

ИССЛЕДОВАНИЯ ФЕНОМЕНА СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

И.И. ГОРБАНЬ

Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев

Приведены описание методики и результаты экспериментальных исследований статистической устойчивости статистик на больших интервалах наблюдения. Акцентируется внимание на том, что гипотеза идеальной статистической устойчивости статистик не находит экспериментального подтверждения. Представлены основные направления исследований физико-математической теории гиперслучайных явлений, описывающей физические события, величины, процессы и поля с учетом нарушения статистической устойчивости.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из удивительных физических явлений является феномен статистической устойчивости, проявляющийся в стабильности статистик – функций выборки (частоты массовых событий, средних величин и пр.) Этот феномен наблюдается повсеместно и потому его можно отнести к числу фундаментальных явлений природы.

В фундаментальном английском справочнике по математике [1] он охарактеризован следующим образом: «Статистическая устойчивость в каждом конкретном случае является эмпирическим физическим законом, который, как и закон гравитации, или закон индукции, вытекает из опыта, а не из математики».

В настоящее время известно две теории, описывающие этот феномен: теория вероятностей, имеющая многовековую историю развития, и теория гиперслучайных явлений, разрабатываемая в последние десятилетия.

Цель доклада – ознакомить с результатами экспериментальных исследований статистической устойчивости статистик на больших интервалах наблюдения, свидетельствующих о неидеальном характере этого феномена, и представить физико-математическую теорию гиперслучайных явлений, описывающую физические события, величины, процессы и поля с учетом нарушения статистической устойчивости.

Термин «гиперслучайное явление» вошло в научную литературу лишь в 2005 г. [2], однако основы рассматриваемой теории начали формироваться еще на рубеже 70-х — 80-х годов прошлого столетия. За последние годы исследованию нарушений статистической устойчивости и разработке теории гиперслучайных явлений посвящено немало публикаций – одних только монографий, как минимум, восемь: четыре на русском языке [3–6], две на украинском [7, 8] и две на английском [9, 10].

Несмотря на значительное число публикаций, понимание важности и актуальности проведения детальных экспериментальных исследований феномена статистической устойчивости и развития теории, описывающей специфические особенности этого феномена, не учитываемые теорией вероятностей, зачастую отсутствует, в особенности, в математической научной среде.

1. ГИПОТЕЗА ИДЕАЛЬНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В рамках теории вероятностей массовые физические явления (события, величины, процессы и поля) представляются случайными явлениями (моделями) – случайными событиями, величинами и функциями. Характерными особенностями случайной модели

являются ее массовость (существование множества реализаций) и наличие вероятностной меры (вероятности), характеризующей частоту наступления любых возможных событий при неограниченно большом количестве реализаций. Массовые явления, которые не характеризуются вероятностной мерой, случайными не считаются.

Возможность использования случайных моделей для описания реалий окружающего мира основана на физической гипотезе идеальной статистической устойчивости, предполагающей существование вероятности и сходимости статистик к определенным величинам.

2. ИДЕАЛИЗАЦИЯ ФЕНОМЕНА СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Теория вероятностей нашла широкое применение в различных областях науки и техники. Однако, как выяснилось, некоторые ее положения противоречат опытным данным. Характерный пример касается потенциальной точности измерения. Согласно теории вероятностей принципиальных ограничений точности измерений нет: увеличивая объем обрабатываемых данных теоретически можно уменьшить погрешность до нуля. Но практика показывает, что реальная точность измерений всегда ограничена. Преодолеть определенный предел точности путем статистической обработки данных невозможно.

Исследование причин расхождения между теорией и практикой привело к пониманию, что проблема связана с необоснованной идеализацией феномена статистической устойчивости.

Понятие статистической устойчивости до недавнего времени не было формализовано. Исследования показали, что статистическая устойчивость зависит от особенности процесса, вида статистики и интервала наблюдения (количества данных).

При относительно небольшом объеме данных увеличение числа отсчетов приводит к уменьшению флуктуации средних величин (рис. 1, б). Но при большом объеме эта тенденция не наблюдается: достигнув определенного значения, уровень флуктуаций практически не изменяется или даже растет (рис. 1, в).

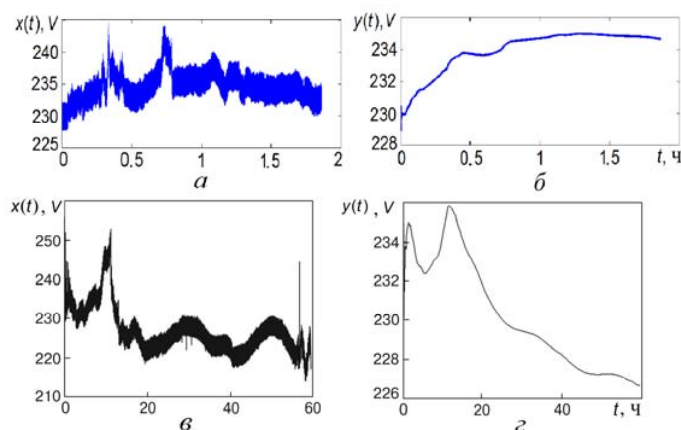


Рис. 1. Колебания напряжения городской сети $x(t)$ на протяжении 1,8 ч (а) и 60 ч (в), а также соответствующие зависимости среднего $y(t)$ от времени усреднения (б, г)

Уровень флуктуаций среднего характеризует его дисперсия, а также ряд связанных с ним параметров статистической неустойчивости, в частности, параметр $\gamma_N = M[\bar{D}_{Y_N}] / M[\bar{D}_{X_N}]$, где $M[\bar{D}_{Y_N}]$ – математическое ожидание выборочной дисперсии

среднего, а $M[\bar{D}_{X_N}]$ – математическое ожидание выборочной дисперсии исходного колебания $X(t)$, N – количество некоррелированных отсчетов.

Для процессов неограниченной и ограниченной длительности используются разные критерии статистической устойчивости. Процесс неограниченной длительности считается статистически устойчивым по отношению к среднему, если при неограниченном увеличении интервала наблюдения параметр γ_N стремится к нулю. Процесс ограниченной длительности считается статистически устойчивым по отношению к среднему, если за время наблюдения оценка γ_N^* параметра γ_N не выходит за верхнюю границу доверительного интервала, рассчитанного для идеального статистически устойчивого процесса (белого шума). Процессы, не удовлетворяющие указанным требованиям, считаются статистически неустойчивыми по отношению к среднему на рассматриваемом интервале (рис. 2). Аналогичным образом определяется устойчивость/неустойчивость процесса по отношению к другим статистикам, например к среднему квадратичному отклонению (СКО). Интервал максимальной длительности, на котором нарушения статистической устойчивости еще не обнаруживаются, называется интервалом статистической устойчивости (рис. 2).

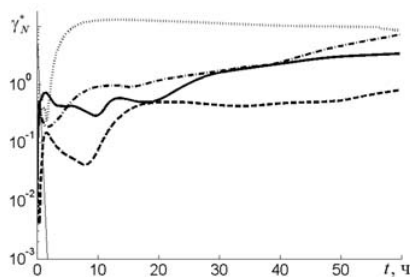


Рис. 2. Зависимость от времени оценок параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему для четырех шестидесяти часовых реализаций колебаний напряжения городской сети. Тонкая непрерывная линия – верхняя граница доверительного интервала. Интервал статистической устойчивости этих процессов равен примерно 1 часу.

Результаты многочисленных экспериментальных исследований различных физических процессов на больших интервалах наблюдения показывают, что реальные статистики свойством сходимости не обладают (табл. 1).

Исследования показывают, что статистическая устойчивость случайного процесса по отношению к среднему и СКО определяется его спектрально-корреляционными характеристиками (рис. 3).

Непрерывный аналог γ_T параметра статистической неустойчивости γ_N случайного процесса $X_T(t)$, определенного на интервале времени $[0, T]$, при $T \rightarrow \infty$ описывается следующей асимптотической формулой:

$$\gamma = \lim_{T \rightarrow \infty} \gamma_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T \frac{\ln^2 fT}{f^2} S_{x_T}(f) df}{4\pi^2 T^2 \int_{1/T}^T S_{x_T}(f) df},$$

где $S_{x_T}(f)$ – спектральная плотность мощности (СПМ) процесса $X_T(t)$, f – частота.

Табл. 1. Інтервали статистическої устійчивости различных колебаний

№ n/n	Реальные колебания	Интервал стат. устойчивости
1	Колебание напряжения городской электросети	Порядка 1 ч
2	Колебания курса валют	Порядка 1 ч
3	Колебания высоты волн и периода их следования	Порядка полусуток
4	Колебания температуры и скорости звука в океане	Десятки часов
5	Колебание интенсивности излучения астрофизического источника Cygnus X-1	Порядка неделя
6	Колебания температуры воздуха	Несколько недель
7	Колебание интенсивности излучения астрофизического источника GRS 1915+105	Порядка месяца
8	Узкополосные колебания температуры воды в океане со средним периодом от 2 до 10 ч	Несколько недель
9	Колебание интенсивности излучения пульсара PSR J1012+5307	Несколько месяцев
10	Колебания скорости ветра	Несколько месяцев
11	Колебание магнитного поля Земли	Несколько месяцев
12	Колебания количества осадков	Многие десятки лет



Рис. 3. Случайные процессы со степенной СПМ.

Пока объемы обрабатываемых данных оставались относительно небольшими классические модели и методы теории вероятностей полностью удовлетворяли потребностям практики и вопрос о сходимости реальных статистик не поднимался. Однако ситуация изменилась в последнее время с появлением новых задач, требующих обработки больших объемов данных, собираемых на больших интервалах наблюдения. Для таких задач вопрос корректного учета нарушений статистической устойчивости чрезвычайно актуален. Исследование нарушений статистической устойчивости и разработка эффективных способов описания физических явлений с учетом этих нарушений привело к формированию теории гиперслучайных явлений.

3. ТЕОРИЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Теория гиперслучайных явлений базируется на физической гипотезе ограниченной статистической устойчивости, предполагающей отсутствие сходимости оценок параметров и характеристик реальных событий, величин, процессов и полей.

В рамках теории гиперслучайных явлений массовые физические явления описываются гиперслучайными явлениями (моделями) – гиперслучайными событиями, величинами, процессами и полями, представляющими собой совокупности случайных явлений. В отличие от случайной модели, характеризуемой мерой, гиперслучайная модель характеризуется множеством мер.

Теория гиперслучайных явлений – физико-математическая теория. Объектом ее исследования является физический феномен статистической устойчивости, а предметом исследования – способы адекватного его описания гиперслучайными моделями.

Математическая часть теории гиперслучайных явлений базируется на системе математических аксиом теории вероятностей, предложенной А.Н. Колмогоровым. Поэтому теория гиперслучайных явлений с математической точки зрения представляет собой ветвь классической теории вероятностей. Однако с физической точки зрения это новая теория, которая, в отличие от теории вероятностей, учитывает нарушения статистической устойчивости.

В рамках теории гиперслучайных явлений разработана методика исследования нарушений статистической устойчивости. С ее помощью установлена зависимость статистической устойчивости случайных процессов от их спектрально-корреляционных характеристик. В результате экспериментальных исследований оценены интервалы статистической устойчивости ряда реальных процессов разной физической природы. Разработаны способы описания реальных физических явлений с помощью гиперслучайных моделей. Разработаны варианты описания гиперслучайных событий, скалярных и векторных гиперслучайных величин, скалярных и векторных гиперслучайных функций и гиперслучайных функционалов. Обобщены понятия сходимости на случай последовательности гиперслучайных величин и гиперслучайных функций. Установлено, что свойства стационарности и эргодичности присущи в обобщенном смысле некоторым гиперслучайным процессам. Исследованы гиперслучайные процессы, обладающие марковскими свойствами. Получены формулы, позволяющие рассчитывать характеристики гиперслучайных величин и процессов при различных преобразованиях. Распространены методы математической статистики на гиперслучайные величины и процессы. Разработаны основы математического анализа расходящихся и многозначных функций. Доказаны обобщенный закон больших чисел и обобщенная центральная предельная теорема, справедливые как при отсутствии, так и при наличии сходимости. Проработан ряд прикладных вопросов.

Области целесообразного применения теории гиперслучайных явлений охватывают широкий круг теоретических и прикладных задач, в которых проявляется нарушение сходимости. Первоочередная область практического применения этой теории связана со статистической обработкой различных физических процессов большой длительности, высокоточными измерениями и прогнозированием развития событий на основе статистической обработки больших массивов данных, моделированием и исследованием сложных систем.

В настоящее время прикладные вопросы теории гиперслучайных явлений наиболее детально проработаны применительно к задаче измерения физических величин в непрогнозируемо изменяющихся статистических условиях. Выяснено, что при

определенных предположениях погрешность измерения можно представить в виде систематической, случайной и интервальной (статистически непрогнозируемой) составляющих. При увеличении объема выборки случайная составляющая погрешности уменьшается, а систематическая и интервальная составляющие не изменяются. Наличие статистически непрогнозируемой составляющей приводит к ограничению потенциальной точности реальных измерений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментальные исследования феномена статистической устойчивости указывают на то, что, по всей видимости, физический мир базируется на гиперслучайных принципах и подчиняется трем видам законов: детерминированным, статистически прогнозируемым (случайным) и статистически непрогнозируемым. Наличие статистически непрогнозируемых закономерностей приводит к ограничению потенциальной точности реальных измерений.

Ограниченный характер статистической устойчивости указывает на необходимость пересмотра положений физических дисциплин, в которых понятия вероятности и сходимости играют ключевую роль: это в первую очередь статистическая механика, статистическая физика и квантовая механика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Korn G.A., Korn T.M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review.* – Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 2000. — 1130 p.
2. Горбань И.И. Гиперслучайные явления и их описание // *Акустический вестник.* — 2005. — Том 8, № 1—2. — С. 16—27.
3. Горбань И.И. *Теория гиперслучайных явлений.* — К.: ИПММС НАН Украины, 2007. — 184 с.
4. Горбань И.И. *Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы.* — К.: Наук. думка, 2011. — 318 с.
5. Горбань И.И. *Феномен статистической устойчивости.* – К.: Наукова думка, 2014. – 444 с.
6. Горбань И.И. *Случайность и гиперслучайность.* — К.: Наук. думка, 2016. — 288 с.
7. Уваров Б.М., Зіньковський Ю.Ф. *Проектування та оптимізація механостійких конструкцій радіоелектронних засобів з гіпервипадковими характеристиками.* — Луганськ: ЛНПУ, 2011. — 180 с.
8. Уваров Б.М., Зіньковський Ю.Ф. *Оптимізація стійкості до теплових впливів конструкцій радіоелектронних засобів з гіпервипадковими характеристиками.* — Луганськ: ЛНПУ, 2011. — 212 с.
9. Gorban I.I. *The statistical stability phenomenon.* – Springer. – 2017. – 362 p.
10. Gorban I.I. *Randomness and hyper-randomness.* – Springer. – 2017. – 256 p.