КУМУЛЯНТНЫЙ АНАЛИЗ АКУСТИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ

А.И. КРАСИЛЬНИКОВ

Институт технической теплофизики НАН Украины, Киев

На основе модели линейных случайных процессов рассмотрены свойства кумулянтов и кумулянтных коэффициентов акустических флуктуационных сигналов, приведены формулы для нахождения кумулянтных коэффициентов типовых моделей. Проанализированы кумулянтные коэффициенты 1/f – шума, который является моделью флуктуационных сигналов, возникающих в различных технических и физических объектах.

ВВЕДЕНИЕ

В пассивных акустических информационных системах источниками информации являются акустические флуктуационные сигналы, которые возникают в процессе естественного функционирования исследуемых физических или технических объектов. К таким сигналам относятся, в частности, виброакустические шумы, сигналы акустической эмиссии, шумы кавитации, морские шумы, биомедицинские шумы, шумы, возникающие при рассеивании на неоднородностях среды и др.

В настоящее время большинство задач исследования различных флуктуационных сигналов решены в рамках корреляционно–спектральной теории, которая является исчерпывающей для гауссовских случайных процессов. Анализ результатов теоретических и экспериментальных исследований показал, что распределение мгновенных значений флуктуационных процессов может существенно отличаться от гауссовского, поэтому возникает необходимость исследования, помимо корреляционно–спектральных функций, более полных вероятностных характеристик флуктуационных сигналов.

В данной работе на основе модели линейных случайных процессов рассмотрена возможность применения кумулянтных методов для анализа акустических флуктуационных сигналов.

1. КУМУЛЯНТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ТИПОВЫХ МОДЕЛЕЙ АКУСТИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Акустические флуктуационные сигналы являются следствием различных физических явлений – термодинамических, гидродинамических, электромагнитных, механических, оптических и др. и представляют собой результат суммирования большого числа элементарных импульсов со случайными параметрами.

Простейшей моделью флуктуационных сигналов, отражающей физику их формирования, являются процессы Бунимовича–Райса [1, 2]:

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{\nu(t)}\eta_k h\left(t-t_k\right), \tag{1}$$

где однородный процесс Пуассона $\nu(t)$ с интенсивностью λ описывает число импульсов на интервале $[0,t]$; моменты времени возникновения импульсов t_k являются однородным пуассоновским потоком событий; неслучайная функция $h(t)$ описывает форму элементарных импульсов; амплитуды импульсов η_k – независимые случайные величины, которые имеют одинаковые распределения и не зависят от t_k.

Наиболее общей и хорошо исследованной моделью флуктуационных сигналов являются в настоящее время линейные случайные процессы, которые обобщают процессы Бунимовича–Райса и определяются следующим образом [3]:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)\, d\eta(\tau), \tag{2}$$

где ядро $h(t,\tau)$ – интегрируемая в квадрате неслучайная функция, а $\eta(\tau)$ – стохастически непрерывный однородный случайный процесс с независимыми приращениями.

В работах [3, 4] получены общие формулы для нахождения многомерных характеристических функций процессов (2), их многомерных кумулянтных функций, рассмотрены задачи линейных и нелинейных преобразований линейных случайных процессов; в работах [5, 6] исследованы свойства их одномерной характеристической функции. Процессы (2) являются безгранично делимыми [5], поэтому найти их плотность вероятностей в общем случае можно только приближенными методами. В связи с этим методы, основанные на анализе плотности вероятностей, малопригодны для исследования флуктуационных сигналов. Перспективным направлением анализа акустических флуктуационных сигналов являются кумулянтные методы [7], которые позволяют достаточно просто и эффективно решать задачи исследования негауссовских случайных величин и процессов.

Ограничимся рассмотрением частного случая модели (2) – когда ядро удовлетворяет условию $h(t,\tau) = h(t-\tau)$. В этом случае процессы (2) являются стационарными в узком смысле, их кумулянты κ_s не зависят от времени и вычисляются по формуле [3, 4]

$$\kappa_s = \kappa_{s\eta} \int_{-\infty}^{\infty} h^s(t)\, dt, \tag{3}$$

где $s = 1, 2, ...$ – порядок кумулянтов, $\kappa_{s\eta}$ – кумулянт порядка s процесса $\eta(\tau)$ при $\tau = 1$.

Для анализа негауссовских случайных величин и процессов удобно использовать безразмерные кумулянтные коэффициенты γ_s,

$$\gamma_s = \kappa_s \big/ \kappa_2^{s/2}. \tag{4}$$

В настоящее время в технических приложениях обычно ограничиваются применением лишь двух кумулянтных коэффициентов – асимметрии γ_3 и эксцесса γ_4, однако при использовании конечного числа кумулянтных коэффициентов для анализа негауссовских случайных процессов и построения аппроксимирующих распределений возможны ошибочные результаты и выводы. Например, у распределений Чампернауна и Стьюдента с семью степенями свободы коэффициенты асимметрии и эксцесса совпадают: $\gamma_3 = 0$, $\gamma_4 = 2$. Поэтому для практического применения кумулянтных методов в технических задачах необходимо учитывать кумулянтные коэффициенты, порядок которых $s > 4$.

Приведем основные свойства кумулянтов и кумулянтных коэффициентов флуктуационных сигналов, используя результаты работ [7, 8].

1. Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ – произвольные независимые случайные процессы, у которых существуют кумулянты $\kappa_{s,1}$ и $\kappa_{s,2}$. Тогда существуют кумулянты κ_s процесса $\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t)$, которые равны $\kappa_s = \kappa_{s,1} + \kappa_{s,2}$.

2. Пусть $\xi_1(t)$ – произвольный случайный процесс с кумулянтами $\kappa_{s,1}$, а процесс $\xi_2(t)$ равен $\xi_2(t) = a + b\xi_1(t)$, где $a,\ b \neq 0$ – действительные числа.

Тогда кумулянты $\kappa_{s,2}$ процесса $\xi_2(t)$ равны:

$$\kappa_{s,2} = \begin{cases} a + b\kappa_{1,1}, & s = 1, \\ b^s \kappa_{s,1}, & s \geq 2, \end{cases}$$

а кумулянтные коэффициенты $\gamma_{s,2} = \gamma_{s,1}$, $s \geq 2$.

3. Все кумулянты и кумулянтные коэффициенты четных порядков s линейных случайных процессов неотрицательны.

4. Для кумулянтных коэффициентов γ_s четных порядков s линейных случайных процессов справедливо неравенство

$$\sum_{l=0}^{2k} C_{2k}^{l} \left(-\gamma_3\right)^{2k-l} \gamma_{l+2} \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

5. Если у линейных случайных процессов коэффициент эксцесса $\gamma_4 = 0$, то коэффициент асимметрии $\gamma_3 = 0$ и процессы (2) являются гауссовскими.

В табл. 1 приведены рассчитанные по формулам (3), (4) кумулянтные коэффициенты флуктуационных сигналов с типовыми формами элементарных импульсов.

Таблица 1. Кумулянтные коэффициенты типовых моделей, $E(x)$ – единичная функция

№	Вид импульса	Форма импульса $h(t)$, $A > 0$, $\tau_и > 0$, $\nu > 0$	Кумулянтные коэффициенты γ_s
1	Прямоугольный	$A\,E(t)\,E(\tau_и - t)$	$\gamma_{s\eta}\,\tau_и^{1-s/2}$
2	Степенной	$A(\nu t)^n E(t) E(\tau_и - t),\ n > 0$	$\gamma_{s\eta} \dfrac{(2n+1)^{s/2}}{ns+1} \tau_и^{1-s/2}$
3	Экспоненциальный	$Ae^{-\nu t} E(t)$	$\gamma_{s\eta} \dfrac{2^{s/2}}{s} \nu^{s/2-1}$
4	Гауссовский	$Ae^{-(\nu t)^2} E(t)$	$\gamma_{s\eta} \left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{s/4} \left(\dfrac{\pi}{s}\right)^{1/2} (2\nu)^{s/2-1}$
5	Гиперболический	$\dfrac{A}{\left[\nu(t+t_0)\right]^n} E(t),\ t_0 > 0,\ n > 1$	$\gamma_{s\eta} \dfrac{(2n-1)^{s/2}}{ns-1} t_0^{1-s/2}$

2. КУМУЛЯНТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ $1/\mathrm{f}$ – ШУМА

Среди множества флуктуационных сигналов различного физического происхождения особое место занимает 1/f – шум, под которым понимают случайный процесс $\xi(t)$, имеющий спектральную плотность $S(f)$ следующего вида [9–16]:

$$S(f) \sim \frac{\mathrm{const}}{f^b}, \qquad f \in (0, \infty), \tag{5}$$

где $b > 0$ – некоторая постоянная.

В электронике 1/f – шум известен под названиями шума эффекта мерцания, фликкер–шума, избыточного шума и проявляется в большинстве материалов, элементов и приборов, применяемых в электронике [9]. Помимо электронных шумов к флуктуационным сигналам со спектральной плотностью (5) относятся акустические шумовые сигналы [10, 11], различные музыкальные произведения [12], турбулентные процессы [13], магнитные шумы ферромагнетиков при их перемагничивании [14], шумовые процессы в физиологических [15] и биологических [16] системах и пр.

Проанализируем кумулянты и кумулянтные коэффициенты 1/f – шума. Следуя работе [9] будем считать, что 1/f – шум описывается моделью Бунимовича–Райса (1), в которой форма элементарных импульсов является экспоненциально–степенной функцией

$$h(t) = A\left(t/t_0\right)^{b-1} e^{-t/t_0} E(t), \tag{6}$$

где $A > 0$, $t_0 > 0$, $b > 0$ – параметры импульса.

Подставляя (6) в формулу (3) получаем выражение для нахождения кумулянтов 1/f – шума:

$$\kappa_s = \kappa_{s\eta} A^s t_0 \frac{\Gamma(sb - s + 1)}{s^{sb-s+1}}. \tag{7}$$

где $\kappa_{s\eta} = \lambda\alpha_{s\eta}$, $\alpha_{s\eta}$ – начальные моменты амплитуд η_k, $\Gamma(x)$ – гамма–функция.

Поскольку $\Gamma(x)$ определяется для области $x > 0$, то кумулянты (7) существует при выполнении условия $sb - s + 1 > 0$. Поэтому при $b \ge 1$ существуют кумулянты любого порядка s, а при $b \in (0,1)$ – лишь кумулянты порядка s, который определен неравенством $0 < (s-1)/s < b$. Таким образом, математическое ожидание 1/f – шума $m = \kappa_1$ существует при любых значениях $b > 0$, а его дисперсия $\sigma^2 = \kappa_2$ – только при $b > 0{,}5$.

Подставляя (7) в формулу (4) получаем общее выражение для нахождения кумулянтных коэффициентов γ_s 1/f – шума:

$$\gamma_s = \frac{\alpha_{s\eta}}{\alpha_{2\eta}^{s/2}} \frac{\Gamma(sb - s + 1)}{\left[\Gamma(2b-1)\right]^{s/2}} \frac{2^{(2b-1)s/2}}{s^{sb-s+1}} \left(\lambda t_0\right)^{1-s/2}, \quad b > 0{,}5. \tag{8}$$

Конкретизируем рассматриваемую задачу. Зададим в формуле (6) значения параметров $A = 1$ и $b = 1$. В этом случае у 1/f – шума, описываемого выражением (1), импульсы имеют экспоненциальную форму, т. е. $h(t) = e^{-t/t_0} E(t)$, и формула (8) принимает вид

$$\gamma_s = \frac{\alpha_{s\eta}}{\alpha_{2\eta}^{s/2}} \frac{2^{s/2}}{s} \left(\lambda t_0\right)^{1-s/2}. \tag{9}$$

Вычислим кумулянтные коэффициенты (9) модели (1) 1/f – шума при экспоненциальной форме импульсов для двух моделей распределений амплитуд η_k импульсов.

1. Предположим, что распределение амплитуд η_k – вырожденное, т.е. $\mathbf{P}(\eta_k = 1) = 1$. В этом случае все начальные моменты $\alpha_{s\eta} = 1$. В табл. 2 приведены рассчитанные значения кумулянтных коэффициентов γ_s, $s = \overline{3,8}$, при различных значениях параметра λt_0.

Таблица 2. Значения коэффициентов γ_s при вырожденном распределении амплитуд

λt_0	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8
1	0,9428	1	1,1314	1,3333	1,6162	2
10	0,2981	0,1	0,0358	0,0133	0,0051	0,002
100	0,0943	0,01	0,0011	0,0001	0,00002	0,000002

2. Будем считать, что амплитуды η_k распределены по показательному закону с параметром β, у которого $\alpha_{s\eta} = s!/\beta^s$. В этом случае формула (9) принимает вид

$$\gamma_s = (s-1)!\left(\lambda t_0\right)^{1-s/2}. \tag{10}$$

В табл. 3 приведены рассчитанные значения кумулянтных коэффициентов γ_s, $s = \overline{3,8}$, при различных значениях параметра λt_0.

Таблица 3. Значения коэффициентов γ_s при показательном распределении амплитуд

λt_0	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8
1	2	6	24	120	720	5040
10	0,6325	0,6	0,7590	1,2	2,2768	5,04
100	0,2	0,06	0,024	0,012	0,007	0,005

Из данных табл. 2–3 видно, что при фиксированном значении λt_0 все коэффициенты γ_s при показательном распределении амплитуд импульсов намного больше соответствующих γ_s при вырожденном распределении. С ростом параметра λt_0 для обоих распределений амплитуд кумулянтные коэффициенты γ_s любого порядка уменьшаются. Для вырожденного распределения амплитуд при $\lambda t_0 = 1$ коэффициенты $\gamma_s < \gamma_{s+1}$, а при $\lambda t_0 = 10$ и $\lambda t_0 = 100$ – $\gamma_s > \gamma_{s+1}$. Для показательного распределения при $\lambda t_0 = 1$ все коэффициенты γ_s возрастают с ростом s, при $\lambda t_0 = 100$ – уменьшаются при увеличении s, а при $\lambda t_0 = 10$ – $\gamma_3 > \gamma_4$ и $\gamma_s < \gamma_{s+1}$, если $s \geq 4$.

Отметим, что выражение (10) совпадает с формулой для кумулянтных коэффициентов гамма–распределения с параметром формы λt_0 и параметром масштаба β. Из этого следует, что плотность вероятностей 1/f – шума при экспоненциальной форме импульсов и показательном распределении амплитуд определится выражением

$$p(x) = \frac{\beta^{\lambda t_0}}{\Gamma\left(\lambda t_0\right)} x^{\lambda t_0 - 1} e^{-\beta x} E(x).$$

В частном случае, когда λt_0=1, распределение 1/f – шума является показательным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кумулянтные методы являются достаточно простыми и эффективными для исследования акустических флуктуационных сигналов, поскольку позволяют учитывать тонкую структуру этих сигналов. Использование в качестве информативных характеристик флуктуационных сигналов кумулянтных коэффициентов высоких порядков наряду с корреляционно–спектральными функциями позволит расширить возможности акустических информационных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бунимович В.И.* Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах. – М.: Сов. радио, 1951. – 360 с.
2. *Rice S.O.* Mathematical analysis of random noise. // Bell Syst. Techn. Journ; 1944. – Vol. 23, № 3. – P. 282–332; 1945. – Vol. 24, № 1. – P. 46–156.
3. *Марченко Б.Г.* Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. – К.: Наук. думка, 1973. – 192 с.
4. *Марченко Б.Г., Щербак Л.Н.* Линейные случайные процессы и их приложения. – К.: Наук. думка, 1975. – 144 с.
5. *Красильников А.И.* Представление одномерной характеристической функции линейных случайных процессов в форме А.Н. Колмогорова, Киев политехн. ин-т – К., 1985. – 15 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 15.10.85, № 2540 Ук-85 Деп.
6. *Красильников А.И.* Некоторые свойства пуассоновской спектральной функции Колмогорова линейных случайных процессов // Электроника и связь. – 2005. – № 26. – С. 23–28.
7. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований. – М.: Сов. радио, 1978. – 376 с.
8. *Красильников А.И.* Пуассоновские моменты безгранично делимых распределений // Электроника и связь. – 2002. – № 15. – С. 84 – 88.
9. *Букингем М.* Шумы в электронных приборах и системах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 399 с.
10. *Буйло С.И.* Физико-механические и статистические аспекты повышения достоверности результатов акустико–эмиссионного контроля и диагностики. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федеральн. ун-та, 2008. – 192 с.
11. *Сиротюк М.Г.* Акустическая кавитация / Отв. ред. В.А. Акуличев, Л.Р. Гаврилов; Тихоокеан. океанол. ин-т им. В.И. Ильичева ДВО РАН. – М.: Наука, 2008. – 271 с.
12. *Voss R.F., Clark J.* “1/f noise” in music: Music from 1/f noise // J. Acoust. Soc. Am. – 1978. – Vol. 63, № 1. – P. 258–263.
13. *Доценко С.В.* Случайные процессы в гидрофизических измерениях. – Л.: Гидрометеоиздат, 1983. – 240 с.
14. *Колачевский Н.Н.* Флуктуационные процессы в ферромагнитных материалах – М.: Наука, 1975. – 184 с.
15. *Verveen A.A., Derksen H.E.* Fluctuation phenomena in nerve membrane // Proceedings of the IEEE. – 1968. – Vol. 56, № 6. – P. 906–916.
16. *Hausdorff J.M., Peng C.-K.* Multiscaled randomness: A possible of 1/f noise in biology // Physicsl rewiev E. – 1996. – Vol. 54, № 2. – P. 2154–2157.