе абсолютно аналогічно, але є трохи стисливішим.

Значно цікавішим виявився випадок наявності доволі малого за модулем пружного імпедансу. Тепер характеристика β змінила знак і наблизилась до кривої, як відповідає нульовому значенню імпедансу. Очевидно, величини Z недостатньо для того, щоб сформувані динамічну протидію коливальним рухам акустичного середовища в околі внутрішньої поверхні $r = r_b$ і система в цілому реагує на силове збудження поверхні $r = r_a$ як маса. Теоретично внаслідок низькочастотного зростання $Z \sim 1/\omega$ має існувати область, де стисливість знак на плюс, але виявити її в ході проведених розрахунків не вдалося.

Така поведінка свідчить про потенційний ризик втрати кулею динамічної стійкості і може вказувати на межі застосування її у якості моделі альвеоли. Звідси можна зробити висновок про те, що стабільність структурних елементів легеневої тканини може підтримуватись лише за умови високого вхідного акустичного опору на його апертурі в бік бронхіального дерева.

Звернімося до рис. 4, який ілюструє поведінку нормованої об’ємної стисливості кулі при наявності імпедансу Z типу маси. Якщо остання достатньо велика (лівий графік), то загальна реакція кулі з включенням на збудження тиском P_0 знову виявляється пружною і на високих частотах її величина асимптотично наближається до величини стисливості кулі з абсолютно жорстким включенням. У низькочастотній смузі піддатливість необмежено зростає, адже імпеданс масового типу прямо пропорційний до частоти і при $\omega \rightarrow 0$ спадає до нуля. Зауважимо, що при моделюванні альвеол зга-

дану масу M можна вважати певним аналогом приєднаної маси повітряного стовпа у бронхіальному дереві. Таким чином, виходячи з двокомпонентної (дисперсійної) моделі паренхіми, отримуємо, що макроскопічна швидкість поширення звуку в ній для дуже низьких частот має різко знижуватись. За деякими даними, таке зниження дійсно може спостерігатись на частотах, нижчих за 20 Гц [3]. Цей факт є непрямим підтвердженням фізичної обґрунтованості запропонованого підходу.

Для низьких значень імпедансу приєднаної маси стає недостатньо для ефективного гальмування повітря при коливаннях в околі $r = r_b$. Тут повторюється тенденція, яка спостерігалась при розгляді низькомодульних імпедансів пружного типу, за виключенням того, що на низьких частотах зміна знаку β навіть теоретично не можлива.

ВИСНОВКИ

Продемонстровано працездатність акустичної моделі альвеоли у вигляді кулі з імпедансним включенням. Тепер основне питання полягає в тому як адекватним чином змоделювати вхідний акустичний імпеданс бронхіального дерева на отворі альвеоли в альвеолярний хід.

Як і слід було очікувати, на достатньо високих частотах система поводить себе подібно до ізольованої кулі з корекцією величини стисливості в залежності від величини імпедансу Z .

Низькочастотна поведінка досліджуваної неідеальної кулі суттєво залежить від величини і характеру імпедансу на внутрішній поверхні $r = r_b$. Якщо він має характер пружності, то при досить великих $|Z|$ загальна тенденція й порядок величин для стисливості у всьому частотному діапазоні не дуже відрізняється від β для кулі без коаксіального включення.

Для імпедансу інерційного типу при $kr_a \rightarrow 0$ спостерігається значне зростання стисливості. Це – очікуваний ефект, існування якого підтверджується експериментальними даними про спадання швидкості поширення звуку в легенях на дуже низьких частотах (одиниці й десятки Гц), де вплив вільних коливань стовпа повітря на вході в альвеолу стає незначним.

Показано, що для достатньо малих $|Z|$ результуюча стисливість стає від'ємною – куля з включенням реагує як приєднана маса. Це може суперечити умовам стійкості досліджуваної системи в області низькомодульних вхідних імпедансів і вказувати на межі застосування запропонованої моделі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вейбель Э. Р. Морфометрия легких человека.– М.: Медицина, 1970.– 176 с.
2. Олійник В. Н. Особливості поширення хвиль у легеневій тканині // Акуст. вісн.– 2007.– 10, № 2.– С. 64–78.
3. Дьяченко А. И., Любимов Г. А. Распространение звука в легочной паренхиме // Изв. АН СССР. МЖГ.– 1988.– № 5.– С. 3–14.
4. Rice D. A. Sound speed in pulmonary parenchyma // J. Appl. Physiol.– 1983.– 54, N 1.– P. 304–308.